

Travaux dirigés MTH1101 - Calcul I
TD n°11
Nathanaël Perrin

Pour le vendredi 03 décembre

1. Représenter les lignes de niveau de la fonction f dans chacun des cas suivants :
 - $f(x, y) = y^2$ et $c = 1$ ou $c = -1$
 - $f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{8 - x^2 y^2}$ et $c = 2$
2. Calcul d'une limite problématique :
 - (a) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 2|xy| \leq x^2 + y^2$
 - (b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ et $f(x, y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
 - Montrer que $|f(x, y)| \leq 4\sqrt{x^2 + y^2}$.
 - En déduire que f est continue en $(0, 0)$.
3. Déterminer la limite en $(0, 0)$ des fonctions suivantes :
 - $f(x, y) = (x + y) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$
 - $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
 - $f(x, y) = \frac{|x + y|}{x^2 + y^2}$
4. Déterminer les extrema des fonctions suivantes :
 - $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
 - $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$
 - $f(x, y) = x^3 + y^3$
 - $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$
5. Déterminer les extrema locaux de $f(x, y) = x^4 + y^3 - 3y - 2$. Sont-ils des extrema globaux ?
6. Soit $f(x, y) = y^2 - x^2 y + x^2$ définie sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$
 - (a) Représenter D et donner une paramétrisation dans le demi-plan supérieur et dans le demi-plan inférieur.
 - (b) Justifier que f admet un minimum et un maximum global sur D .
 - (c) Déterminer les points critiques de f .
 - (d) En se servant des deux paramétrisations du premier point, pour n'avoir qu'une contrainte égalité à traiter à la fois, trouver les minimas et maximas de f .