MTH8207 – Mathématiques des éléments finis

Serge Prudhomme

Professeur
Département de mathématiques
Polytechnique Montréal

Cours 8

Sommaire du cours #8

Méthodes EF mixtes :

- Problèmes avec contraintes
- Problème de Stokes

Problème de Neumann pur

Trouver $u = u(x)$ telle que :

$$\boxed{\begin{aligned} -\nabla \cdot (\varepsilon \nabla u) &= f(x), \qquad \forall x \in \Omega \\ n \cdot (\varepsilon \nabla u) &= g(x), \qquad \forall x \in \partial\Omega \end{aligned}}$$

Formulation faible : Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\boxed{\underbrace{\int_\Omega \varepsilon \nabla u \cdot \nabla v \, dx}_{B(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega fv \, dx + \int_{\partial\Omega} gv \, ds}_{F(v)}, \qquad \forall v \in H^1(\Omega)}$$

Remarque : Soit $v = 1 \in H^1(\Omega)$, alors $B(u,1) = F(1) = 0$ impliquent que

$$F(1) = \int_\Omega f \, dx + \int_{\partial\Omega} g \, ds = 0$$

Il faut que f et g satisfassent la relation de compatibilité ci-dessus.

Problème de Neumann pur

D'autre part, la solution du problème n'est pas unique !
Si u est une solution, alors $u + c$, où c = constante, est aussi une solution.

En clair, on ne peut pas montrer que B soit coercive sur $H^1(\Omega)$, c'est-à-dire que l'on ne peut pas trouver une constante $\alpha >$ telle que :

$$B(u,u) = \int_\Omega \varepsilon \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \int_\Omega \varepsilon |\nabla u|^2 \, dx \geq \alpha \|u\|_{H^1}^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

Par exemple, si $u = c$,

$$B(c,c) = 0, \quad \text{mais} \quad \|c\|_{H^1}^2 = \int_\Omega c^2 + |\nabla c|^2 dx = c^2|\Omega| \neq 0$$

Cela implique que la matrice de rigidité ne serait pas inversible si l'on considérait le problème EF associé.

Problème de Neumann pur

Exemple d'un problème d'élasticité linéaire en traction pure :

On dit alors qu'il faut fixer les "mouvements de corps rigide".

Remèdes :

- Soit un point $x_0 \in \Omega$, on peut fixer $u(x_0) = 0$. Cependant, si $u \in H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, avec $d \geq 2$, alors $u(x_0)$ n'est pas nécessairement bien définie.
- On considère pour l'espace vectoriel des solutions seulement le sous-ensemble de $H^1(\Omega)$ des fonctions à moyenne nulle :

$$V = \left\{ u \in H^1(\Omega);\ \int_\Omega u\,dx = 0 \right\}$$

Seulement, il est difficile de construire des fonctions de base satisfaisant la contrainte additionnelle $\int_\Omega \phi_i\,dx = 0$.

Méthode de Lagrange

On réécrit le problème comme un problème de minimisation :

$$\boxed{u = \operatorname*{argmin}_{v \in V} J(v) = \operatorname*{argmin}_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ \int_\Omega v\,dx = 0}} J(v)} \qquad \text{où} \quad J(v) = \frac{1}{2}B(v,v) - F(v)$$

Méthode de Lagrange : On introduit le Lagrangien

$$\mathcal{L}(u,\lambda) = J(u) - \lambda\Big(\int_\Omega u\,dx\Big)$$

où la solution $u \in H^1(\Omega)$ et le multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$.
Puis on cherche le point stationnaire $(u,\lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ de $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}'_u(u,\lambda) = \lim_{\theta \to 0} \frac{\mathcal{L}(u+\theta v,\lambda) - \mathcal{L}(u,\lambda)}{\theta} = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

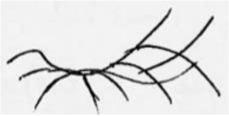
$$\mathcal{L}'_\lambda(u,\lambda) = \lim_{\theta \to 0} \frac{\mathcal{L}(u,\lambda+\theta\mu) - \mathcal{L}(u,\lambda)}{\theta} = 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Méthode de Lagrange

Le calcul des dérivées amène au problème suivant :
Trouver $(u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ tels que :

$$\boxed{\begin{aligned} B(u,v) - \lambda \int_\Omega v\,dx &= F(v), \qquad && \forall v \in H^1(\Omega) \\ -\mu \int_\Omega u\,dx &= 0, && \forall \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

C'est la formulation mixte. La solution est appelée un point selle du Lagrangien $\mathcal{L}$ au sens où u correspond à un minimum de $\mathcal{L}(v, \mu)$ pour chaque μ et λ correspond à un maximum de $\mathcal{L}(v, \mu)$ pour chaque v.



Approximation par éléments finis

Soit $V^h = \text{vect}\{\phi_i\} \subset H^1(\Omega)$ et $\dim V^h = N$.

Le problème EF consiste à trouver $(u_h, \lambda_h) \in V^h \times \mathbb{R}$ tels que :

$$\boxed{\begin{aligned} B(u_h, v_h) - \lambda_h \int_\Omega v_h \, dx &= F(v_h), \qquad && \forall v \in V^h \\ -\mu \int_\Omega u_h \, dx &= 0, && \forall \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

On a :

$$\sum_{j=1}^N u_j \underbrace{B(\phi_j, \phi_i)}_{K_{ij}} + \lambda_h \underbrace{\left[- \int_\Omega \phi_i \, dx \right]}_{M_i} = \underbrace{F(\phi_i)}_{F_i}, \qquad i = 1, \ldots, N$$

$$\sum_{j=1}^N u_j \underbrace{\left[- \int_\Omega \phi_j \, dx \right]}_{M_j} = 0,$$

Approximation par éléments finis

Sous forme matricielle, on obtient le système à résoudre :

$$\begin{bmatrix} K & M \\ M^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \lambda_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} K &= \text{matrice } N \times N \\ M &= \text{matrice } N \times 1 \\ F &= \text{vecteur de taille } N \\ U &= (u_1, u_2, \ldots, u_N) = \text{vecteur des } N \text{ degrés de liberté} \\ \lambda_h &= \text{multiplicateur de Lagrange} \end{aligned}$$

Remarque : Le multiplicateur de Lagrange est dénoté λ_h, et non simplement λ, car il dépend implicitement de la solution u_h, et donc du maillage choisi pour calculer u_h.

Formulation mixte

La formulation mixte est-elle bien posée?

Soient $W = H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$, $X = (u, \lambda) \in W$, $Y = (v, \mu) \in W$. On pose :

$$A(X, Y) = B(u, v) - \lambda \int_0^1 v\, dx - \mu \int_0^1 u\, dx$$
$$L(Y) = F(v)$$

Le problème peut s'écrire :

$$\boxed{\text{Trouver } X \in W \text{ tel que} \quad A(X, Y) = L(Y), \quad \forall Y \in W}$$

A n'est pas coercive :

$$\|X\|_W = \sqrt{\|u\|_{H^1}^2 + |\lambda|^2}$$

Si on prend $X = (u, 0)$, alors $\|X\|_W = \|u\|_{H^1}$ et $A(X, X) = B(u, u)$.
Mais on a vu que B n'est pas coercive sur $H^1(\Omega)$.

Théorème de Lax-Milgram généralisé

- W = espace de Banach
- A et L sont continues
- A satisfait la condition inf-sup :

$$\boxed{\inf_{X \in W} \sup_{Y \in W} \frac{|A(X, Y)|}{\|X\|_W \|Y\|_W} \geq \alpha > 0}$$

$$\left[\text{ou } \ \forall X \in W, \quad \sup_{Y \in W} \frac{|A(X, Y)|}{\|Y\|_W} \geq \alpha \|X\|_W\right]$$

- A satisfait la condition : si $A(X, Y) = 0, \forall X \in W$ alors $Y = 0$.

Alors le problème $A(X, Y) = L(Y), \forall Y \in W$, est bien posé, i.e. il admet une solution unique $X \in W$.

Les 2 denières conditions remplacent la propriété de coercivité de A.

Equations de Stokes

Trouver $u = u(x)$ et $p = p(x)$ telles que :

$$\boxed{\begin{aligned} -\mu\Delta u + \nabla p &= f(x), \qquad &\forall x \in \Omega \\ \nabla \cdot u &= 0, \qquad &\forall x \in \Omega \\ u &= 0, \qquad &\forall x \in \partial\Omega \end{aligned}}$$

Formulation faible :

$$\int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega v \cdot \nabla p \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx$$

En utilisant $\nabla \cdot (pv) = p\nabla \cdot v + v \cdot \nabla p$ et $v \in V = [H_0^1(\Omega)]^d$, on obtient :

$$\int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega p \nabla \cdot v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx, \quad \forall v \in V$$

De plus :

$$\int_\Omega q \nabla \cdot u \, dx = 0, \quad \forall q \in M = L^2(\Omega)/\mathbb{R} = \left\{ q \in L^2(\Omega); \int_\Omega q \, dx = 0 \right\}$$

Formulation faible

On introduit :

$$a(u,v) = \int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

$$b(v,p) = -\int_\Omega p \nabla \cdot v \, dx$$

$$F(v) = \int_\Omega f \cdot v \, dx$$

Trouver $(u,p) \in V \times M$ telles que :

$$\boxed{\begin{aligned} a(u,v) + b(v,p) &= F(v), \qquad & \forall v \in V \\ b(u,q) &= 0, \qquad & \forall q \in M \end{aligned}}$$

Remarque : En fait, le problème de Stokes peut s'obtenir comme un problème de minimisation de $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - F(v)$ sur l'espace vectoriel $H = \{v \in V;\ \nabla \cdot v = 0,\ \ \forall x \in \Omega\}$. Dans ce cas, $\mathcal{L}(u,p) = J(u) - \int_\Omega p \nabla \cdot u \, dx$

Discrétisation

Trouver $(u_h, p_h) \in V^h \times M^h$ telles que :

$$\boxed{\begin{aligned} a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) &= F(v_h), & \forall v_h \in V^h \\ b(u_h, q_h) &= 0, & \forall q_h \in M^h \end{aligned}}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Méthode itérative de Uzawa : (A est symétrique définie positive)

$$\underbrace{B^T A^{-1} A U}_{B^T U = 0} + \underbrace{B^T A^{-1} B}_{S = \text{Complément de Schur}} P = B^T A^{-1} F$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ B^T A^{-1} F \end{bmatrix}$$

Problème bien posé

Théorème :

- $a(\cdot,\cdot)$ est continue et coercive sur V.
- $F(\cdot)$ est continue sur V.
- Et si
$$\forall q \in M, \qquad \sup_{v \in V} \frac{|b(v,q)|}{\|v\|_V} \geq \alpha \|q\|_M,$$
alors les conditions du théorème de Lax-Milgram généralisé sont vérifiées et le problème de Stokes est bien posé.

Une difficulté est de vérifier la condition sur $b(\cdot,\cdot)$ dans le cas discret, même si $V^h \subset V$ et $M^h \subset M$:

$$\boxed{\forall q_h \in M^h, \qquad \sup_{v_h \in V^h} \frac{|b(v_h,q_h)|}{\|v_h\|_V} \geq \alpha \|q_h\|_M}$$

On ne peut pas choisir n'importe quels espaces finis pour V^h et M^h. Il faut considérer des paires d'éléments acceptables pour la vitesse et la pression.

Résumé du cours

- La formulation mixte d'un problème est une formulation dont la solution est "un point selle" dans l'espace des solutions.
- La formulation mixte se rencontre pour le traitement de problèmes avec contraintes.
- Il faut en général utiliser le théorème généralisé de Lax-Milgram pour montrer que le problème est bien posé.
- La condition inf-sup pour le problème EF impose des contraintes supplémentaires sur le choix des EF à utiliser pour les différentes variables.