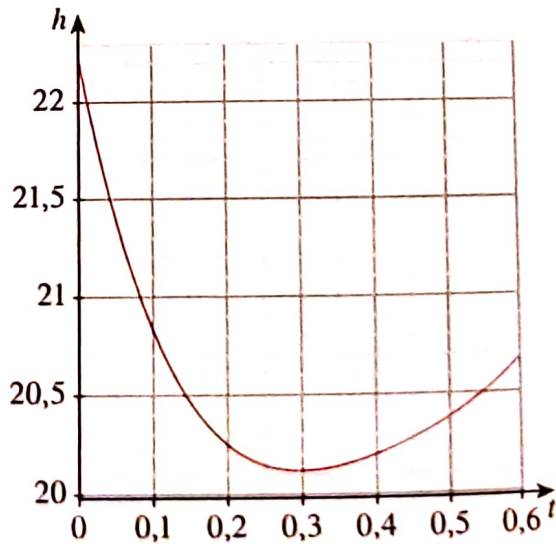


Travaux dirigés MTH1101 - Calcul I
TD n°9
Nathanaël Perrin

Pour le vendredi 26 novembre

1. Soit $f(x, y) = x^3 - 12x + y^3 - 27y$. Quelle est la direction donnée par la méthode du gradient à partir du point $(2, 2)$. Parmi les points suivants, lequel sera rencontré ?
 - $(2, 3)$
 - $(2, -3)$
 - $(3, 2)$
 - $(3, 3)$
2. On applique la méthode du gradient afin de minimiser la fonction à 3 variables $f(x, y, z)$ à partir du point $\vec{x}_0 = (2, 2, 1)$. Le gradient donne $\nabla f(2, 2, 1) = 3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ en ce point. On donne le graphe de $h(t) = f(2 - 3t, 2 - 3t, 1 + t)$.



- (a) Estimer la valeur de $f(\vec{x}_0)$
 - (b) Quelles sont les coordonnées du prochain point \vec{x}_1 produit par la méthode du gradient ?
 - (c) Quelle est la dérivée de f dans la direction $\vec{u} = -3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ au point $(2, 2, 1)$?
 - (d) Estimer $f(\vec{x}_1)$
 - (e) Que vaut $f_{\vec{u}}(\vec{x}_1)$?
3. Trouver le premier point produit par la méthode du gradient à partir du point donné : $f(x, y) = x^2(3 + x^2) + y^2$ au point $(x_0, y_0) = (1, 1)$.
 4. Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$
 - (a) Dessiner la fonction $f(x, y)$ (quelques courbes de niveau) et nommer cette surface
 - (b) Trouver les points critiques de f et leur nature.

- (c) Est-ce que le résultat trouvé à la question précédente est un extremum de f sujet à $x^2 + y^2 \leq 1$. Sinon trouver la valeur minimale de f sujet à cette contrainte.
5. Trouver les coordonnées de $P_1 = (x, y)$ appartenant à la droite d'équation $y = x + 2$ qui est le plus proche de $P_0 = (1, 5)$
6. Deux générateurs utilisent du gaz naturel pour produire de l'électricité. L'énergie produite est de $2 \ln(1 + x)$ pour le générateur 1 (noté G1), et de $4 \ln(1 + y)$ pour le générateur 2 (noté G2). (x, y) représente le gaz brûlé par G1 et G2. Le volume total de gaz disponible est de 19.
- (a) Modéliser le problème pour déterminer (x, y) qui maximise l'énergie totale comme un problème d'optimisation avec contraintes et le résoudre.
- (b) On a un changement dans l'offre du gaz. On a un volume dorénavant de 19.5. Estimer l'augmentation de la quantité d'énergie produite par les générateurs.