Département de Mathématiques et de Génie Industriel
École Polytechnique de Montréal

MATHÉMATIQUES DES ÉLÉMENTS FINIS
MTH8207

Automne 2024

Devoir 3	100 points
Distribué le 2024/10/21	À rendre le 2024/11/03

Question 1 (Assemblage) :

On considère une corde de longueur ℓ, dont la déflexion u est décrite par l'équation de la caténaire linéarisée,

$$-Tu'' = f(x), \quad \forall x \in \Omega = (0, \ell).$$

La tension T de la corde est constante sur Ω et $f = f(x)$ dénote le chargement appliqué à la corde. Celle-ci est de plus soumise aux conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, \\ Tu'(\ell) &= t, \end{aligned}$$

où $t \in \mathbb{R}$ est donné.

a) Écrire la formulation faible du problème (donner simplement le résultat final).
b) Écrire le problème éléments finis correspondant que l'on obtient par la méthode de Galerkine.
c) Calculer la matrice de rigidité et le vecteur chargement lorsque $f(x) = -\rho g$, avec ρ choisie constante, pour les deux cas suivants:
   - deux éléments de Lagrange linéaires, avec pour matrice de connectivité :

$$\texttt{connect\_dofs(e,i)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix};$$

   - deux éléments hiérarchiques quadratiques, avec pour matrice de connectivité :

$$\texttt{connect\_dofs(e,i)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

   Dans les deux cas, on suppose que les tailles des deux éléments sont données par $h_1 = h$ et $h_2 = \ell - h$, respectivement, avec $h < \ell$. Calculer d'abord les matrices de rigidité et vecteurs chargement pour chacun des deux éléments (en passant par l'élément de référence), assembler ensuite la matrice globale et le vecteur global, et modifier ceux-ci pour prendre en compte la condition de Dirichlet. On suppose ici que les intégrales sont calculées exactement (sans utiliser des quadratures de Gauss).
d) Résoudre le problème éléments finis dans chacun des cas (en fonction de T, ρg, t, ℓ, et h).
e) Quelle serait la taille optimale des deux éléments dans les deux cas? Expliquer.

Question 2 (Matlab) :

L'objectif de cet exercice est de résoudre le problème de l'exercice 1 en utilisant le code Matlab 1D disponible sur le site du cours. On suppose que $\ell = 1$, $t = 5$, $T = 10$, et $\rho g = 10$.

a) On considère dans le premier cas que $f(x) = -\rho g$. Trouver la solution continue linéaire par morceaux avec 10 éléments et la solution continue quadratique par morceaux avec 5 éléments hiérarchiques. S'assurer que le code est bien sans erreur en se servant par exemple des résultats de l'exercice 1 ou en comparant les résultats du code avec ceux que l'on obtiendrait avec Comsol Multiphysics.
Pour les deux cas, donner les graphes de la solution u_h et de la dérivée première u'_h et calculer la norme L^2 et la norme H^1 de l'erreur $e = u - u_h$ (remarquer que l'on peut obtenir la solution $u(x)$ exacte pour ce problème).

b) Répéter l'exercice 2.a) dans le cas où le chargement se compose maintenant du poids de la corde et d'une force agissant au point $x_0 = 0.4$, c'est-à-dire $f(x) = -\rho g - f_0\delta(x - x_0)$, où $f_0 = 20$.

c) Répéter l'exercice 2.a) dans le cas où le chargement se compose maintenant du poids de la corde et d'une charge distribuée agissant entre les points $x_1 = 0.2$ et $x_2 = 0.6$, telle que $f(x) = -\rho g - f_0 x^2[H(x - x_1) - H(x - x_2)]$, où $f_0 = 500$ et $H(x)$ est la fonction de Heaviside :

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

d) Commenter les résultats obtenus.

SOLUTIONS

<u>EXERCICE 1 (50 POINTS) :</u>

a) Soit $V = \{v \in H^1(0,\ell);\ v(0) = 0\}$. La formulation faible est donnée par :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ telle que:} \quad \int_0^\ell T u' v' dx = \int_0^\ell f v dx + t v(\ell), \quad \forall v \in V$$

b) Soit V^h un sous-espace éléments finis de V, le problème obtenu par la méthode de Galerkin s'écrit :

$$\text{Trouver } u_h \in V^h \text{ telle que:} \quad \int_0^\ell T u_h' v_h' dx = \int_0^\ell f v_h dx + t v_h(\ell), \quad \forall v_h \in V^h$$

c) <u>Éléments linéaires de Lagrange</u> :
Les matrices et vecteurs élémentaires sont donnés par :

$$K^1 = T \begin{bmatrix} 1/h & -1/h \\ -1/h & 1/h \end{bmatrix} \qquad F^1 = -\rho g \begin{bmatrix} h/2 \\ h/2 \end{bmatrix}$$
$$K^2 = T \begin{bmatrix} 1/(\ell-h) & -1/(\ell-h) \\ -1/(\ell-h) & 1/(\ell-h) \end{bmatrix} \quad F^2 = -\rho g \begin{bmatrix} (\ell-h)/2 \\ (\ell-h)/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

pour les éléments $[0,h]$ et $[h, \ell-h]$, respectivement.
Dans le cas où la matrice de connectivité est donnée par :

$$\texttt{connect\_dofs(e,i)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

la matrice globale et le vecteur global sont, avant application des conditions aux limites :

$$K = \begin{bmatrix} T/h & -T/h & 0 \\ -T/h & T\ell/(h(\ell-h)) & -T/(\ell-h) \\ 0 & -T/(\ell-h) & T/(\ell-h) \end{bmatrix}$$
$$F = \begin{bmatrix} -\rho g h/2 \\ -\rho g \ell/2 \\ -\rho g(\ell-h)/2 + t \end{bmatrix}$$

Après modification pour tenir compte des conditions de Dirichlet, on obtient:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & T\ell/(h(\ell-h)) & -T/(\ell-h) \\ 0 & -T/(\ell-h) & T/(\ell-h) \end{bmatrix}$$
$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho g \ell/2 \\ -\rho g(\ell-h)/2 + t \end{bmatrix}$$

<u>Éléments quadratiques hiérarchiques</u> :

Les matrices et vecteurs élémentaires sont donnés par :

$$K^1 = T \begin{bmatrix} 1/h & -1/h & 0 \\ -1/h & 1/h & 0 \\ 0 & 0 & 16/(3h) \end{bmatrix} \qquad F^1 = -\rho g \begin{bmatrix} h/2 \\ h/2 \\ 2h/3 \end{bmatrix}$$

$$K^2 = T \begin{bmatrix} 1/(\ell-h) & -1/(\ell-h) & 0 \\ -1/(\ell-h) & 1/(\ell-h) & 0 \\ 0 & 0 & 16/(3(\ell-h)) \end{bmatrix} \quad F^2 = -\rho g \begin{bmatrix} (\ell-h)/2 \\ (\ell-h)/2 \\ 2(\ell-h)/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$$

pour les éléments $[0, h]$ et $[h, \ell - h]$, respectivement.
Dans le cas où la matrice de connectivité est donnée par :

$$\texttt{connect\_dofs(e,i)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix},$$

la matrice globale et le vecteur global sont, avant application des conditions aux limites :

$$K = \begin{bmatrix} T/h & -T/h & 0 & 0 & 0 \\ -T/h & T\ell/(h(\ell-h)) & -T/(\ell-h) & 0 & 0 \\ 0 & -T/(\ell-h) & T/(\ell-h) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16T/(3h) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16T/(3(\ell-h)) \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -\rho g h/2 \\ -\rho g \ell/2 \\ -\rho g(\ell-h)/2 + t \\ -2\rho g h/3 \\ -2\rho g(\ell-h)/3 \end{bmatrix}$$

Après modification pour tenir compte des conditions de Dirichlet, on obtient :

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T\ell/(h(\ell-h)) & -T/(\ell-h) & 0 & 0 \\ 0 & -T/(\ell-h) & T/(\ell-h) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16T/(3h) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16T/(3(\ell-h)) \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho g \ell/2 \\ -\rho g(\ell-h)/2 + t \\ -2\rho g h/3 \\ -2\rho g(\ell-h)/3 \end{bmatrix}$$

d) La seule difficulté pour trouver la solution des deux systèmes est de résoudre le système 2×2 :

$$\begin{bmatrix} T\ell/(h(\ell-h)) & -T/(\ell-h) \\ -T/(\ell-h) & T/(\ell-h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho g \ell/2 \\ -\rho g(\ell-h)/2 + t \end{bmatrix}$$

Le déterminant de la matrice vaut :

$$\Delta = T^2 \frac{\ell - h}{h(\ell-h)^2} = \frac{T^2}{h(\ell-h)}$$

et donc :

$$u_2 = \frac{1}{\Delta}\frac{T}{\ell-h}\bigg(-\rho g\frac{\ell}{2} - \rho g\frac{\ell-h}{2} + t\bigg) = \frac{h}{T}\bigg(-\rho g\frac{2\ell-h}{2} + t\bigg) = -\frac{\rho g}{T}\frac{h(2\ell-h)}{2} + \frac{t}{T}h$$
$$u_3 = \frac{1}{\Delta}\frac{T}{\ell-h}\bigg(-\rho g\frac{\ell(\ell-h)}{2h} + t\frac{\ell}{h} - \rho g\frac{\ell}{2}\bigg) = \frac{h}{T}\bigg(-\rho g\frac{\ell^2}{2h} + t\frac{\ell}{h}\bigg) = -\frac{\rho g}{T}\frac{\ell^2}{2} + \frac{t}{T}\ell$$

Les autres degrés de liberté sont :

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_4 &= -\frac{3h}{16T}\frac{2\rho g h}{3} = -\frac{\rho g}{T}\frac{h^2}{8} \\ u_5 &= -\frac{3(\ell-h)}{16T}\frac{2\rho g(\ell-h)}{3} = -\frac{\rho g}{T}\frac{(\ell-h)^2}{8} \end{aligned}$$

Les solutions éléments finis linéaire $u_{h,1}$ et quadratique $u_{h,2}$ sont alors données, respectivement, par :

$$\begin{aligned} u_{h,1}(x) &= \bigg(-\frac{\rho g}{T}\frac{h(2\ell-h)}{2} + \frac{t}{T}h\bigg)\phi_2(x) + \bigg(-\frac{\rho g}{T}\frac{\ell^2}{2} + \frac{t}{T}\ell\bigg)\phi_3(x) \\ u_{h,2}(x) &= u_{h,1}(x) + \bigg(-\frac{\rho g}{T}\frac{h^2}{8}\bigg)\phi_4(x) + \bigg(-\frac{\rho g}{T}\frac{(\ell-h)^2}{8}\bigg)\phi_5(x) \end{aligned}$$

e) La solution exacte du problème vaut :

$$u(x) = \frac{\rho g}{2T}x^2 + \bigg(\frac{t}{T} - \frac{\rho g\ell}{T}\bigg)x = -\frac{\rho g}{T}\frac{x(2\ell-x)}{2} + \frac{t}{T}x$$

On remarque que la solution linéaire par morceaux est en fait l'interpolant de degré un de la solution exacte du problème (ce résultat n'est valable que dans le cas de l'équation de Poisson en dimension un). Il s'ensuit que l'erreur est nulle aux extrémités des éléments.
La taille optimale dépend en fait de l'objectif que l'on se donne. Puisque l'objectif n'est pas défini ici, la question est mal posée.
Cependant, dans le cas de la solution quadratique par morceaux, on remarque qu'elle coincide avec la solution exacte du problème, elle-même une fonction polynomiale de degré deux. L'erreur est donc nulle en tout point du domaine quelque soit la taille h choisie. Un seul élément aurait donc suffi ici pour obtenir la solution exacte.

Exercice 2 (50 points) :

a) Avec les valeurs des paramètres proposées, i.e. $\ell = 1$, $t = 5$, $T = 10$, et $\rho g = 10$, la solution exacte du problème est :

$$u(x) = -\frac{x(2-x)}{2} + \frac{x}{2} = -\frac{x(1-x)}{2}, \quad x \in [0,1]$$

Avec 10 éléments linéaires, on trouve :

$$\begin{aligned} \|e\|_{L^2} &= 9.12871 \times 10^{-4} \\ \|e\|_{H^1} &= 2.88819 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

Avec 5 éléments quadratiques, on a :

$$\|e\|_{L^2} = \|e\|_{H^1} = 0$$

puisque l'erreur est nulle en tout point $x \in [0,1]$.

b) Comme l'équation différentielle et les conditions aux limites sont linéaires, on peut appliquer le principe de superposition. Dans ce cas, la solution u du problème est la combinaison de u_1 et u_2, i.e. $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$, où u_1 et u_2 satisfont :

$$\begin{array}{lll} -Tu_1'' = -\rho g, & \forall x \in (0,1) & \text{et } u_1(0) = 0,\ Tu_1'(\ell) = t \\ -Tu_2'' = -f_0\delta(x - x_0), & \forall x \in (0,1) & \text{et } u_2(0) = 0,\ Tu_2'(\ell) = 0 \end{array}$$

La solution u_1 vérifie le même problème qu'à la question 2a, soit $u_1(x) = -x(1-x)/2$. La solution u_2 est donnée par, avec $x_0 = 0.4$ et $f_0 = 20$:

$$u_2(x) = \begin{cases} -2x, & x \in [0, 0.4] \\ -4/5, & x \in [0.4, 1] \end{cases}$$

Il s'ensuit que :

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) = -\frac{x(1-x)}{2} - \begin{cases} 2x, & x \in [0, 0.4] \\ 4/5, & x \in [0.4, 1] \end{cases}$$

On note que la valeur minimale de u est atteinte à $x = 0.5$ et vaut $u(0.5) = -1/8 - 4/5 = -0.925$. Si on utilise des éléments linéaires, et si il y a un point du maillage au point $x_0 = 0.4$, alors la contribution u_2 sera représentée exactement par la solution u_h. Par conséquent, la seule erreur possible est dans l'approximation de la solution u_1, laquelle correspond à la solution u de l'exercice 2a. Les erreurs dans la norme L^2 et dans la norme H^1 sont donc les mêmes que ci-dessus. Avec 10 éléments linéaires, on trouve donc :

$$\begin{aligned} \|e\|_{L^2} &= 9.12871 \times 10^{-4} \\ \|e\|_{H^1} &= 2.88819 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

Avec 5 éléments quadratiques, on a :

$$\|e\|_{L^2} = \|e\|_{H^1} = 0$$

puisque la solution quadratique coincide en tout point $x \in [0, 1]$ à la solution exacte du problème.

c) On utilise le principe de superposition comme dans la question 2b pour trouver la contribution u_2 du problème. Celle-ci satisfait le problème :

$$-Tu_2'' = -f_0 x^2[H(x - x_1) - H(x - x_2)], \ \forall x \in (0,1) \quad \text{et } u_2(0) = 0,\ Tu_2'(\ell) = 0$$

Autrement dit, le problème s'écrit :

$$-Tu_2'' = \begin{cases} 0, & \forall x \in (0, x_1) \\ -f_0 x^2, & \forall x \in (x_1, x_2) \\ 0, & \forall x \in (x_2, \ell) \end{cases}$$

avec les conditions aux limites $u_2(0) = 0$ et $Tu_2'(\ell) = 0$, et les conditions d'interface :

$$\begin{array}{ll} u_2(x_1^-) = u_2(x_1^+) & Tu_2'(x_1^-) - Tu_2'(x_1^+) = 0 \\ u_2(x_2^-) = u_2(x_2^+) & Tu_2'(x_2^-) - Tu_2'(x_2^+) = 0 \end{array}$$

On a donc, en utilisant les conditions aux limites :

$$u_2(x) = \begin{cases} Ax, & x \in (0, x_1) \\ f_0 x^4/(12T) + Bx + C, & x \in (x_1, x_2) \\ D, & x \in (x_2, \ell) \end{cases}$$

Les conditions d'interfaces à x_1 et x_2 donnent :

$$\begin{aligned}
&Ax_1 - Bx_1 - C = f_0 x_1^4/(12T) \\
&A - B = f_0 x_1^3/(3T) \\
&Bx_2 + C - D = -f_0 x_2^4/(12T) \\
&B = -f_0 x_2^3/(3T)
\end{aligned}$$

soit:

$$\begin{aligned}
&A = \frac{f_0}{3T}\left(x_1^3 - x_2^3\right) \\
&B = -\frac{f_0}{3T}x_2^3 \\
&C = Ax_1 - Bx_1 - \frac{f_0}{12T}x_1^4 = \frac{f_0}{3T}x_1^4 - \frac{f_0}{12T}x_1^4 = \frac{f_0}{4T}x_1^4 \\
&D = Bx_2 + C + \frac{f_0}{12T}x_2^4 = \frac{f_0}{4T}\left(x_1^4 - x_2^4\right)
\end{aligned}$$

Avec $f_0/T = 50$, $x_1 = 0.2 = 1/5$, et $x_2 = 0.6 = 3/5$, on obtient les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
&A = \frac{50}{3}\left(\frac{1}{125} - \frac{27}{125}\right) = -\frac{52}{15} \\
&B = -\frac{50}{3} \times \frac{27}{125} = -\frac{18}{5} \\
&C = \frac{50}{4} \times \frac{1}{625} = \frac{1}{50} \\
&D = \frac{50}{4}\left(\frac{1}{625} - \frac{81}{625}\right) = -\frac{8}{5}
\end{aligned}$$

La solution du problème est alors donnée par :

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) = -\frac{x(1-x)}{2} - \begin{cases} \dfrac{52}{15}x, & 0 \le x \le \dfrac{1}{5} \\ -\dfrac{25}{6}x^4 + \dfrac{18}{5}x - \dfrac{1}{50}, & \dfrac{1}{5} \le x \le \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{8}{5}, & \dfrac{3}{5} \le x \le 1 \end{cases}$$

Finalement, le calcul des normes donne :

Cas linéaire	Cas quadratique
$\|e\|_{L^2} = 6.19 \times 10^{-3}$	$\|e\|_{L^2} = 1.20 \times 10^{-3}$
$\|e\|_{H^1} = 1.96 \times 10^{-1}$	$\|e\|_{H^1} = 3.89 \times 10^{-2}$

d) On peut faire plusieurs remarques:

- Les normes obtenues en a) et b) sont les mêmes. En effet, la contribution de la force au point x_0 à la solution est une fonction linéaire par morceaux, laquelle est calculée exactement par les éléments finis de degrés 1 et 2.
- Les solutions en a) en b) sont des fonctions quadratiques par morceaux et sont donc obtenues exactement dans le cas des éléments finis quadratiques. Il s'ensuit que les normes de l'erreur sont nécessairement nulles dans ces deux cas.

- On observe pour l'exercice c) que les erreurs dans le cas quadratique sont plus petites que celles obtenues dans le cas linéaire, même si le nombre total de degrés de liberté est de 10 dans les deux cas. Il est donc, en général, préférable d'utiliser des éléments finis de plus hauts degrés, lesquels donnent des résultats plus précis pour un coût de calcul comparable, à condition que la solution exacte soit suffisamment régulière.
- Les normes H^1 de l'erreur sont nécessairement plus larges que les normes L^2, par définition des deux normes.

```
function [norm_L2,norm_H1]=norms(nEls,nodes,connect,xiQ,wQ,pDeg,pType,elDof,dFreedom,u)
%Calculate the L2 and H1 norms of the error e = u_exact - uh

norm_L2=0;
norm_H1=0;

for ne=1:nEls
   x1=nodes(connect(ne,1));
   x2=nodes(connect(ne,2));
   h=x2-x1;
   jac=h/2;
   nQ=4;  %number of Gauss points
   for l=1:nQ
       xi=xiQ(l,nQ);
       wq=wQ(l,nQ);
       [N,dN]=shape(xi,ne,pDeg,pType);
       dN=dN/jac;
       % xq=h/2*xi+(x1+x2)/2;   %global coordinate of Gauss point xi
       xq=x1*N(1)+x2*N(2); %does not work for quadratic Lagrange FE
       % Finite element solution evaluated at Gauss point
       uh=0;
       duh=0;
       for i=1:elDof(ne)
            c=dFreedom(ne,i);
            uh=uh+N(i)*u(c);
            duh=duh+dN(i)*u(c);
       end
       % Exact solution evaluated at Gauss point
       u_exact=-xq*(1-xq)/2;
       du_exact=xq-0.5;
       % Part from Heaviside Contribution
       if xq<0.2
           u_exact=u_exact-52/15*xq;
           du_exact=du_exact-52/15;
       else
           if xq<0.6
               u_exact=u_exact+25*xq^4/6-18/5*xq+1/50;
               du_exact=du_exact+100*xq^3/6-18/5;
           else
               u_exact=u_exact-8/5;
           end
       end
       norm_L2 = norm_L2 + wq*(u_exact-uh)^2*jac;
       norm_H1 = norm_H1 + wq*(du_exact-duh)^2*jac;
   end
end
norm_H1=sqrt(norm_L2+norm_H1);
norm_L2=sqrt(norm_L2);
```