POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Département de mathématiques et de génie industriel
MTH1102(D) - Calcul II
Exercices supplémentaires

Les exercices suivants ont pour but de vous aider à vous préparer à l'examen final.

Question 1

Soit C la courbe d'intersection du cylindre $x^2+y^2=4$ et du paraboloïde hyperbolique $z=y^2-x^2$, orientée dans le sens antihoraire lorsque vue du dessus.

a) Donnez une paramétrisation de C et montrez que c'est une courbe fermée.

b) Calculez la circulation du champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z)=[yz+\cos(x^2)]\vec{i}+[1+\cos(y^2)]\vec{j}+[1+\sin(z^2)]\vec{k}$$

autour de la courbe C.

Question 2

Soit S la surface constituée de la partie de la partie du cylindre $x^2+y^2=25$ située entre les plans $z=0$ et $z=10$ ainsi que le disque défini par $x^2+y^2\leq 25$, $z=10$. La surface S est orientée au point $(5,0,5)$ par le vecteur normal $\vec{n}=\vec{i}$. Soit aussi le champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z)=y^2e^{2+z^2}\,\vec{i}+x\sin^2(z^4)\,\vec{j}+e^{2+z^2}\,\vec{k}$.

a) Écrivez une expression qui permet de calculer le flux Φ de $\operatorname{rot}\vec{F}$ à travers S. On ne demande pas d'évaluer cette expression.

b) Utilisez le théorème de Stokes pour montrer que Φ peut être calculé comme suit :

$$\Phi=\iint_D \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S},$$

où D est le disque $x^2+y^2\leq 25$ avec $z=0$.

c) Utilisez la partie b) pour calculer le flux du rotationnel de $\vec{F}$ à travers S.

Question 3

Soit S la surface du solide borné par la demi-sphère $x^2+y^2+z^2=9$, $z\geq 0$, et le plan $z=0$. Utilisez le théorème de flux-divergence pour calculer le flux vers l'intérieur du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z)=(x^3+ye^z)\,\vec{i}+(y^3+xe^z)\,\vec{j}+(z^3+e^{x^2+y^2})\,\vec{k}$ à travers S.

Question 4

Soit B le solide délimité par le cône C d'équation $z=\sqrt{x^2+y^2}$ et par le paraboloïde P d'équation $z=42-x^2-y^2$. Soit S la surface de B. On considère le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z)=[x+ye^{-z^3}]\,\vec{i}+[2y-xe^{-z^3}]\,\vec{j}+5z\,\vec{k}.$$

a) Calculez le volume du solide B.

b) On sait que le flux vers le haut à travers le paraboloïde P est égal à $\Phi_P=6264\pi$. En utilisant le théorème de flux-divergence, calculez le flux vers le haut, Φ, de $\vec{F}$ à travers le cône C.

Question 5

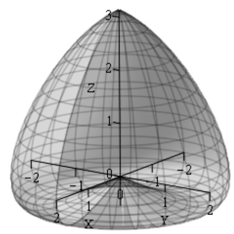
a) Soit E un solide de densité constante α borné par une surface S. Montrez que la masse de E peut être calculée à l'aide de la formule

$$m = \frac{\alpha}{3} \iint_S (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}) \cdot d\vec{S}.$$

b) Utilisez la formule démontrée en a) pour calculer la masse du solide de densité constante $\alpha = 1$ délimité par la surface

$$\vec{R}(u, v) = 2\sin(u)\cos(v)\vec{i} + 2\sin(u)\sin(v)\vec{j} - u\cos(u)\vec{k}, \quad 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi.$$

represéntée ci-dessous.



Question 6

Déterminez si les énoncés sont vrais ou faux. Justifiez soigneusement votre réponse.

a) Le travail d'un champ constant autour d'une courbe fermée est nécessairement nul.

b) Le flux d'un champ conservatif à travers une surface fermée est nécessairement nul.

c) Si C est une courbe fermée délimitant une surface S et si $\vec{F}$ est un champ vectoriel ayant des dérivées partielles continues alors

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

d) Le flux d'un champ irrotationnel (c'est-à-dire dont le rotationnel est nul) à travers une surface fermée est nécessairement nul.

e) Le flux d'un champ incompressible (c'est-à-dire dont la divergence est nulle) à travers une surface fermée est nécessairement nul.