Département de Mathématiques et de Génie Industriel
École Polytechnique de Montréal

MATHÉMATIQUES DES ÉLÉMENTS FINIS
MTH8207

Automne 2024

Devoir 4 — 100 points

Distribué le 2024/11/17 — À rendre le 2024/11/29

Question 1 (Transformation sur l'élément tensoriel en 2D) :

Soient $\widehat{K} = [-1,1] \times [-1,1]$ l'élément tensoriel de référence en 2D et K un élément dans l'espace physique. On définit la transformation $T_K = (T_{K,x}, T_{K,y})$ de $\widehat{K}$ vers K comme :

$$x = T_{K,x}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} x_i \hat{\theta}_i(\xi,\eta), \qquad y = T_{K,y}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} y_i \hat{\theta}_i(\xi,\eta)$$

où (x_i, y_i) sont les coordonnées des sommets de l'élément K et $\hat{\theta}_i$ sont les fonctions de forme :

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_1(\xi,\eta) &= 0.25(1-\xi)(1-\eta)\\
\hat{\theta}_2(\xi,\eta) &= 0.25(1+\xi)(1-\eta)\\
\hat{\theta}_3(\xi,\eta) &= 0.25(1+\xi)(1+\eta)\\
\hat{\theta}_4(\xi,\eta) &= 0.25(1-\xi)(1+\eta)
\end{aligned}$$

Montrer que la transformation T_K est affine si et seulement si K est un parallélogramme.

Question 2 (Élément fini de Nédélec) :

L'élément fini de Nédélec de degré 1 en dimension 2 est défini par le triplet $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ où $\widehat{K}$ est le simplexe unitaire de $\mathbb{R}^2$, i.e.

$$\widehat{K} = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2;\ \xi \geq 0,\ \eta \geq 0,\ \text{et } \xi + \eta \leq 1\},$$

$\widehat{P}$ est l'espace vectoriel des fonctions polynômiales vectorielles de degré 1 tel que

$$\widehat{P} = \Big\{\boldsymbol{p} \in [\mathbb{P}_1(\widehat{K})]^2 :\ \boldsymbol{p}(\xi,\eta) = (a,b) + c(\eta,-\xi)\Big\},$$

et $\widehat{\Sigma}$ est l'ensemble des degrés de liberté tels que pour $\boldsymbol{p} \in \widehat{P}$:

$$\hat{\sigma}_i(\boldsymbol{p}) = \int_{E_i} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{t}_i \, ds, \quad i = 1,2,3.$$

Ici, $\boldsymbol{t}_i$ est le vecteur unitaire tangent à l'arête E_i du simplexe (triangle).

Trouver les fonctions de forme de l'élément fini de Nédélec et donner une représentation graphique de ces fonctions.

Question 3 (Transformation) :

Soit $\widehat{K}$ le simplexe unitaire de $\mathbb{R}^2$ et K le triangle de sommets $\boldsymbol{x}_1 = (0,0)$, $\boldsymbol{x}_2 = (2,0)$, et $\boldsymbol{x}_3 = (1,a)$, où $a \in \mathbb{R}^+$. On considère l'élément fini P1, i.e. l'élément fini linéaire de Lagrange, sur $\widehat{K}$.

a) Donner la forme explicite, en fonction de a, de la transformation T_K, qui à tout point $(\xi,\eta) \in \widehat{K}$ donne un point (x,y) appartenant à K, et telle que $\boldsymbol{x}_1 = T_K(0,0)$, $\boldsymbol{x}_2 = T_K(1,0)$, et $\boldsymbol{x}_3 = T_K(0,1)$. La transformation T_K obtenue est-elle bijective?

b) Calculer, pour chaque point (x,y) de K, le gradient des trois fonctions de forme θ_i définies sur K, c'est-à-dire,

$$\nabla\theta_i(x,y) = \left(\frac{\partial\theta_i}{\partial x}(x,y), \frac{\partial\theta_i}{\partial y}(x,y)\right), \quad \forall(x,y) \in K, \quad i = 1,2,3.$$

Que deviennent les gradients lorsque a tend vers zéro?

c) En se servant des résultats obtenus en 3b), évaluer le gradient de la fonction $f(x,y)$:

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \theta_i(x,y)$$

en chaque point $(x,y) \in K$. Pouvait-on s'attendre à ce résultat? Expliquer.

Question 4 (Borne de l'erreur pour un problème symétrique) :

On considère le problème de valeurs aux limites dont la forme faible est donnée par :

$$\text{Trouver } u \in V, \quad B(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V,$$

où V est un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|_V$, $B(u,v)$ est une forme bilinéaire continue, de constante de continuité M, et coercive, de constante de coercivité α, et $F(v)$ est une forme linéaire continue. On suppose de plus que l'on calcule une approximation $u_h \in V^h \subset V$ de u par la méthode des éléments finis. Montrer que si B est de plus symétrique alors

$$\|u - u_h\|_V \leq \sqrt{M/\alpha}\|u - w_h\|_V, \quad \forall w_h \in V^h.$$

Question 5 (Problème de diffusion-convection-reaction) :

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1$, 2, ou 3, et u la solution du problème stationnaire :

$$\begin{aligned} -\Delta u + \beta\cdot\nabla u + u &= f, \quad \forall x \in \Omega \\ u &= 0, \quad \forall x \in \Gamma_D \\ n\cdot\nabla u &= 0, \quad \forall x \in \Gamma_N \end{aligned}$$

où n est le vecteur normal à $\partial\Omega$ orienté vers l'extérieur de Ω, β est un champ de vitesses satisfaisant $\nabla\cdot\beta = 0$ dans Ω et $\beta\cdot n = 0$ sur $\partial\Omega = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N}$.

a) Donner la forme faible du problème et l'écrire sous la forme :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ telle que : } \quad B(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V,$$

i.e. identifier l'espace vectoriel V, la forme bilinéaire B, et la forme linéaire F.

b) Montrer que le problème ci-dessus est bien posé lorsque $f \in L^2(\Omega)$.

c) Soit $Q : \ V \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle linéaire, on définit le problème adjoint associé au problème ci-dessus comme celui de :

$$\text{Trouver } p \in V \text{ telle que :} \quad B(v,p) = Q(v), \quad \forall v \in V.$$

La fonctionnelle Q représente une grandeur physique ou une quantité d'intérêt de la solution u. Trouver la forme forte du problème adjoint correspondant à la grandeur physique :

$$Q(u) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \alpha \cdot \nabla u(x) dx,$$

où $|\Omega|$ est l'aire de Ω en 2D ou le volume de Ω en 3D, α est un vecteur unitaire constant sur Ω. On observe que Q correspond à la valeur moyenne sur Ω de ∇u dans la direction α.

d) Montrer que le problème adjoint ci-dessus est bien posé.

SOLUTIONS

<u>Question 1 (10 points) :</u>

Soit un quadrilatère K donné par les sommets $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, 4$. La transformation T_K de $\widehat{K}$ dans K est donnée par :

$$
\begin{aligned}
x &= x_1(1-\xi)(1-\eta)/4 + x_2(1+\xi)(1-\eta)/4 + x_3(1+\xi)(1+\eta)/4 + x_4(1-\xi)(1+\eta)/4 \\
y &= y_1(1-\xi)(1-\eta)/4 + y_2(1+\xi)(1-\eta)/4 + y_3(1+\xi)(1+\eta)/4 + y_4(1-\xi)(1+\eta)/4
\end{aligned}
$$

On en déduit que les coefficients du monôme $\xi\eta$ sont, pour x et y, respectivement :

$$
\begin{aligned}
&(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)/4 \\
&(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)/4
\end{aligned}
$$

La transformation T_K est affine si on a $(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) = 0$ et $(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) = 0$, soit :

$$
\begin{aligned}
x_2 - x_1 &= x_3 - x_4, \\
y_2 - y_1 &= y_3 - y_4,
\end{aligned}
$$

ce qui implique que $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}$ et que K est un parallélogramme.

Inversement, si K est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{P_2P_3}$ (ou $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}$), ce qui donne :

$$
\begin{cases} x_4 - x_1 = x_3 - x_2 \\ y_4 - y_1 = y_3 - y_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 0 \end{cases}
$$

ce qui implique que T_K est nécessairement une transformation affine.

<u>Question 2 (20 points) :</u>

On suppose que les sommets du triangle sont numérotés de 1 à 3 dans le sens trigonométrique et que le sommet 1 est donné par $(0, 0)$. De plus, le numéro de chaque côté E_i est donné par le numéro du sommet opposé au côté. Par exemple, E_1 est le côté qui joint les sommets 2 et 3.

On cherche les fonctions de forme $\boldsymbol{\theta}_j(\xi, \eta) = (a_j + c_j\eta, b_j - c_j\xi)$, $j = 1, 2, 3$, telles que :

$$
\sigma_i(\boldsymbol{\theta}_j) = \int_{E_i} \boldsymbol{\theta}_j(\xi, \eta) \cdot \boldsymbol{t}_i ds = \int_{E_i} \left(a_j + c_j\eta, b_j - c_j\xi\right) \cdot \boldsymbol{t}_i ds = \delta_{ij}
$$

1. On paramétrise E_1 par $(\xi, \eta) = (1-t, t)$, $t \in [0, 1]$, de sorte que $ds = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2} = \sqrt{2}dt$. Puisque $\boldsymbol{t}_1 = (-1, 1)/\sqrt{2}$, on obtient :

$$
\sigma_1(\boldsymbol{\theta}_j) = \int_0^1 \begin{bmatrix} a_j + c_j t \\ b_j - c_j(1-t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} dt = \int_0^1 -a_j + b_j - c_j dt = -a_j + b_j - c_j.
$$

2. On paramétrise E_2 par $(\xi, \eta) = (0, 1-t)$, $t \in [0, 1]$, ce qui donne $ds = dt$ et $\boldsymbol{t}_2 = (0, -1)$. Donc

$$
\sigma_2(\boldsymbol{\theta}_j) = \int_0^1 \begin{bmatrix} a_j + c_j(1-t) \\ b_j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} dt = \int_0^1 -b_j dt = -b_j.
$$

3. On paramétrise E_3 par $(\xi, \eta) = (t, 0)$, $t \in [0,1]$, ce qui donne $ds = dt$ et $\boldsymbol{t}_2 = (1,0)$. Donc

$$\sigma_3(\boldsymbol{\theta}_j) = \int_0^1 \begin{bmatrix} a_j \\ b_j - c_j t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt = \int_0^1 a_j dt = a_j.$$

Puisque l'on veut $\sigma_i(\boldsymbol{\theta}_j) = \delta_{ij}$, on obtient le système :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La solution du système nous donne :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Les fonctions de forme valent alors :

$$\boldsymbol{\theta}_1 = \begin{bmatrix} -\eta \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_2 = \begin{bmatrix} -\eta \\ -1+\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\eta \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_3 = \begin{bmatrix} 1-\eta \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\eta \\ \xi \end{bmatrix}.$$

On représente les fonctions de forme par leurs champs vectoriels sur l'élément de référence $\widehat{K}$.

QUESTION 3 (15 POINTS) :

a) La transformation T_K est donnée par $(x, y) = T_K(\xi, \eta)$ telle que :

$$x = \sum_{i=1}^{3} x_i \hat{\theta}_i(\xi, \eta) = 0 \times \hat{\theta}_1(\xi, \eta) + 2 \times \hat{\theta}_2(\xi, \eta) + 1 \times \hat{\theta}_3(\xi, \eta)$$
$$y = \sum_{i=1}^{3} y_i \hat{\theta}_i(\xi, \eta) = 0 \times \hat{\theta}_1(\xi, \eta) + 0 \times \hat{\theta}_2(\xi, \eta) + a \times \hat{\theta}_3(\xi, \eta)$$

où :

$$\hat{\theta}_1(\xi, \eta) = 1 - (\xi + \eta)$$
$$\hat{\theta}_2(\xi, \eta) = \xi$$
$$\hat{\theta}_3(\xi, \eta) = \eta$$

On a donc :

$$x = 2\xi + \eta$$
$$y = a\eta$$

On peut écrire la transformation sous forme matricielle comme :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T_K \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

La transformation T_K est bijective puisque la matrice ci-dessus, pour $a \neq 0$, est inversible.

b) La matrice jacobienne J associée à la transformation T_K est donnée ici par :

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

D'autre part, on a vu en cours que les gradients des fonctions de forme sur K sont calculés à partir des gradients des fonctions de forme sur $\widehat{K}$ par la relation :

$$\nabla_x \theta_i(x,y) = J^{-T} \nabla_\xi \hat{\theta}_i(\xi,\eta), \quad i = 1,2,3$$

où $J^{-T} = (J^{-1})^T = (J^T)^{-1}$ et :

$$\nabla_x \theta_i(x,y) = \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x}, \frac{\partial \theta_i}{\partial y} \right), \quad \nabla_\xi \hat{\theta}_i(\xi,\eta) = \left(\frac{\partial \hat{\theta}_i}{\partial \xi}, \frac{\partial \hat{\theta}_i}{\partial \eta} \right)$$

On a :

$$J^{-T} = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} a & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \nabla_\xi \hat{\theta}_1(\xi,\eta) = (-1,-1), \quad \nabla_\xi \hat{\theta}_2(\xi,\eta) = (1,0), \quad \nabla_\xi \hat{\theta}_3(\xi,\eta) = (0,1)$$

Comme le jacobien et les gradients sont constants sur l'élément de référence, on obtient :

$$\nabla_x \theta_1(x,y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2a} \right), \quad \nabla_x \theta_2(x,y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2a} \right), \quad \nabla_x \theta_3(x,y) = \left(0, \frac{1}{a} \right), \quad \forall (x,y) \in K.$$

On observe que les composantes en y des gradients tendent vers l'infini lorsque $a \to 0$.

c) De la définition de f, on a :

$$\nabla_x f(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \nabla_x \theta_i(x,y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2a} \right) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2a} \right) + \left(0, \frac{1}{a} \right) = (0,0) = \mathbf{0}$$

Ceci était prévisible puisque :

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \theta_i(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \hat{\theta}_i(T_K^{-1}(x,y)) = 1 - (\xi + \eta) + \xi + \eta = 1, \quad \forall (x,y) \in K$$

Comme f est constante, son gradient est nécessairement le vecteur nul. Le fait que la somme des trois fonctions de forme est égale à 1 sur chaque élément K d'un maillage est appelé la partition de l'unité. De la même manière, la somme de toutes les fonctions de base continues et linéaires par morceaux vaut :

$$\sum_{i=1}^{N} \phi_i(x,y) = 1$$

Question 4 (15 points) :

Comme la forme bilinéaire B est coercive, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$\alpha \|e\|_V^2 \le B(e,e) = B(u - u_h, u - u_h)$$

où $e = u - u_h$ définit l'erreur dans l'approximation u_h de u. Soit une fonction $w_h \in V^h$ arbitraire. On a alors :

$$\begin{aligned}
B(u-u_h, u-u_h) &= B(u-w_h+w_h-u_h, u-w_h+w_h-u_h) \\
&= B(u-w_h, u-w_h) + B(u-w_h, w_h-u_h) \\
&+ B(w_h-u_h, u-w_h) + B(w_h-u_h, w_h-u_h) \\
&= B(u-w_h, u-w_h) + 2B(u-w_h, w_h-u_h) + B(w_h-u_h, w_h-u_h),
\end{aligned}$$

où on a utilisé la symétrie de B. De plus,

$$\begin{aligned}
B(u-w_h, w_h-u_h) &= B(u-u_h+u_h-w_h, w_h-u_h) \\
&= B(u-u_h, w_h-u_h) + B(u_h-w_h, w_h-u_h) \\
&= B(e, w_h-u_h) - B(w_h-u_h, w_h-u_h) \\
&= -B(w_h-u_h, w_h-u_h),
\end{aligned}$$

du fait de la propriété d'orthogonalité que satisfait l'erreur $e = u - u_h$. Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
B(u-u_h, u-u_h) &= B(u-w_h, u-w_h) - 2B(w_h-u_h, w_h-u_h) + B(w_h-u_h, w_h-u_h) \\
&= B(u-w_h, u-w_h) - B(w_h-u_h, w_h-u_h) \\
&\leq B(u-w_h, u-w_h),
\end{aligned}$$

puisque $B(w_h-u_h, w_h-u_h)$ est nécessairement une quantité positive par la coercivité de B. On a donc :

$$\alpha\|e\|_V^2 \leq B(u-w_h, u-w_h) \leq M\|u-w_h\|_V^2$$

par la continuité de B, d'où l'on conclut que :

$$\|u-u_h\|_V \leq \sqrt{M/\alpha}\|u-w_h\|_V, \quad \forall w_h \in V^h.$$

<u>QUESTION 5 (40 POINTS) :</u>

a) La forme faible du problème est :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ telle que:} \quad B(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V,$$

avec :

$$\begin{aligned}
V &= \{v \in H^1(\Omega);\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\} \\
B(u,v) &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + (\beta \cdot \nabla u)v + uv\, dx \\
F(v) &= \int_\Omega fv\, dx
\end{aligned}$$

b) L'espace V est un sous-espace vectoriel de $H^1(\Omega)$ et est donc un espace de Hilbert muni de la norme H^1. Pour montrer que le problème est bien posé, il suffit de vérifier les conditions du théorème de Lax-Milgram.

Continuité de B. On suppose que les composantes du champ de vitesses β sont bornées, par exemple qu'il existe une constante $\beta_{\max} > 0$ telle que $|\beta_i(x)| \leq \beta_{\max}$, $\forall x \in \Omega$, $i = 1, \ldots, d$. Il s'ensuit par Cauchy-Schwarz que :

$$\begin{aligned}
|B(u,v)| &\leq \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla v| dx + \int_\Omega |(v\beta) \cdot \nabla u| dx + \int_\Omega |uv| dx \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \|v\beta\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}
\end{aligned}$$

De plus,

$$\|v\beta\|^2 = \int_\Omega \sum_{i=1}^d \beta_i^2 v^2 dx \leq \beta_{\max}^2 \int_\Omega \sum_{i=1}^d v^2 dx \leq d\beta_{\max}^2 \|v\|_{L^2}^2$$

ce qui conduit à :

$$|B(u,v)| \leq \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} + \sqrt{d}\beta_{\max}\|\nabla u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq (1+\sqrt{d}\beta_{\max})\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}, \quad \forall u, v \in V$$

Donc B est continue avec pour constante de continuité $M = 1 + \sqrt{d}\beta_{\max}$. On note que l'on aurait aussi pu supposer que le champ des vitesses satisfasse $\|\beta(x)\|_E \leq \beta_{\text{emax}}$, où $\|\beta\|_E$ est la norme euclidienne du vecteur β et $\beta_{\text{emax}} > 0$. Dans ce cas, on aurait :

$$\|v\beta\|^2 = \int_\Omega \sum_{i=1}^d \beta_i^2 v^2 dx = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^d \beta_i^2\Big) v^2 dx = \int_\Omega \|\beta\|_E^2 v^2 dx \leq \beta_{\text{emax}}^2 \|v\|_{L^2}^2$$

et :

$$|B(u,v)| \leq \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} + \beta_{\text{emax}}\|\nabla u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq M\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}, \qquad \forall u, v \in V$$

avec $M = 1 + \beta_{\text{emax}}$.

Continuité de F. Par Cauchy-Schwarz, on a :

$$|F(v)| \leq \int_\Omega |fv| dx \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}, \qquad \forall v \in V$$

Comme $f \in L^2$, la norme de f est finie et donc F est continue de constante $C = \|f\|_{L^2}$.

Coercivité de B. Soit $u \in V$. On observe que :

$$B(u,u) = \int_\Omega (\nabla u)^2 dx + \int_\Omega (\beta \cdot \nabla u) u \, dx + \int_\Omega u^2 dx = \|u\|_{H^1}^2 + \int_\Omega (\beta \cdot \nabla u) u \, dx$$

Une difficulté ici est que la dernière intégrale pourrait être a priori positive ou négative. En fait, on remarque par le théorème de la divergence que :

$$\int_{\partial\Omega} u^2(\beta \cdot n) ds = \int_\Omega \nabla \cdot (\beta u^2) dx = \int_\Omega (\nabla \cdot \beta) u^2 + \beta \cdot \nabla u^2 dx = \int_\Omega (\nabla \cdot \beta) u^2 dx + 2\int_\Omega (\beta \cdot \nabla u) u \, dx$$

d'où

$$\int_\Omega (\beta \cdot \nabla u) u \, dx = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} u^2 (\beta \cdot n) ds - \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla \cdot \beta) u^2 dx$$

Comme $\beta \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\nabla \cdot \beta = 0$ dans Ω, l'intégrale s'annule et donc :

$$B(u,u) = \|u\|_{H^1}^2$$

Autrement dit, la forme bilinéaire B est coercive et la constante de coercivité est $\alpha = 1$.

Comme on a montré que B est continue et coercive et que F est continue sur l'espace de Hilbert V, le théorème de Lax-Milgram s'applique et le problème est donc bien posé.

c) Le problème adjoint pour la quantité d'intérêt donnée s'écrit :

$$\text{Trouver } p \in V \text{ telle que :} \quad \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla p + (\beta \cdot \nabla v) p + vp \, dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \alpha \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall v \in V.$$

Comme $\alpha \cdot \nabla v = \nabla \cdot (\alpha v) - v \nabla \cdot \alpha = \nabla \cdot (\alpha v)$, puisque α est un vecteur constant, la quantité $Q(v)$ s'écrit:

$$Q(v) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \alpha \cdot \nabla v \, dx = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \nabla \cdot (\alpha v) \, dx = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma_N} (n \cdot \alpha) v \, dx$$

où on a utilisé le théorème de la divergence et le fait que $v = 0$ sur Γ_D. En supposant que p est suffisamment régulière (ce qui dépend de la régularité du domaine Ω pour $d \geq 2$), on peut intégrer par partie :

$$\int_\Omega (\beta \cdot \nabla v) p + \big(-\Delta p + p \big) v \, dx + \int_{\Gamma_N} \big(n \cdot \nabla p - |\Omega|^{-1} n \cdot \alpha \big) v \, ds = 0, \quad \forall v \in V,$$

où on a utilisé le fait que $v = 0$ sur Γ_D. Pour retrouver la forme forte du problème, il faut encore isoler v dans la première intégrale. Par le théorème de la divergence, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} vp(\beta \cdot n) ds &= \int_\Omega \nabla \cdot (\beta v p) dx = \int_\Omega (\nabla \cdot \beta) vp + \beta \cdot \nabla (vp) dx \\ &= \int_\Omega (\nabla \cdot \beta) vp \, dx + \int_\Omega (\beta \cdot \nabla v) p \, dx + \int_\Omega (\beta \cdot \nabla p) v \, dx \end{aligned}$$

Comme $\nabla \cdot \beta = 0$ dans Ω et $\beta \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$ (on remarque ici que l'on aurait pu ne prendre $\beta \cdot n = 0$ que sur Γ_N puisque $v = 0$ sur Γ_D), cette dernière équation devient :

$$\int_\Omega (\beta \cdot \nabla v) p \, dx = -\int_\Omega (\beta \cdot \nabla p) v \, dx$$

On a donc :

$$\int_\Omega \big(-\beta \cdot \nabla p - \Delta p + p \big) v \, dx + \int_{\Gamma_N} \big(n \cdot \nabla p - |\Omega|^{-1} n \cdot \alpha \big) v \, ds = 0, \quad \forall v \in V.$$

Le choix judicieux des fonctions test permet d'obtenir la forme forte du problème adjoint :

$$\begin{aligned} -\Delta p - \beta \cdot \nabla p + p &= 0, \quad \forall x \in \Omega \\ p &= 0, \quad \forall x \in \Gamma_D \\ n \cdot \nabla p &= \frac{n \cdot \alpha}{|\Omega|}, \quad \forall x \in \Gamma_N \end{aligned}$$

On remarque que le problème adjoint ressemble fortement au problème primal en u excepté le fait que le champ de vitesses β a été remplacé par $-\beta$ dans le problème adjoint. Nous observons aussi que les conditions de Dirichlet et de Neumann pour le problème primal restent des conditions de Dirichlet et de Neumann pour le problème adjoint.

d) Comme on a vu que B est continue et coercive sur V, pour montrer que le problème adjoint est bien posé, il suffit de prouver que Q est une forme continue sur V, ce qui est immédiat puisque par Cauchy-Schwarz:

$$|Q(v)| \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |\alpha \cdot \nabla v| dx \leq \frac{1}{|\Omega|} \|\alpha\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} = \frac{1}{|\Omega|} \|\alpha\| \sqrt{|\Omega|} \|v\|_{H^1} = \frac{\|\alpha\|}{\sqrt{|\Omega|}} \|v\|_{H^1}$$

La constante de continuité pour Q est donc $C = \|\alpha\| / \sqrt{|\Omega|}$, où $\|\alpha\|$ est la norme Euclidienne du vecteur constant α.