

# GLQ3401 : Troisième partie

## Cours 11 : Simulations géostatistiques



**POLYTECHNIQUE  
MONTRÉAL**

UNIVERSITÉ  
D'INGÉNIERIE

# Plan du cours

1. Introduction : contexte et problématique
  - Simulation vs krigeage
  - Fonction de transfert
2. Simulation conditionnelle et non-conditionnelle
3. Méthodes de simulations géostatistiques
  - i. Transformation graphique (cas non gaussien)
  - ii. Simulation Cholesky (LU)
  - iii. Simulation séquentielle gaussienne
  - iv. FFTMA
  - v. Les bandes tournantes
4. Simulation de teneurs de blocs
5. Recuit simulé
6. Post-conditionnement par krigeage simple

# Objectifs

- Identifier les problèmes types où les simulations s'appliquent;
- Expliquer les différences entre estimation et simulation;
- Expliquer les différences entre simulations non conditionnelles et conditionnelles;
- Décrire les principaux algorithmes de simulation : Choleski, SGS, FFTMA et bandes tournantes, leurs avantages et inconvénients;
- Utiliser et interpréter les résultats d'une simulation pour l'estimation des ressources;
- Expliquer les principales propriétés des simulations.

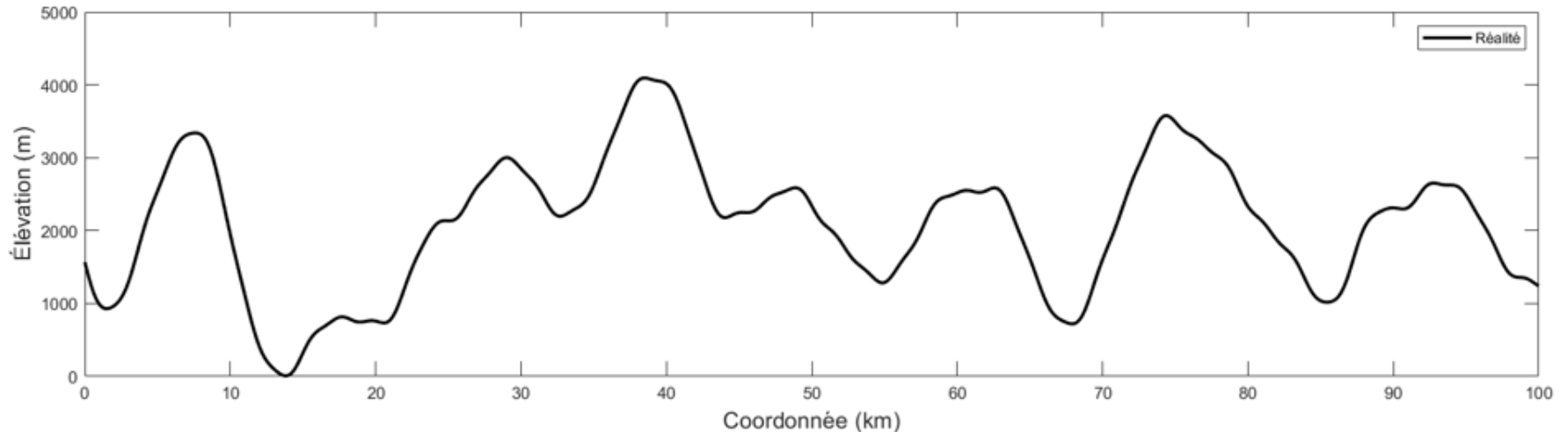
# 1. Introduction : contexte et problématique

## Mise en contexte : profil d'un fond marin

Vous déposez un câble de fibre optique sur le fond marin.  
Quelle longueur devrait avoir ce câble<sup>1</sup>?

Deux questions?

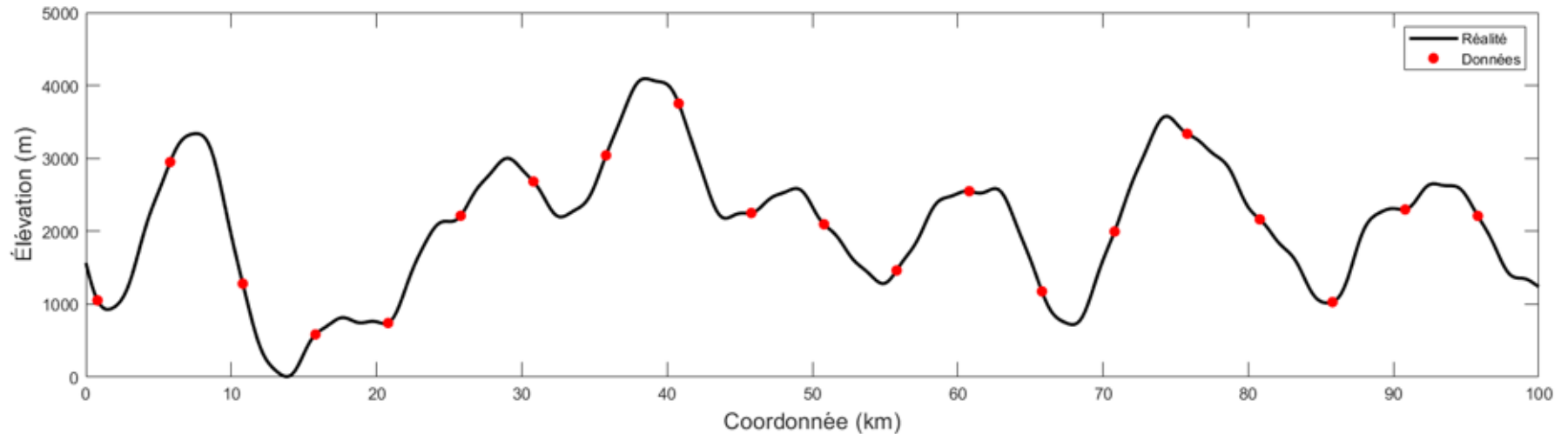
- 1) Quelle est la longueur totale du fond marin;
- 2) Quelle est la pente maximale du fond marin.



# 1. Introduction : contexte et problématique

## Mise en contexte : profil d'un fonds marin

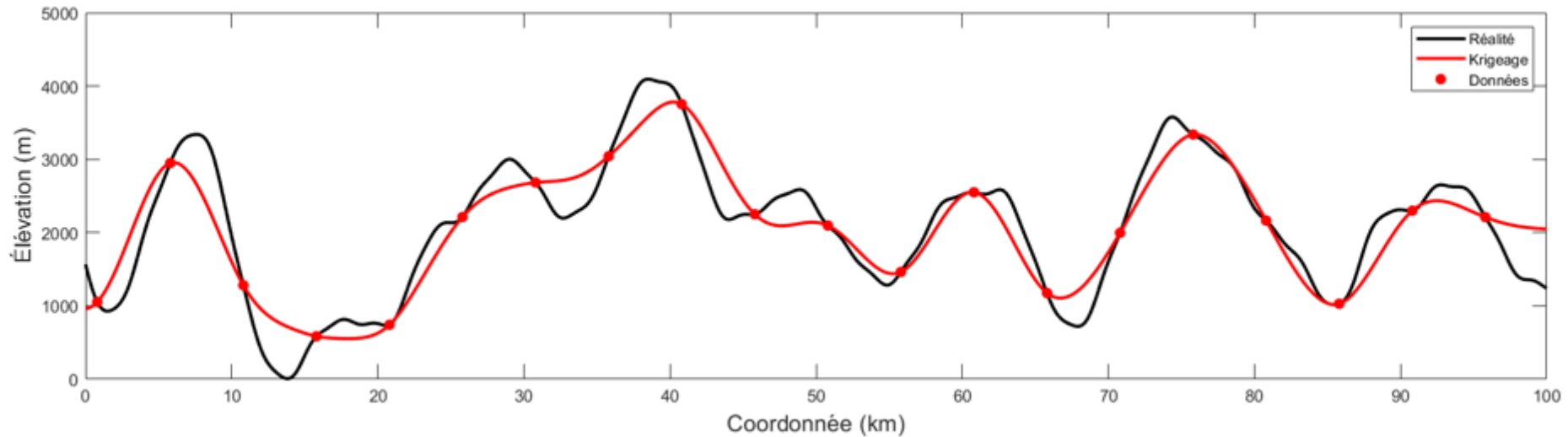
La profondeur exacte est connue uniquement aux points observations



# 1. Introduction : contexte et problématique

## Mise en contexte : profil d'un fonds marin

On effectue un krigeage

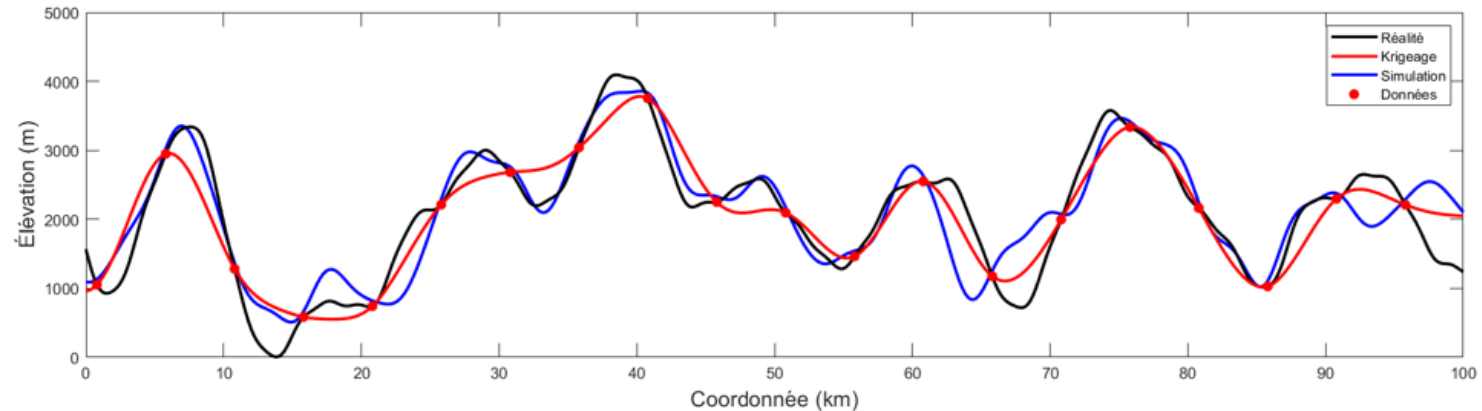
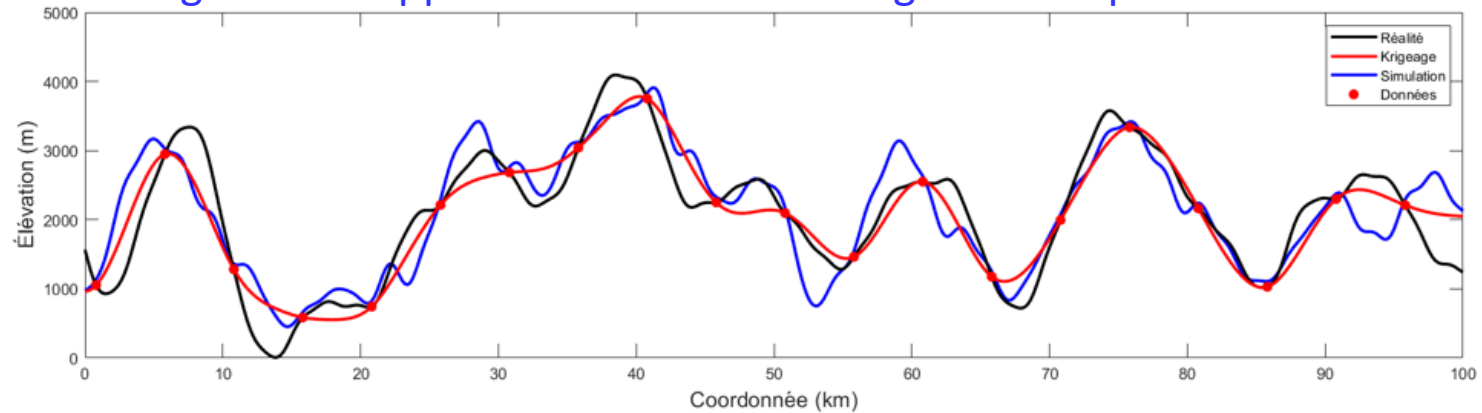


- 1) La longueur réelle est 105.6 km, le krigeage donne 102.6 km. On va manquer de câble !
- 2) La pente maximale réelle est de 43°, le krigeage donne 23°. Effet de lissage.

# 1. Introduction : contexte et problématique

## Mise en contexte : profil d'un fonds marin

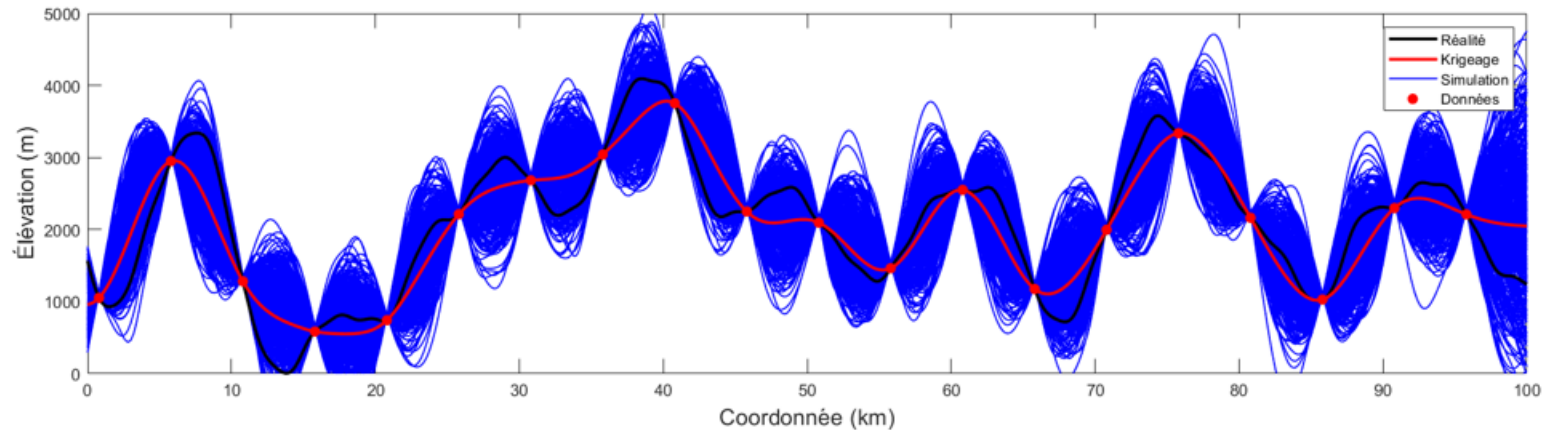
### Changement d'approche : les simulations géostatistiques conditionnelles



# 1. Introduction : contexte et problématique

## Mise en contexte : profil d'un fonds marin

### Changement d'approche : les simulations géostatistiques conditionnelles



Longueur moyenne des câbles :  $105.2\text{km} \pm 1.6\text{ km}$

Pente maximale moyenne des profils :  $41.2^\circ \pm 8.5^\circ$



# 1. Introduction : contexte et problématique

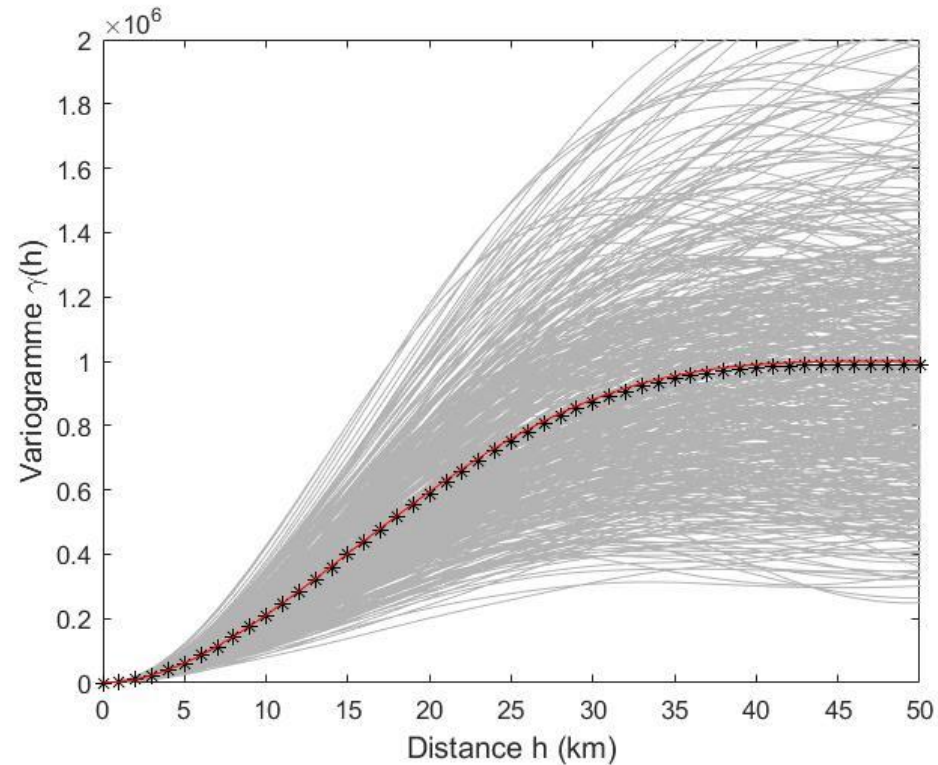
## Mise en contexte : profil d'un fonds marin

Changement d'approche : les simulations géostatistiques conditionnelles

**Rouge** : Modèle théorique

**Gris** : Simulations

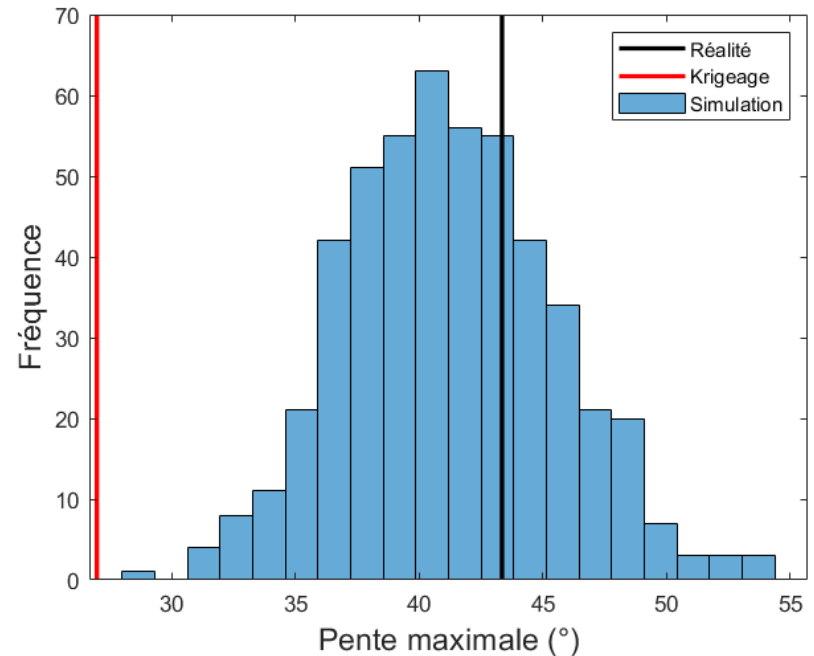
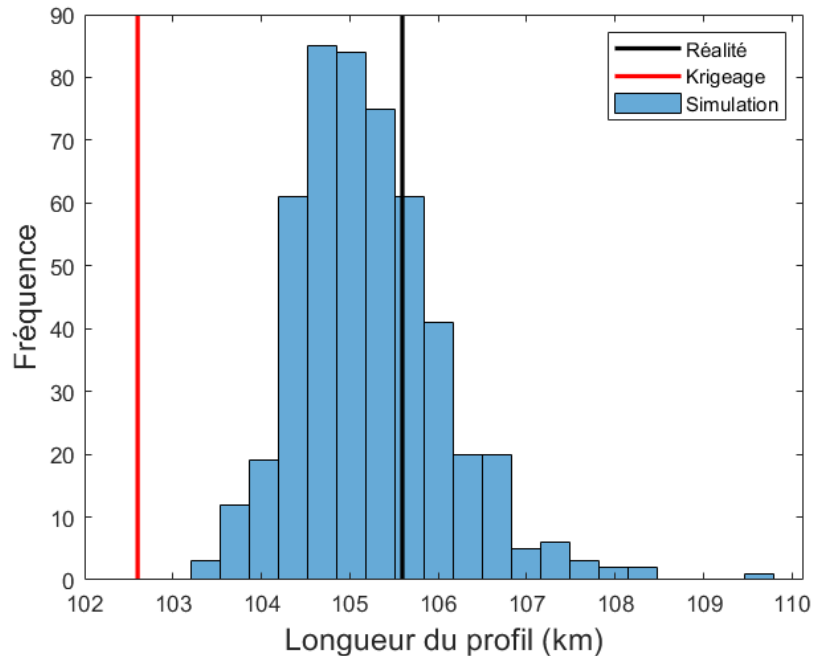
**Noir** : Moyenne des simulations



# 1. Introduction : contexte et problématique

## Mise en contexte : profil d'un fonds marin

### Comparaison des résultats



# 1. Introduction : contexte et problématique

## Mise en contexte : profil d'un fonds marin

Fonction de transfert : relation non linéaire entre la variable principale (p.ex. profil du fond marin) et l'estimation désirée (p. ex. la longueur du câble, la pente maximale)

Dès que la fonction de transfert recherchée n'est pas linéairement reliée à la variable principale, on peut avoir intérêt à effectuer des simulations plutôt que des krigeages. C'est souvent le cas.

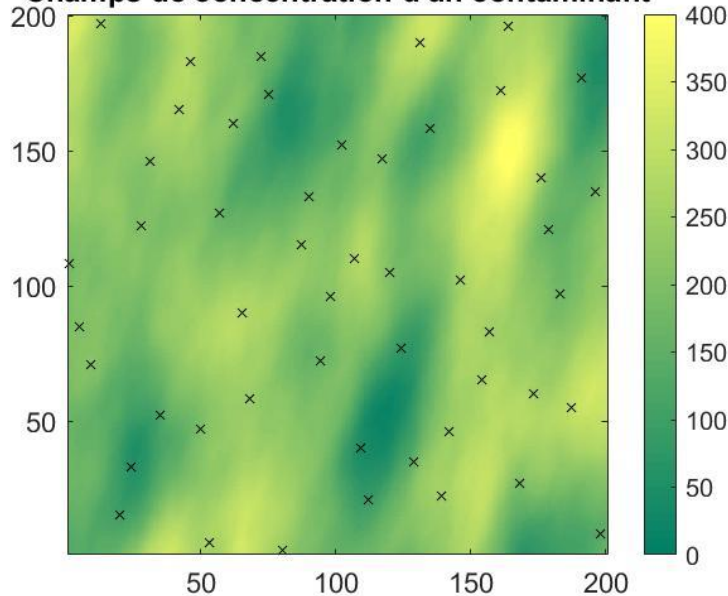
# 1. Introduction : contexte et problématique

## Mise en contexte : champs de concentration d'un contaminant

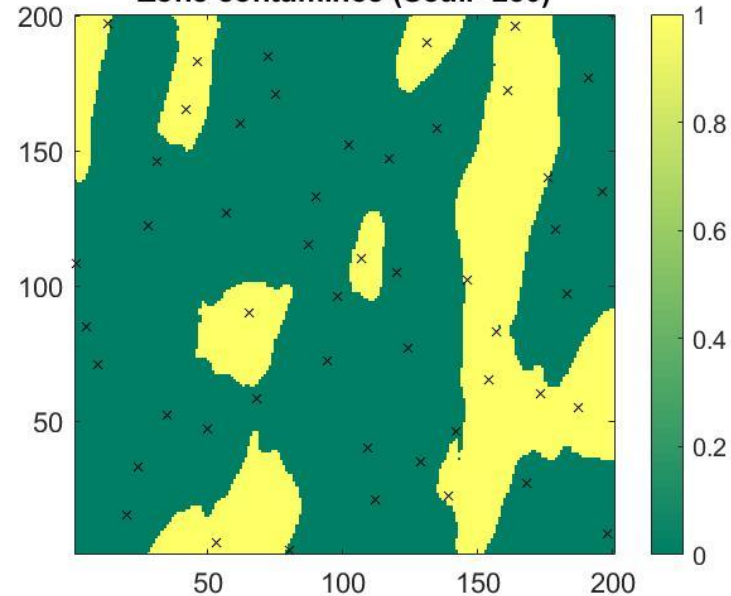
Vous disposez d'une cinquantaine d'observations d'un site contaminé. Le seuil de contamination est de 250 ppm.

Quel est le volume de sol contaminé à excaver?

Champs de concentration d'un contaminant



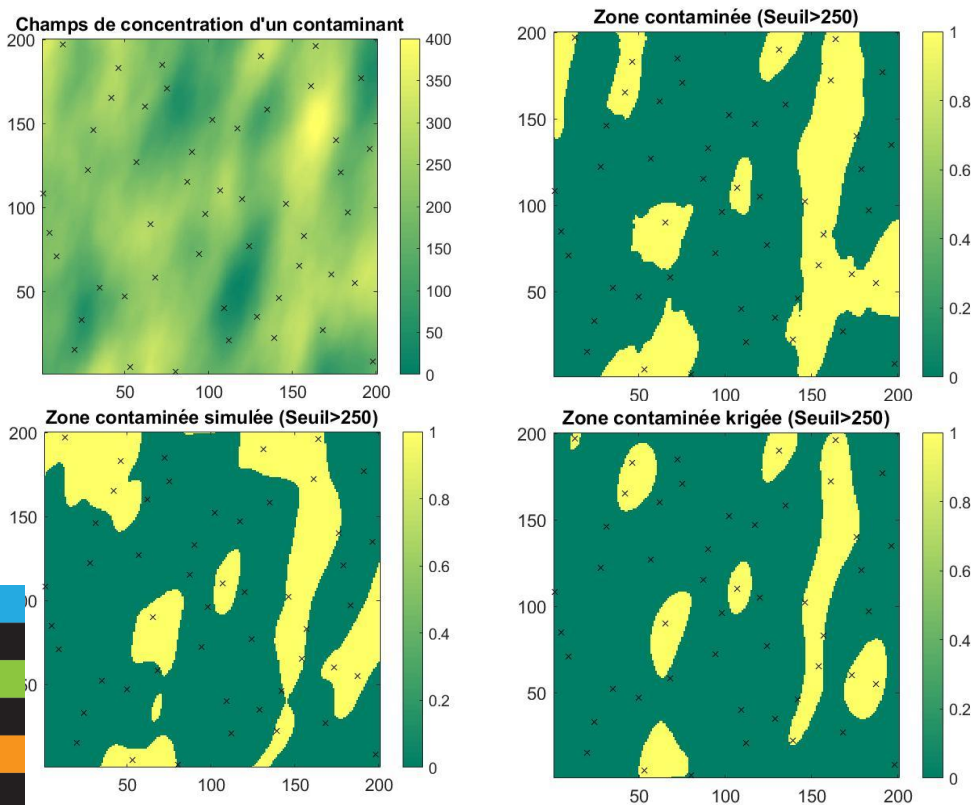
Zone contaminée (Seuil > 250)



# 1. Introduction : contexte et problématique

## Mise en contexte : champs de concentration d'un contaminant

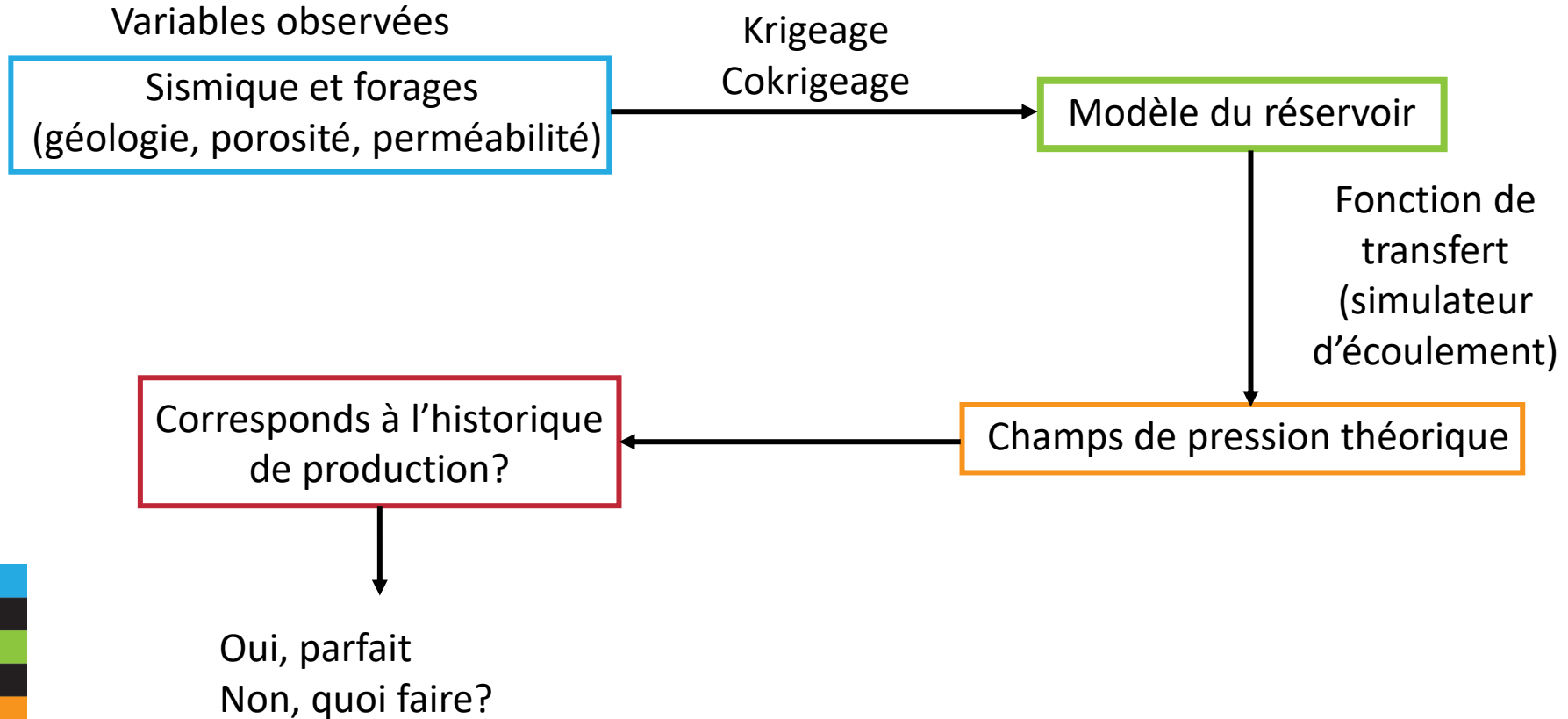
Les simulations permettent de bien estimer la fonction de transfert (non linéaire)



Méthode d'estimation	Volume contaminé estimé (%)	Intervalle de confiance à 95%
Réalité	25.70	-
Estimation linéaire (Krigage)	15.75	?
Simulations géostatistiques (500 simulations)	25.03	[20.43 , 29.63]

# 1. Introduction : contexte et problématique

## Réservoir pétrolier



# 1. Introduction : contexte et problématique

## Réservoir pétrolier

Variables observées

Sismique et forages  
(géologie, porosité, perméabilité)

Simulations :  
plusieurs réalisations  
possibles

Modèle du réservoir

Fonction de  
transfert  
(simulateur  
d'écoulement)

Corresponds à l'historique  
de production?

Champs de pression théorique

Conserver les modèles  
compatibles, rejeter les autres

Bonus : idée de l'incertitude quant  
au véritable modèle du réservoir

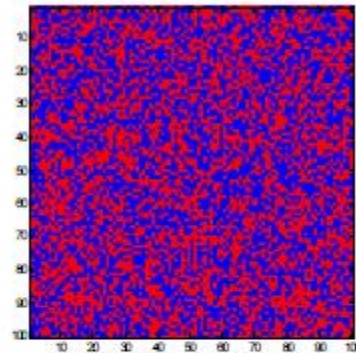
# 1. Introduction : contexte et problématique

## Hydrogéologie : changement d'échelle

Déterminer la transmissivité (T) d'un bloc

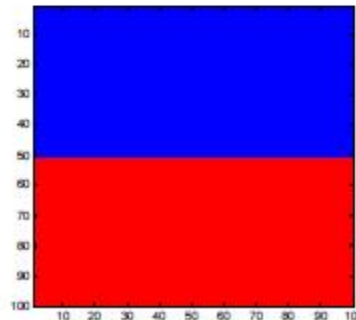
$$T_{m,point} \neq T_{bloc}$$

Facies	T (cm <sup>2</sup> /s)
Bleu	10 <sup>-6</sup>
Rouge	10 <sup>-2</sup>



Échelle	T (cm <sup>2</sup> /s)
$T_{m,point}$	$5 \times 10^{-3}$
$T_{bloc}$	$10^{-4}$

Moyenne géométrique



Échelle	T (cm <sup>2</sup> /s)
$T_{m,point}$	$5 \times 10^{-3}$
$T_{bloc,horiz.}$	$5 \times 10^{-3}$
$T_{bloc,vertic.}$	$2 \times 10^{-6}$

Moyenne arithmétique

Moyenne harmonique



# 1. Introduction : contexte et problématique

## Hydrogéologie : changement d'échelle

Déterminer la transmissivité (T) d'un bloc

Variable principale : tests piézométriques (quasi ponctuel)

Fonction de transfert : Simulateur d'écoulement

1. Krigeage de blocs → moyenne des transmissivités des points dans le bloc
2. Krigeage ponctuel et simulateur d'écoulement → les transmissivités krigées n'auront pas le bon variogramme
3. Simulation des transmissivités ponctuelles et simulateur d'écoulement → transmissivité de bloc

Ce n'est pas ce dont on a besoin

Effet de lissage indésirable

Bonne approche

# 1. Introduction : contexte et problématique

## Hydrogéologie : aires de protection d'un puits

### Variables observées

Tests piézométriques, charges hydrauliques dans des puits d'observation, conditions frontières, recharge estimée, débit des puits

Simulations :  
plusieurs réalisations de la  
conductivité hydraulique

Modèle d'écoulement

Fonction de transfert  
(simulateur d'écoulement)

Déterminer plusieurs aires  
de captage :

- Jamais captés
- Toujours captés
- Captés dans x% des cas

Champs de charges hydrauliques

Bonus : se prémunir contre de mauvaises surprises, p. ex. un puits qui aurait dans sa zone de captage une zone potentiellement contaminée

\*Procédure similaire pour :

- déterminer des distributions de temps de transport
- déterminer les trajets possibles d'une contamination

# 1. Introduction : contexte et problématique

## Mines : optimisation de fosses à ciel ouvert

Variable principale : les teneurs quasi ponctuelles

Fonction de transfert : Teneurs de blocs et optimisation des contours de la fosse

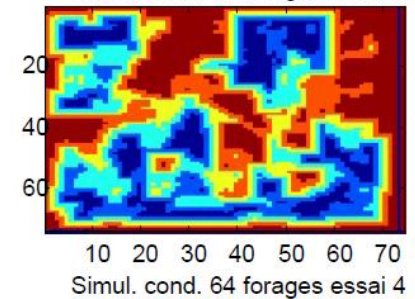
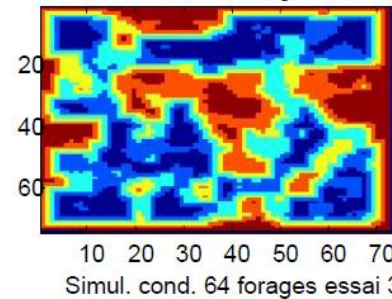
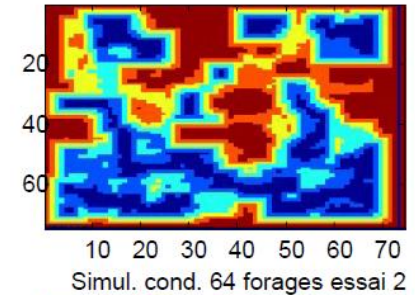
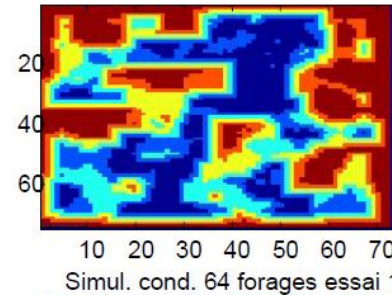
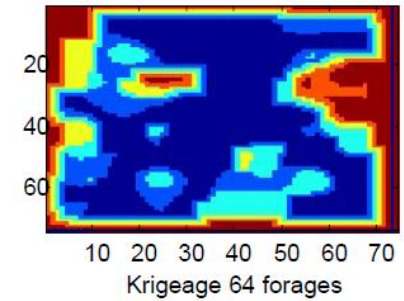
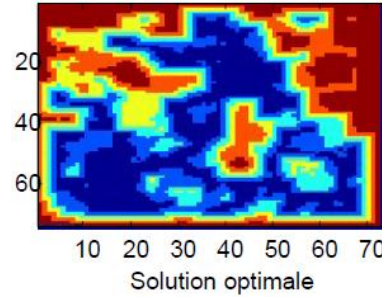
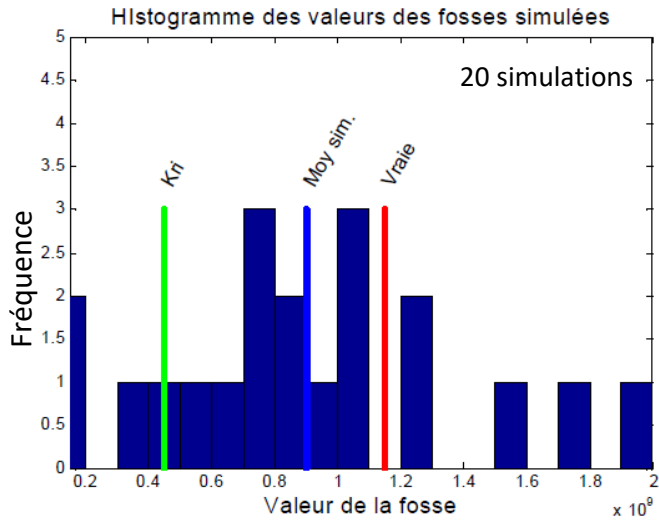
Lissage du krigeage → La fosse optimisée peut être très éloignée de la fosse qui sera réellement minée

Simulations géostatistique → Produire  $n$  fosses optimisées qui encadrera la valeur de la fosse qui sera minée.



# 1. Introduction : contexte et problématique

## Mines : optimisation de fosses à ciel ouvert



# 1. Introduction : contexte et problématique

## Mines : précision sur les ressources et le profit conventionnel

Chaque réalisation

- ressources estimées différentes, compatibles avec les observations actuelles
- distribution des ressources, intervalle de confiance

Approche valide pour toute situation où l'on applique un seuil de sélection

p. ex.

- Environnement : volume à excaver parce que contaminé
- Biologie : aires avec une biomasse suffisante pour nourrir un prédateur

## 2. Simulation conditionnelle et non-conditionnelle

### Idée principale des simulations géostatistiques

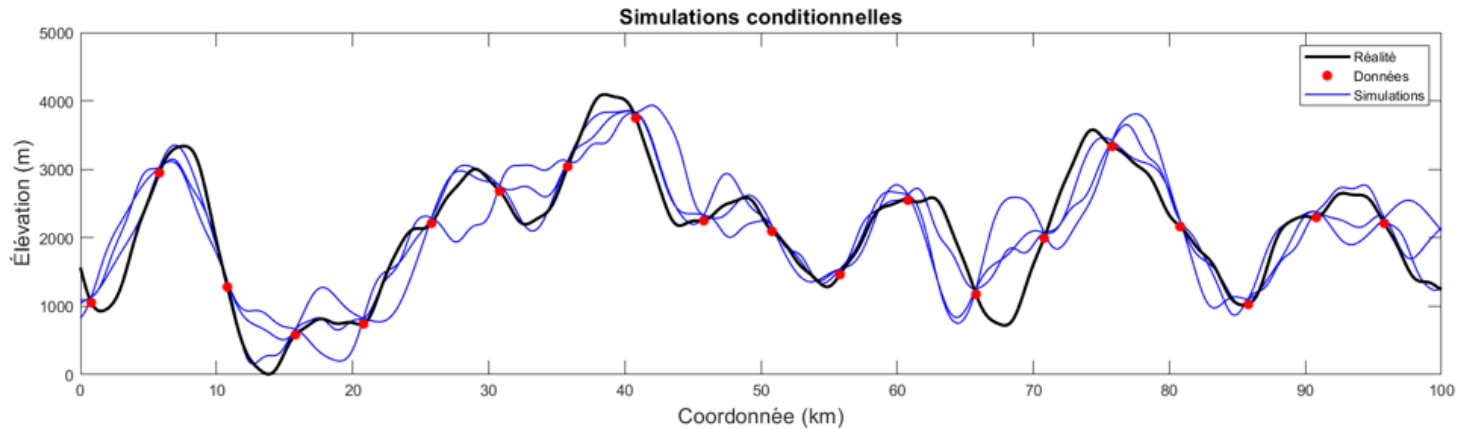
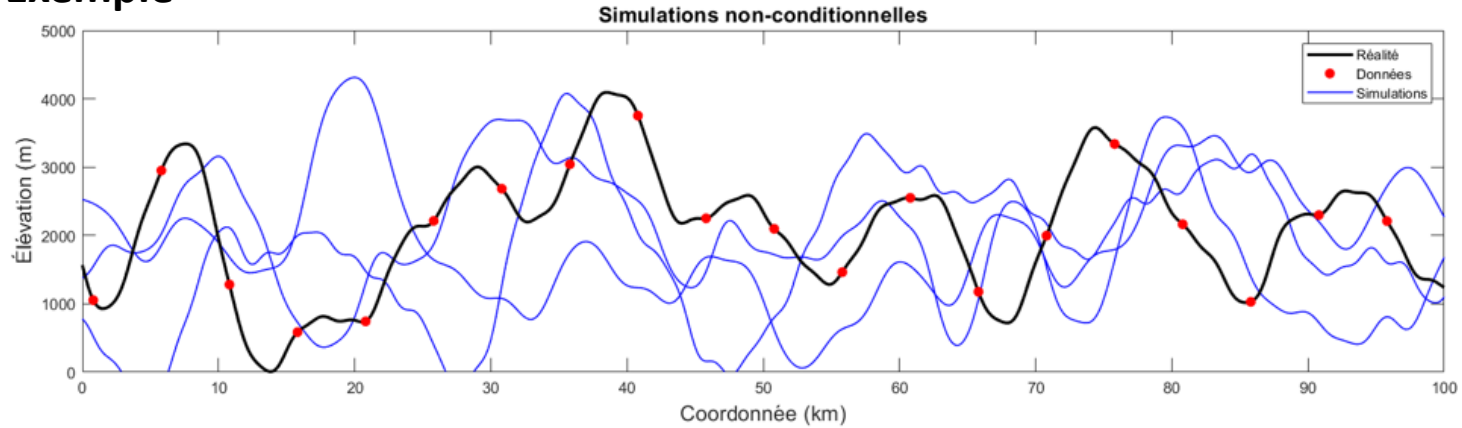
Proposer une solution à tout problème impliquant des **transformations non linéaires** des variables mesurées.

Simulation non conditionnelle : Produire des champs montrant la même structure spatiale (variogramme) et le même histogramme que ceux inférés à partir des données observées.

Simulation conditionnelle : Produire des champs montrant la même structure spatiale (variogramme), le même histogramme en plus de respecter les données observées.

# 2. Simulation conditionnelle et non-conditionnelle

## Exemple



## 2. Simulation conditionnelle et non-conditionnelle

### En tableau

Reproduit ?	Non-conditionnelle	Conditionnelle
Histogramme	Oui	Oui
Variogramme	Oui (théorique)	Oui ( mélange de théorique et expérimentale)
Données	<b>Non</b>	<b>Oui</b>
Fonction de transfert non linéaire	Oui, mais pas directement	Oui, mais pas directement



# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## Différences entre les méthodes

Il existe un grand nombre de méthodes de simulations

Ce qui les distingue :

1. Variable continue ou catégorique
2. Utilise la covariance (bipoints) ou multipoints
3. Objets versus pixels
4. Gaussien versus distribution quelconque
5. Simulation conditionnelle possible ou non (directement)
6. -Limité en 1D ou non
7. -Grille régulière ou quelconque

# 3. Méthode de simulations géostatistiques

**Méthode présentée :**

Il existe un grand nombre de méthodes de simulations

Quatre méthodes seront présentées :

1. Méthode de Cholesky (LU)
2. Simulation séquentielle gaussienne (SGS)
3. FFTMA
4. Les bandes tournantes

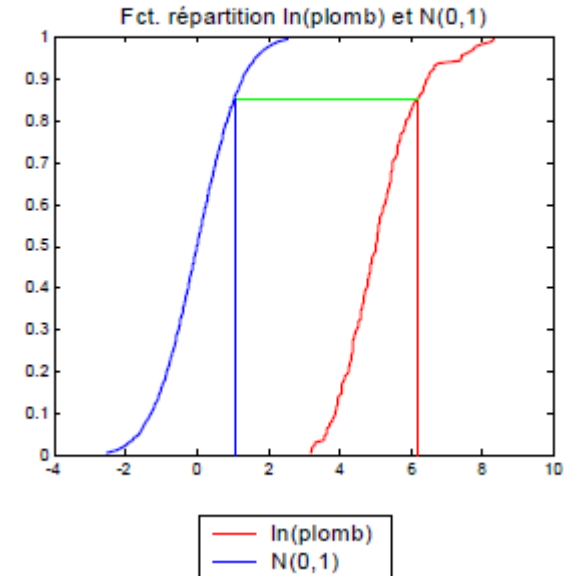
# 3. Méthode de simulations géostatistiques

**Normalité des observations** : Cas non gaussien

LU, SGS, FFTMA et les bandes tournantes nécessitent un champ  $Z(x)$  gaussien

## Que faire si ce n'est pas gaussien?

1. Transformer  $Z(x)$  en  $Y(x) = f^{-1}(Z(x))$ ;
2. Calculer et modéliser le variogramme de  $Y(x)$ ;
3. Simuler (conditionnel ou non)  $Y(x)$ ;
4. Effectuer la transformation inverse  $Z(x) = f(Y(x))$



# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## **Exercice en équipe**

### 1) Transformation graphique



### 3. Méthode de simulations géostatistiques

#### Méthode de Cholesky (LU) : Algorithme simulation non conditionnelle

Soit  $Z(x)$  gaussien, de moyenne 0 et de covariance  $C(h)$ :

On cherche à simuler  $n$  points à des emplacements  $x_i, i = 1, \dots, n$  :

1. Construire la matrice des covariances entre les  $n$  points, nommée  $K$ .  $K$  est positive définie. (Il s'agit de la même matrice  $K$  que le krigeage simple.)
2. Effectuer la décomposition  $K = LL'$ . ( $L$  est triangulaire inférieure  $n \times n$ .)
3. Générer un vecteur aléatoire  $Y_{n \times 1}$  tiré d'une loi normale  $N(0,1)$ .
4. Calculer  $Z = LY$ .

$$\text{Cov}(Z, Z') = E[ZZ'] = E[LYY'L'] = LE[YY']L' = LIL' = K$$

# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## **Exercice en équipe**

### 2) Simulations Cholesky, méthode LU

# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## Méthode de Cholesky (LU) : Algorithme simulation conditionnelle

Soit  $Z(x)$  gaussien, de moyenne 0 et de covariance  $C(h)$  et soit  $z^1(x_i), i = 1, \dots, N$ ,  $N$  observations de  $Z(X)$  :

On cherche à simuler  $z^2(x_j)$  en  $n$  emplacements  $x_j, j = 1, \dots, n$ , conditionnellement à  $z^1(x_i), i = 1, \dots, N$

1. Construire la matrice des covariances entre les  $N + n$  points, nommée  $K$ .  $K$  est positive définie.
2. Effectuer la décomposition  $K = LL'$ . ( $L$  est triangulaire inférieure)
3. Partager  $K$  et  $L$  en 4 blocs :

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$

$K_{11}$  et  $L_{11}$  sont  $N \times N$

$K_{22}$  et  $L_{22}$  sont  $n \times n$

Indice 1 : points observés

Indice 2 : points à simuler

# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## Méthode de Cholesky (LU) : Algorithme simulation conditionnelle (suite)

4. Déterminer les valeurs du vecteur  $y_{N \times 1}^1$  qui assure la reproduction des données observées.

$$z^1 = L_{11}y^1 \rightarrow y^1 = L_{11}^{-1}z^1$$

5. Générer un vecteur aléatoire  $y_{n \times 1}^2$  tiré d'une loi normale  $N(0,1)$ .

6. Calculer  $Z = LY$  :

$$Z = LY \rightarrow \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}$$

$$z^1 = L_{11}y^1$$

$$z^2 = L_{21}y^1 + L_{22}y^2 = (L_{21}L_{11}^{-1})z^1 + L_{22}y^2$$



# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## Méthode de Cholesky (LU) : Exemple

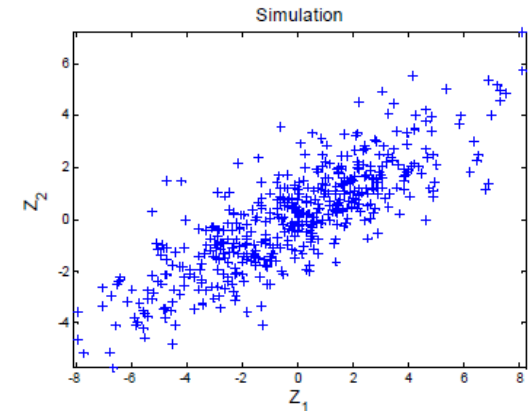
On cherche à simuler deux variables ( $Z_1$  et  $Z_2$ ) de variance respective de 9 et 4 avec une corrélation de 0.8 :

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2) = \rho \sigma_{Z_1} \sigma_{Z_2} = 0.8 \times (9)^{0.5} \times (4)^{0.5} = 4.8$$

$$K = \begin{bmatrix} 9 & 4.8 \\ 4.8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} ? & \\ & ? \end{bmatrix}$$

Déterminer L :



# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## Méthode de Cholesky (LU) : Exemple

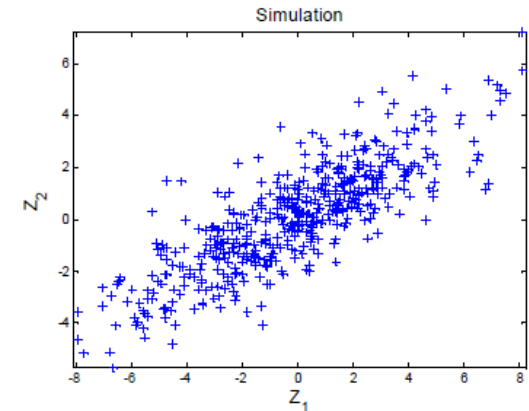
On cherche à simuler deux variables ( $Z_1$  et  $Z_2$ ) de variance respective de 9 et 4 avec une corrélation de 0.8 :

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2) = 0.8 \times (9 \times 4)^{0.5} = 4.8$$

$$K = \begin{bmatrix} 9 & 4.8 \\ 4.8 & 4 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1.6 & 1.2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Soit : } Y_1 = \begin{bmatrix} -0.12 \\ -0.5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1.6 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.12 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.36 \\ -0.79 \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 1.47 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1.6 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.47 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.41 \\ 3.55 \end{bmatrix}$$



# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## Méthode de Cholesky (LU) : Avantages et inconvénients

### Avantages

- Facile à comprendre et programmer
- Très rapide pour de petits champs (n petits)
- Cas conditionnel pose aucun problème
- Se généralise immédiatement au cas multivariable

### Inconvénients

- Limiter à la simulation de petits champs à cause de problèmes d'espace mémoire :  $(n+N) < 10000$
- $K$  peut ne pas être définie numériquement ( $K$  l'est théoriquement). Impossibilité d'effectuer la décomposition de Cholesky.

# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## Méthode séquentielle gaussienne (SGS) : algorithme

Soit  $Z(x)$  gaussien, de moyenne 0 et de covariance  $C(h)$  et soit  $Z(x_i), i = 1, \dots, N$ ,  $N$  observations de  $Z(X)$  :

On cherche à simuler  $n$  points à des emplacements  $x_j, j = 1, \dots, n$  :

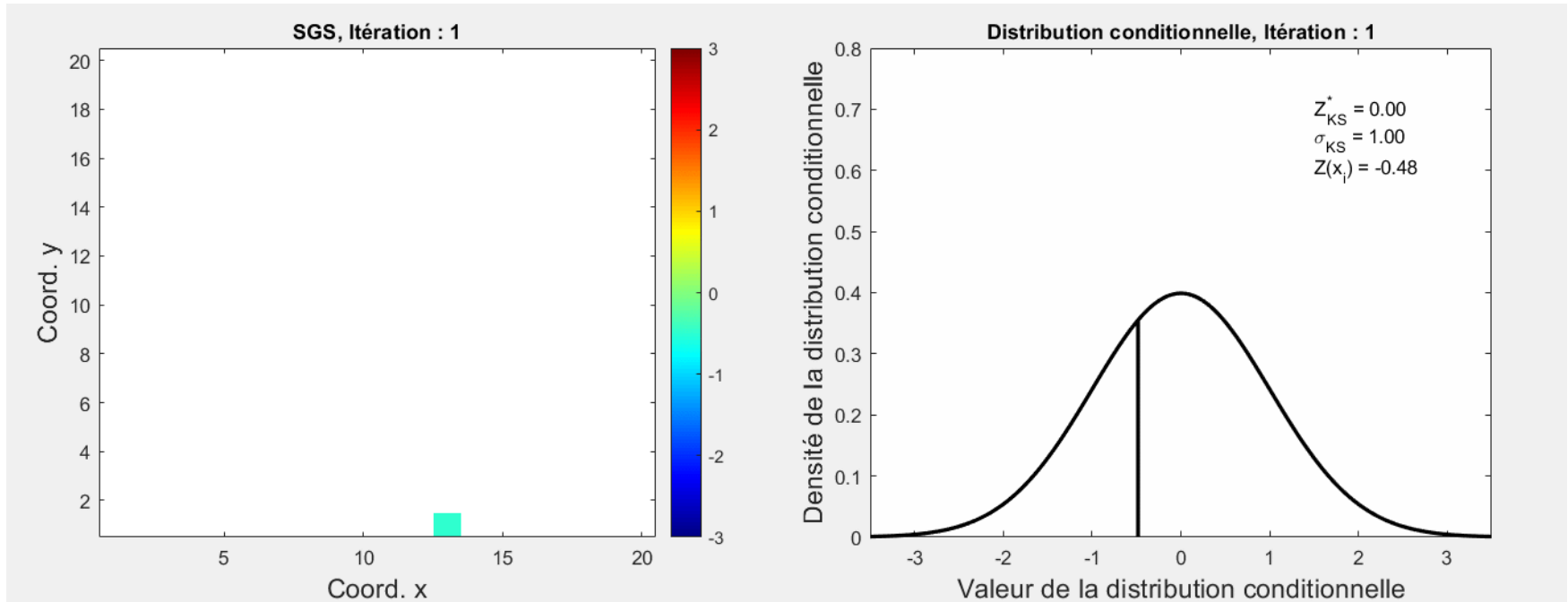
1. Choisir une coordonnée  $x_j$  aléatoirement;
2. Effectuer le krigeage simple à ce point en utilisant les observations  $Z(x_i), i = 1, \dots, N$ . On obtient ainsi un estimé  $Z_{KS}^*(x_j)$  et la variance conditionnelle  $\sigma_{KS}^2$
3. Tirer aléatoirement une donnée de la distribution  $N(Z_{KS}^*(x_j), \sigma_{KS}^2)$
4. Ajouter cette valeur aux valeurs observées
5. Répéter les étapes 1 à 4 pour les emplacements restants à simuler.

Note : quand  $N = 0$ , on amorce l'algorithme en tirant d'une  $N(0, \sigma^2)$

# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## Méthode séquentielle gaussienne (SGS) :

**Animation :** simulation d'un champ 20x20 avec modèle sphérique isotrope ( $a=5$ )



## 3. Méthode de simulations géostatistiques

### **Exercice en équipe**

### 3) Simulation séquentielles gaussiennes



### 3. Méthode de simulations géostatistiques

#### Méthode séquentielle gaussienne (SGS) : démonstration par induction

Supposons que l'algorithme permet de simuler « n » valeurs normales de moyenne 0 et de covariance  $C(h)$ .

On a : 
$$\text{Cov}(Z_n^S, Z_n^{S'}) = \text{Cov}(Z_n, Z_n') = K_{n \times n}$$

On réalise le krigeage simple : 
$$Z_{n+1}^{S*} = Z_n^{S'} \lambda$$

$$\lambda = K_{nn}^{-1} k$$
$$k = \text{Cov}(Z_n, Z_{n+1})$$

On ajoute l'erreur : 
$$Z_{n+1}^S = Z_{n+1}^{S*} + e$$

### 3. Méthode de simulations géostatistiques

#### Méthode séquentielle gaussienne (SGS) : démonstration par induction

On calcule alors :

$$\text{Cov}(Z_n^S, Z_{n+1}^S) = \text{Cov}(Z_n^S, Z_{n+1}^{S*}) = \text{Cov}(Z_n^S, Z_n^{S'}) K_{nn}^{-1} k = k$$

$$\text{Var}(Z_{n+1}^S) = \text{Var}(Z_{n+1}^{S*}) + \sigma_k^2 = \sigma^2$$



# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## Méthode séquentielle gaussienne (SGS) : voisinage

Au fur et à mesure que l'algorithme progresse, le nombre de points disponible pour le krigeage augmente; pour  $N$  grand, deviens prohibitif.

→ Effectuer les krigeages en voisinages glissants (**effet d'écran**)

- Assure approximativement la reproduction de  $K$ , d'autant mieux que l'effet d'écran est important;
- Certaines covariances sont difficiles à reproduire par cet algorithme (ex. modèle gaussien), car dans ce cas l'effet d'écran est faible.



# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## Méthode séquentielle gaussienne (SGS) : Avantages et inconvénients

### Avantages

- Facile à comprendre et programmer
- Cas conditionnel immédiat
- Se généralise au cas multivariable.  
Utiliser le CS au lieu de KS.

### Inconvénients

- Certaines covariances difficiles à bien simuler
- Assez lent pour de grands champs
- Limiter les voisinages peut mener à d'importantes distorsions sur la covariance simulée



# 3. Méthode de simulations géostatistiques

**Méthode séquentielle gaussienne (SGS) :**

## Question

Le SGS consiste à tirer une valeur de la distribution conditionnelle obtenue par krigeage simple dans le cas gaussien

Le krigeage d'indicateur permet d'estimer une distribution conditionnelle dans le cas où la variable n'est pas gaussienne

Comment pourrait-on combiner ces deux algorithmes pour développer une méthode séquentielle pour le cas non gaussien?

# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## Méthode FFTMA : algorithme

FFTMA : *fast Fourier transform moving average*

Principe : Tirer avantage du théorème de convolution

$$\text{Posons : } Z = Y * g \rightarrow Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t)g(x - t)dt$$

Par le théorème de convolution :

$$Z(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(Z(x)) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(Y * g) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(Y) \times \mathcal{F}(g))$$

$\mathcal{F}$  : opérateur de la transformer de Fourier

### 3. Méthode de simulations géostatistiques

#### Méthode FFTMA : algorithme (suite)

$$Z(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(Z(x)) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(Y * g) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(Y) \times \mathcal{F}(g))$$

On pose :  $Y$  comme un bruit blanc (un effet de pépite pur)

Il faut que :

$$C(h) = g * g = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+h)dt$$

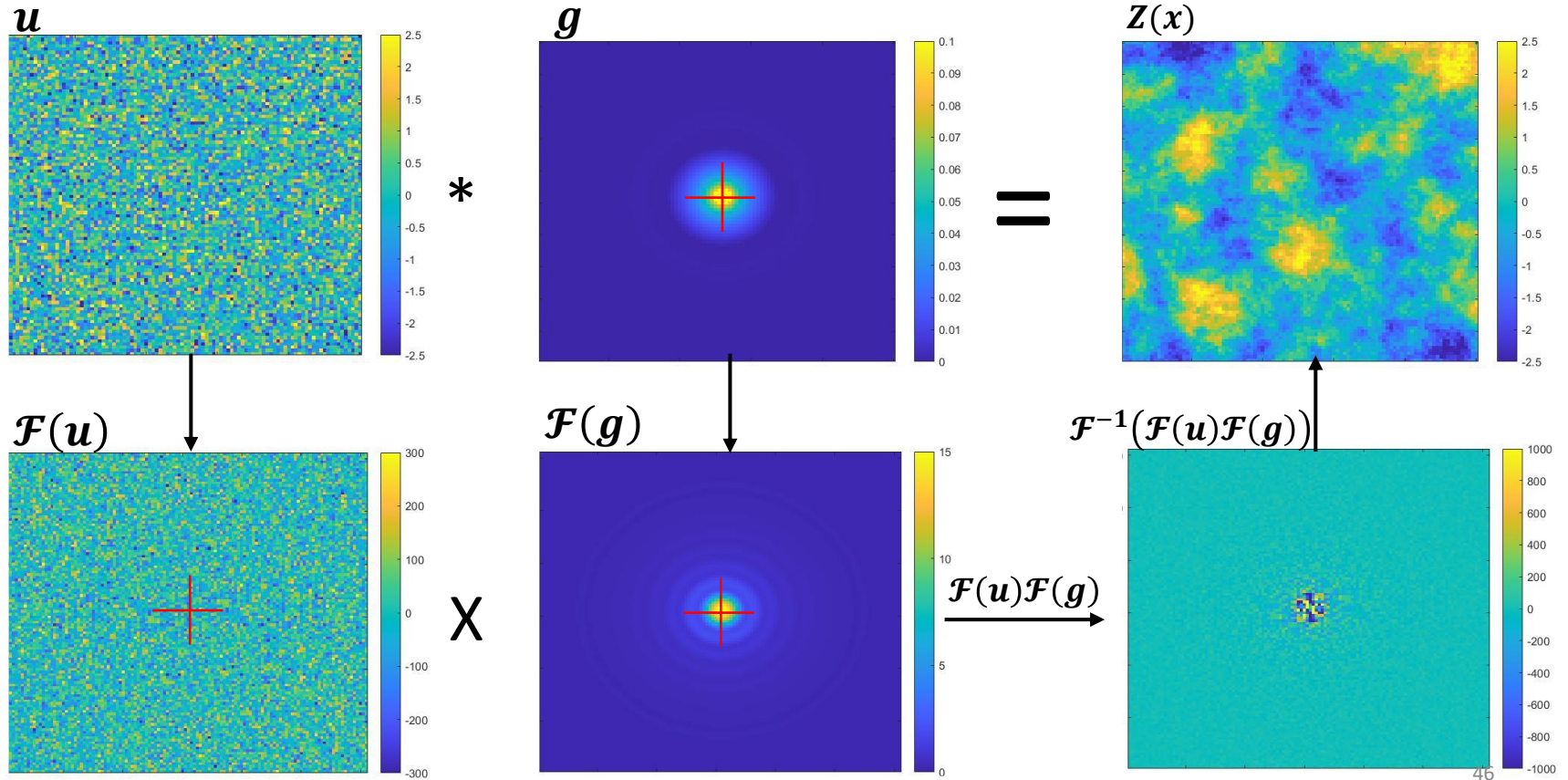
Ainsi :

$$\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(C)^{0.5}$$

Note : numériquement on utilise la FFT au lieu de  $\mathcal{F}$ . Afin de tenir compte de la périodicité de la FFT, il faut élargir le champ simulé en fonction de la portée effective.

# 3. Méthode de simulations géostatistiques

Méthode FFTMA : modélisation d'un variogramme sphérique 2D isotrope ( $a = 20, C = 1$ )



# 3. Méthode de simulations géostatistiques

**Méthode FFTMA : Illustration en 1D → modèle sphérique ( $\alpha = 2, C = 1$ )**

Simulation de quatre points. On doit donc simuler un champ de taille  $4+\alpha=6$ .

Étape	Point 1	Point 2	Point 3	Point 4	Point 5	Point 6
$C(h)$	1	0.3125	0	0	0	0.3215
$FFT(C(h))$	1.6250	1.3125	0.6875	0.3750	0.6875	1.3125
$FFT(g)$	1.2748	1.1456	0.8292	0.6124	0.8292	1.1456
$Y$	-0.4326	-1.6656	0.1253	0.2877	-1.1465	1.1909
$FFT(Y)$	-1.6407	-0.4470 + 1.3724i	0.6030 + 3.5752i	-1.2667	0.6030 - 3.5752i	-0.4470 - 1.3724i
$FFT(g) \times FFT(y)$	-2.0915	-0.5121 + 1.5723i	0.5000 + 2.9644i	-0.7757	0.5000 - 2.9644i	-0.5121 - 1.5723i
$IFFT \rightarrow Z(x)$	-0.4819	-1.6976	-0.0740	0.1181	-0.8777	0.9216

$Z(x)$  : on retient quatre valeurs consécutives (au choix)

# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## Méthode FFTMA : Avantages et inconvénients

### Avantages

- Méthode très efficace en temps de calcul.
- Assez facile à programmer
- N'importe quelle covariance (anisotropies, imbriquées, etc.)
- Peut être modifiée localement
- Peut fixer l'aléa et faire varier le modèle

### Inconvénients

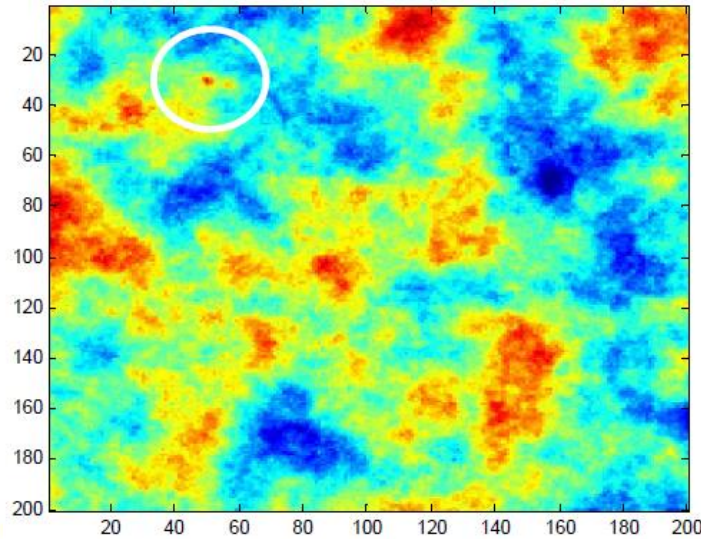
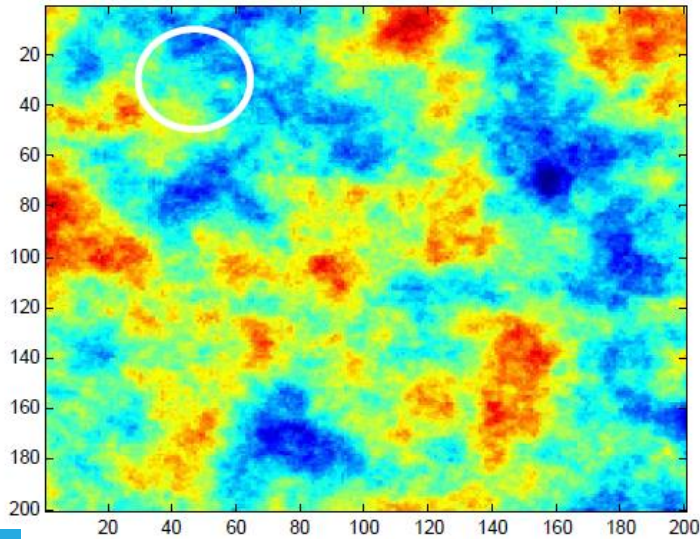
- Grille régulière seulement
- Post-conditionnement requis
- On ne peut simuler de très grandes portées sur une maille fine. (Problème d'espace mémoire)



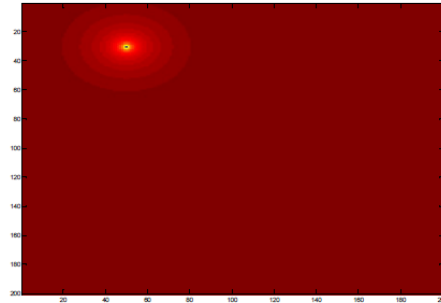
# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## Méthode FFTMA : perturbations locales

On peut changer localement le terme aléatoire pour s'approcher d'un objectif (p. ex. déformation graduelle, FFTMA-SA)



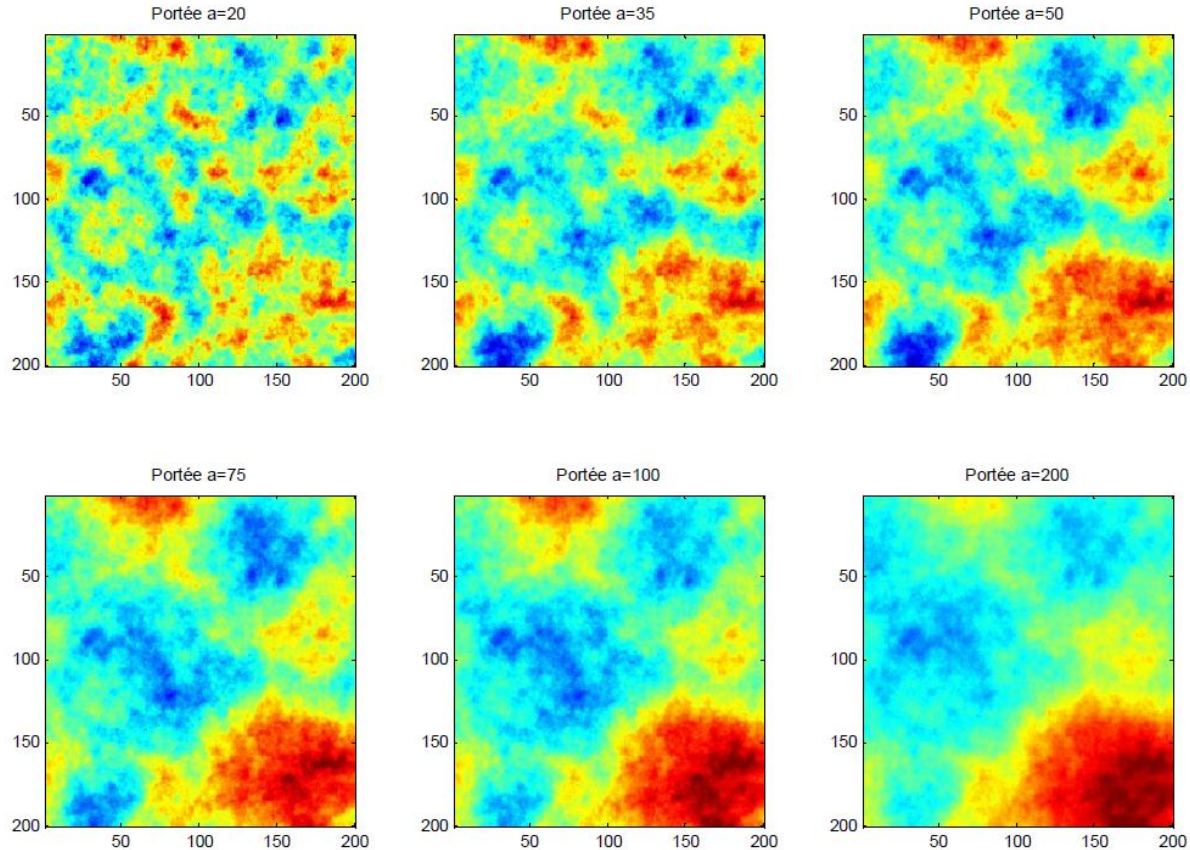
Différence entre les 2 cartes



# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## Méthode FFTMA : perturbations locales

On peut fixer l'aléa et faire varier la structure seulement



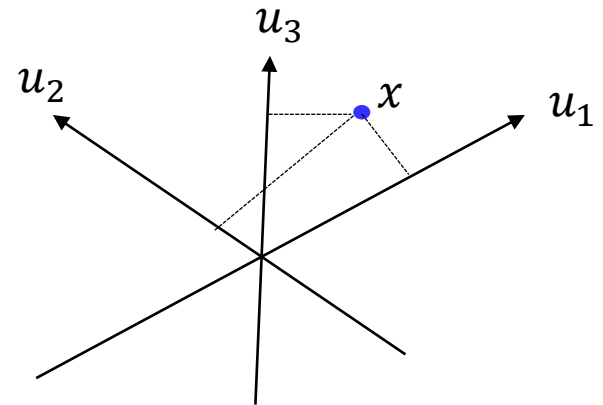
# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## Bandes tournantes : algorithme

Soit :

- Un grand nombre de lignes ( $M > 100$ ) balayant la sphère unité et passant par le centre de la sphère;
- La même covariance  $C_y(h)$  sur chaque ligne  $u_i$  ;
- Une réalisation  $Y_i(t)$  ayant  $C_y(h)$  sur chaque ligne  $u_i$ ;

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M Y_i(\langle x, u_i \rangle)$$



# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## Bandes tournantes : modélisation de la covariance de ligne

Si on laisse tendre  $M$  vers l'infini et que l'on balaye toute la demi-sphère, on aura alors (coordonnées sphériques) :

$$C_Z(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} C_Y(h \cos \varphi) \sin(\varphi) d\varphi d\theta$$

Posant  $t = h \cos(\varphi)$ , on a :

$$C_Z(h) = -\frac{1}{h} \int_0^h C_Y(t) dt$$

Inversement, on a :

$$C_Y(h) = \frac{d}{dh} [h C_Z(h)]$$

# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## Bandes tournantes : modélisation de la covariance de ligne

Covariance 3D

Covariance de ligne

Pour le modèle sphérique :

$$C \left( 1 - 1.5 \left( \frac{h}{a} \right) + 0.5 \left( \frac{h}{a} \right)^3 \right) \quad C \left( 1 - 3 \left( \frac{h}{a} \right) + 2 \left( \frac{h}{a} \right)^3 \right)$$

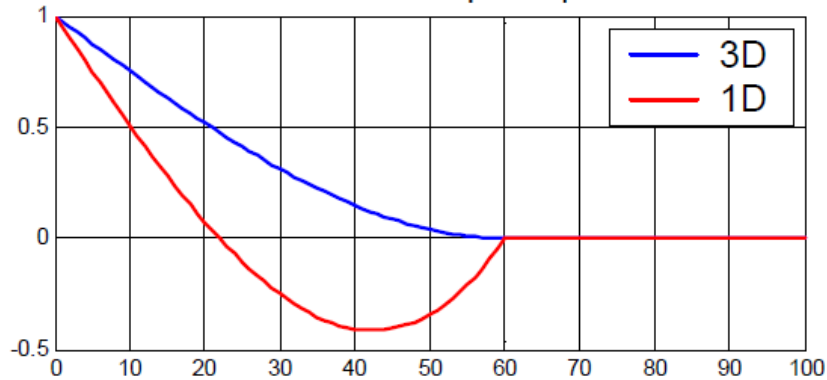
Pour le modèle gaussien :

$$C \exp \left( -\frac{h^2}{a^2} \right) \quad C \exp \left( -\frac{h^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{2h^2}{a^2} \right)$$

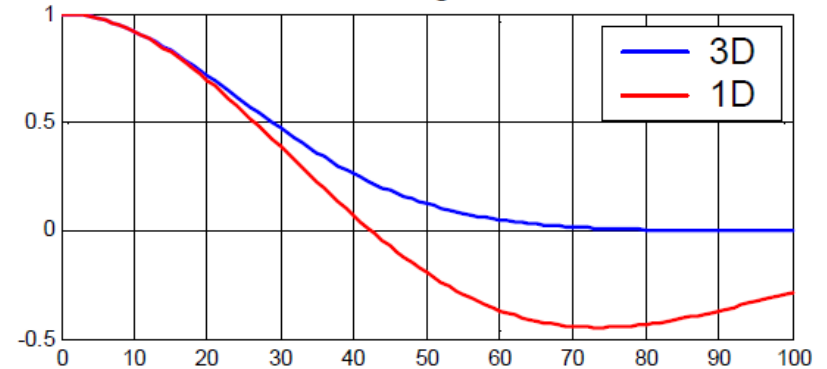
# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## Bandes tournantes : modélisation de la covariance de ligne

Covariance sphérique



Covariance gaussienne



# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## Bandes tournantes : astuces

### Simulation en 2D :

1. générer les lignes en 3D;
2. placer les points à simuler en 2D.

### Simuler des anisotropies :

1. Rotation + contraction → modèle isotrope;
2. Simuler modèle isotrope aux coordonnées transformées;
3. Dilatation + rotation inverse → modèle anisotrope aux coordonnées originales.

### Simulation conditionnelle :

1. Technique du post-conditionnement

# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## Bandes tournantes : Avantages et inconvénients

### Avantages

- Méthode la plus efficace en temps de calcul et en espace mémoire.
- Sans rival sérieux pour simuler de grands champs à plusieurs millions de points
- Adaptable dans le domaine spectral (les bandes tournantes spectrales).

### Inconvénients

- Plus compliquée à programmer
- Post-conditionnement requis
- Plusieurs structures imbriquées impliquent de les simuler séparément
- Anisotropies



# 3. Méthode de simulations géostatistiques

## Résumé des algorithmes

Méthode	Complexité (non-conditionnelle)	Complexité de réalisations additionnelles	Valide pour des champs
LU	$n^3$	$n^2$	Petit
SGS	$m^3n$	$m^3n$	Grand à très grand
FFTMA	$n \log(n)$	$n \log(n)$	Grand
Bandes tournantes	$n$	$N$	Très grand

n : nombre de points à simuler

m : nombre de points utilisés dans le krigeage

# 5. Simulation de teneurs de blocs

## Méthodologie :

Lorsque la fonction de transfert porte sur des teneurs de blocs (ex. optimisation d'une fosse à ciel ouvert) il faut simuler ces valeurs conditionnellement aux valeurs ponctuelles.

La méthode consiste à simuler des teneurs ponctuelles sur une grille fine, puis de les regrouper selon les blocs désirés (les blocs peuvent être de tailles et de formes différentes).

Le principal défi est d'ordre informatique. Par exemple si l'on veut simuler une mine ayant disons 200 x 200 x 200 blocs et que l'on veuille discrétiser chaque bloc par une grille de 3 x 3 x 3, on aurait à simuler  $200^3 * 3^3 = 216$  millions de points (pour une seule réalisation).

## 6. Recuit simulé

**Idée :**

Méthode itérative basée sur l'optimisation d'une fonction objectif ( $FO$ )

$$FO = \sum_{i=1}^N \omega_i f_i(Z_s, Z_{ref})$$

$\omega_i$ : poids associé à chaque objectif

$f_i$ : fonction calculant un objectif désiré (p.ex.  $f = |\gamma_{ref}(h) - \gamma_s(h)|$ )

La formulation est générale, elle peut accommoder autant d'objectifs différents que désiré pourvu que ces objectifs soient compatibles entre eux.

# 6. Recuit simulé

## Algorithme :

### Initialisation

- Générer un champ initial  $Z_0$
- Initialiser la fonction objectif  $FO_0$

### À une itération « k » donnée :

1. Sélectionner un point au hasard du champ  $Z_k$  (disons  $x_i$ );
2. Tirer une valeur « candidate » d'une distribution « mère » (habituellement la distribution que l'on veut reproduire);
3. Calculer la valeur de la fonction objectif obtenue en substituant la valeur candidate à la valeur actuelle au point  $x_i$
4. Si la fonction objectif a décru → conservez la valeur candidate.

Si la fonction objectif a augmenté, conservez la valeur candidate avec probabilité

$$p = \exp\left(\frac{(FO_k - FO_{\text{candidat}})}{t}\right).$$

5. Si la valeur de la fonction objectif est suffisamment faible ou si on a atteint un nombre maximum d'itérations, on arrête, sinon, on retourne à i.

## 6. Recuit simulé

### Note :

« t » est une température que l'on contrôle au moyen d'une cédule de refroidissement.

Plus « t » est élevé, plus grande est la probabilité d'accepter une perturbation défavorable.

On amorce l'algorithme avec « t » élevé puis on l'abaisse au fur et à mesure que l'algorithme progresse. Vers la fin, seules les perturbations favorables sont acceptées.

Ex. :  $FO_k = 100$ ;  $FO_{candidat} = 110$

$$\text{si } t = 100 \rightarrow p = \exp\left(-\frac{10}{100}\right) = 0.9$$

$$\text{si } t = 2 \rightarrow p = \exp\left(-\frac{10}{2}\right) = 0.007$$

# Exercice en équipe

## 4) Recuit simulé

## 6. Recuit simulé

### Influence de la cédule de refroidissement :

**Refroidir trop vite** → on risque de se retrouver dans un optimum local dont on ne peut plus s'échapper (c.-à-d. les objectifs ne sont pas atteints)

**Refroidir trop lentement** → le système oscille beaucoup et la convergence est très lente.

On a peu de guides sur le choix de cette cédule, il faut souvent y aller par essais et erreurs → **le recuit simulé demande un certain pif!**

# 6. Recuit simulé

## Avantages et inconvénients :

### Avantages

- Facile à comprendre et à programmer
- Très général, tout objectif peut être traité et donc, théoriquement, toute fonction de transfert
- Cas conditionnel immédiat : on n'a qu'à ne jamais perturber un point coïncidant avec une donnée
- Permet de traiter des données non gaussiennes

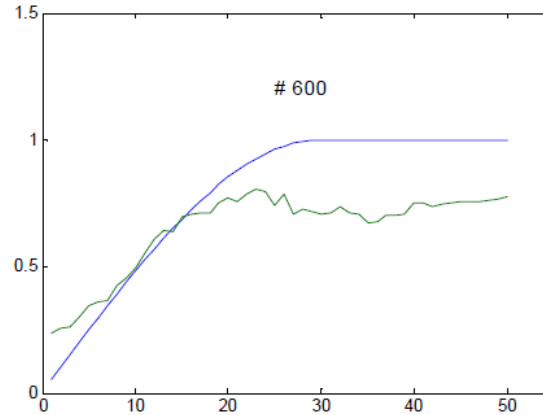
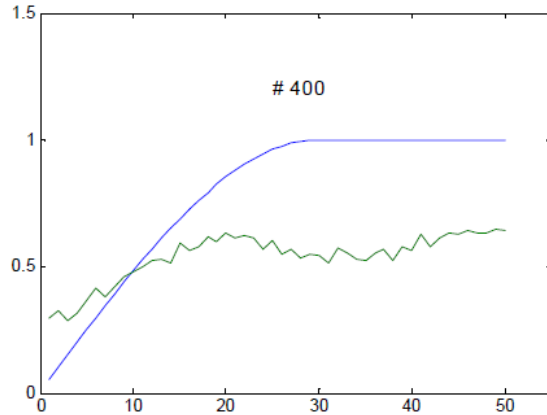
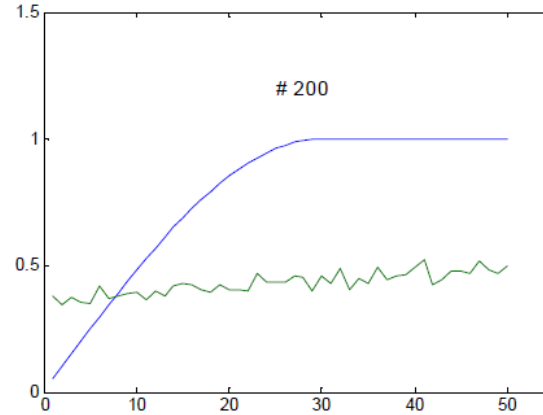
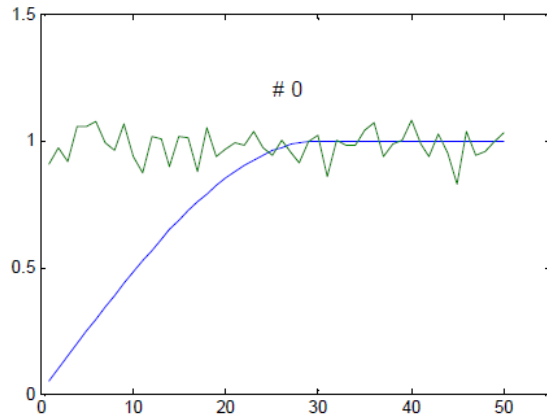
### Inconvénients

- Difficile de fixer la cédule
- Lent, car un seul point est modifié à la fois
- Certains objectifs peuvent être incompatibles sans qu'on le sache
- Si la fonction objectif est longue à calculer, la méthode devient impraticable
- On connaît mal les propriétés statistiques de ce qui est simulé



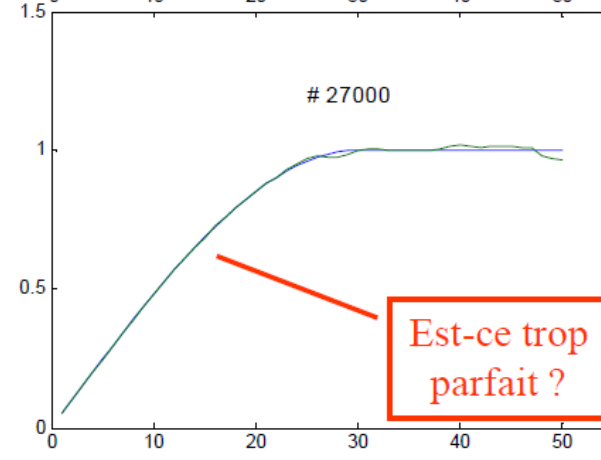
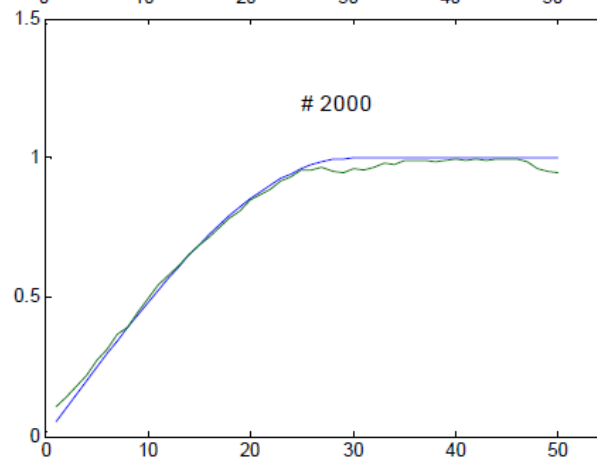
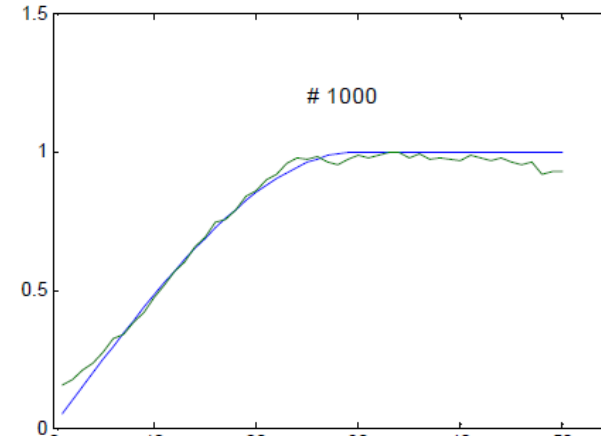
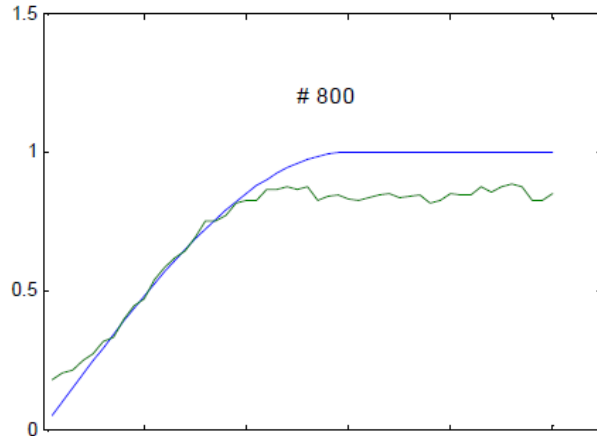
# 6. Recuit simulé

## Exemple : modélisation d'un variogramme théorique



# 6. Recuit simulé

## Exemple : modélisation d'un variogramme théorique

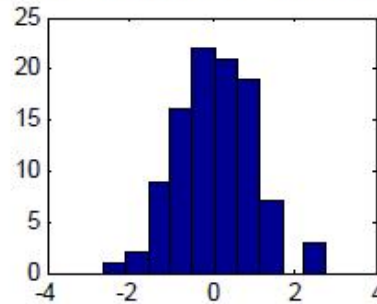
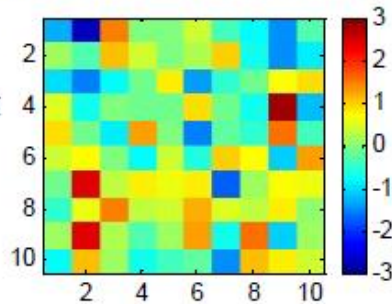


# 6. Recuit simulé

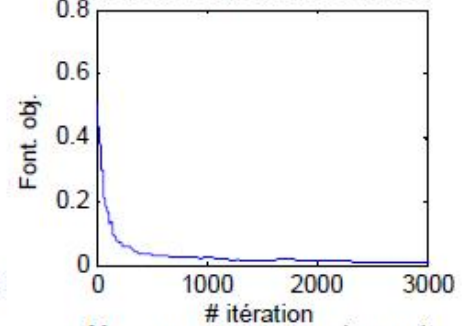
**Exemple : Placer des valeurs dans une matrice de façon à assurer une somme constante en lignes et en colonnes**

Recuit simulé données normales, 10x10, moyennes lignes et colonnes égales

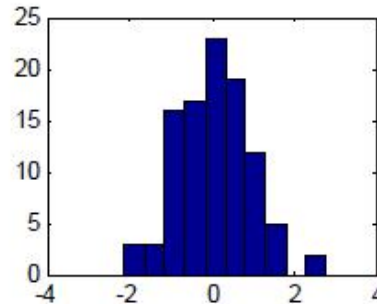
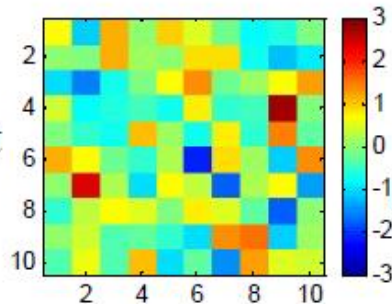
Avant recuit



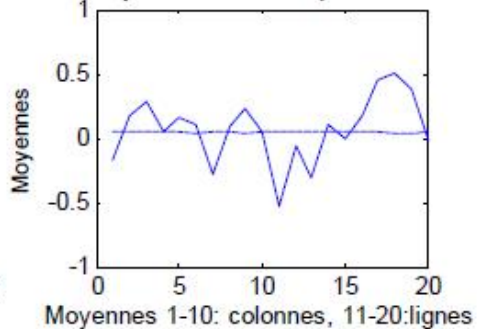
Fonction objective vs itération



Après recuit



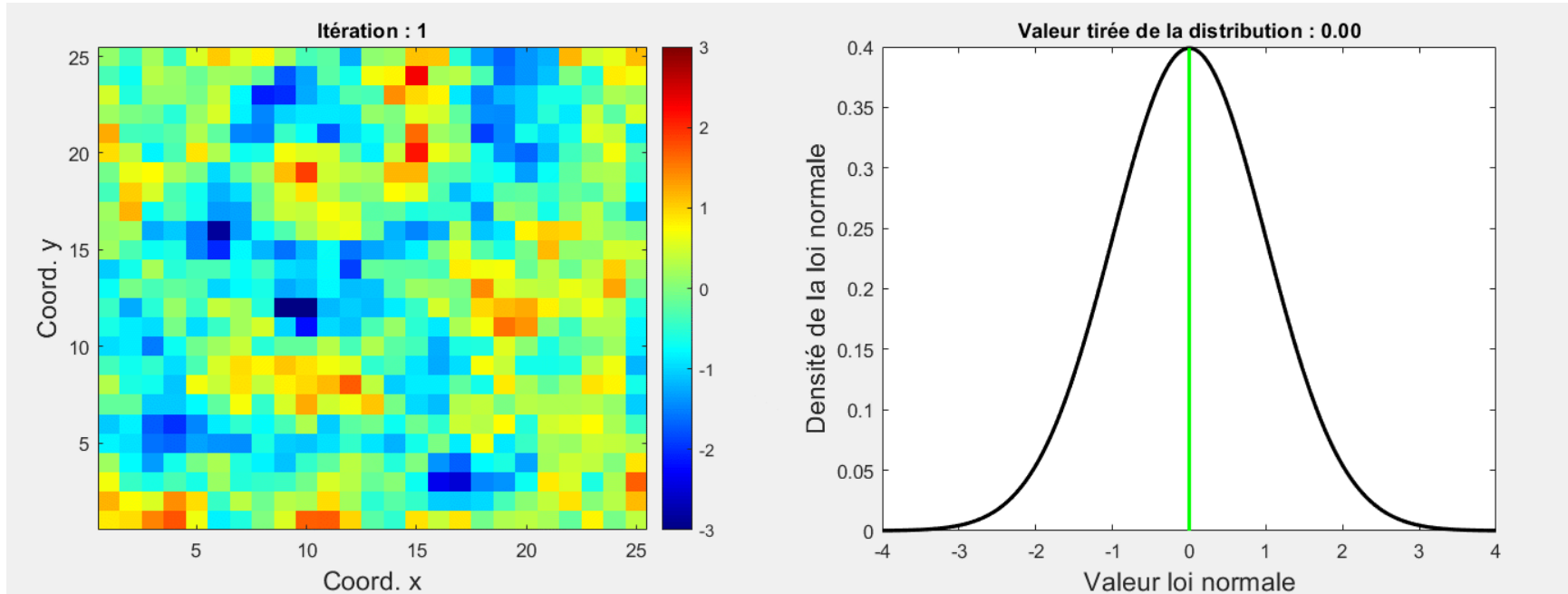
Moyennes avant et après recuit



## 2. Recuit simulé

### Animation :

On cherche à obtenir un champ dont la somme de chaque ligne ou colonne donne une valeur nulle. Les nouvelles valeurs candidates sont tirées d'une loi normale de moyenne nulle et de variance unitaire (soit la distribution mère).

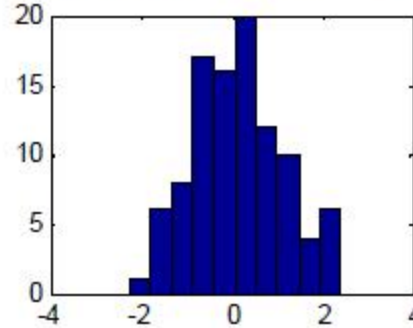
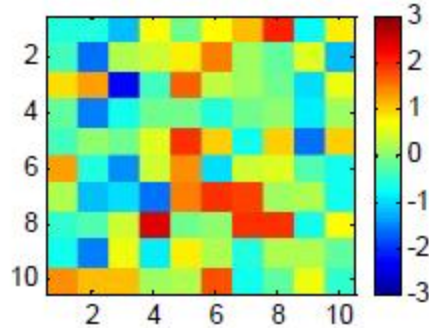


# 6. Recuit simulé

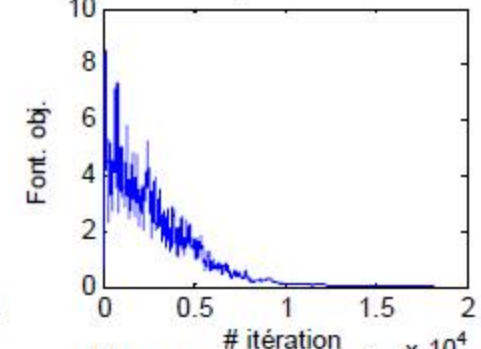
Exemple : Placer des valeurs dans une matrice de façon à assurer une moyenne de deux ( $m = 2$ ) en lignes et en colonnes. Tirage d'une  $N(0, 25)$ .

Recuit simulé données normales, 10x10, moyennes lignes et colonnes = 2

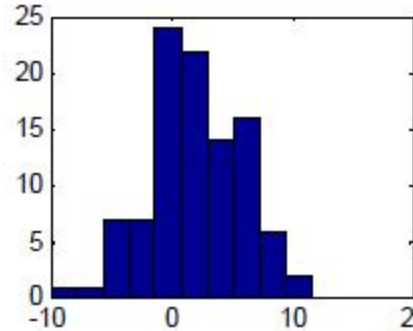
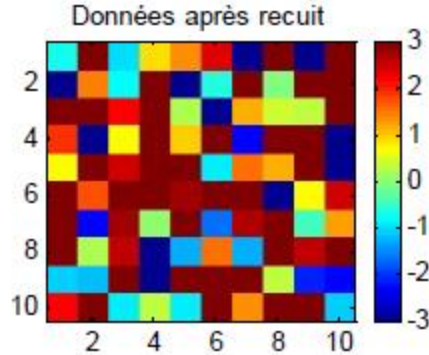
Avant recuit



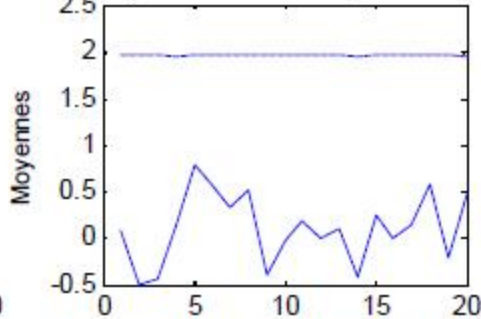
Fonction objective vs itération



Après recuit



Moyennes avant et après recuit



Moyennes 1-10: colonnes, 11-20: lignes

# 7. Post-conditionnement par krigeage simple

## Résumé des algorithmes

Méthode	Complexité (non-conditionnelle)	Complexité de réalisations additionnelles	Valide pour des champs
LU	$n^3$	$n^2$	Petit
SGS	$m^3n$	$m^3n$	Grand à très grand
FFTMA	$n \log(n)$	$n \log(n)$	Grand
Bandes tournantes	$n$	$N$	Très grand

n : nombre de points à simuler

m : nombre de points utilisés dans le krigeage

Quoi faire pour rendre conditionnelles les méthodes FFTMA et les bandes tournantes?

# 7. Post-conditionnement par krigeage simple

## Équations

$Z_S$  : Champ simulé non conditionnelle à un point de la grille de simulation

$Z_i$  : Champ simulé non conditionnelle à un point observation

$Z_{SC}$  : Champ simulée à un point de grille conditionnellement aux données

$Z_S^*$  : Champ krigé à un point de grille utilisant les valeurs simulées aux points observations

$Z^*$  : Champ krigé à un point de grille utilisant les valeurs observées

$Z$  : Champ vrai à un point de grille

$$Z_{SC} = Z^* + (Z_S - Z_S^*) \longrightarrow \text{Le champ krigé + un champ d'erreur simulée}$$

$$Z_{SC} = Z_S + (Z^* - Z_S^*) \longrightarrow \text{Le champ simulé + le champ de krigeage de la différence aux points d'observations}$$

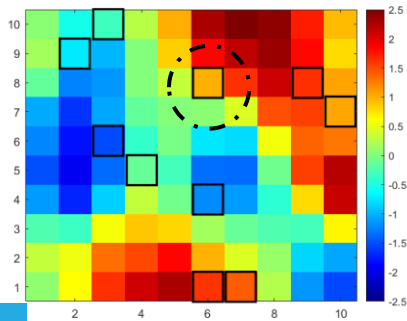
# 7. Post-conditionnement par krigage simple

## Équations

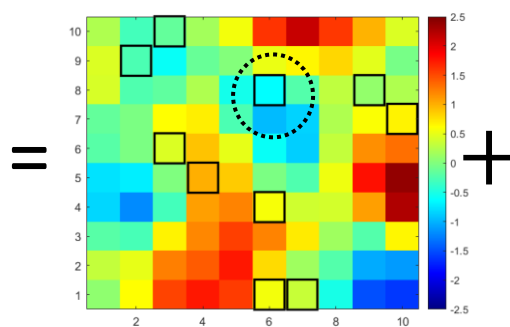
Le post-conditionnement par krigage permet de reproduire exactement les données observées. (Pour l'exemple, les carrés noirs représentent la localisation des données de conditionnement.)

$$Z_{SC} = Z_S + Z_C^k - Z_S^k$$

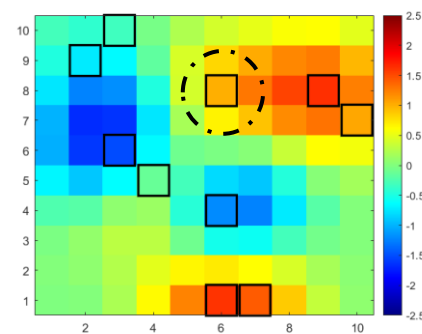
Champ simulé conditionnel



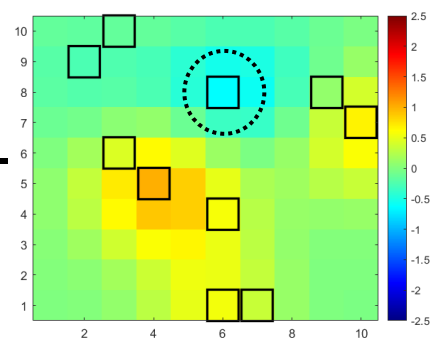
Champ simulé non conditionnel



Champ krigé à partir des données de conditionnement



Champ krigé à partir des données simulées





## 7. Post-conditionnement par krigeage simple

### **Exercice en équipe**

5) Réaliser un post-conditionnement par krigeage simple

# 7. Post-conditionnement par krigeage simple

## Propriétés

Non-conditionnelle	Conditionnelle
$E[Z_S] = m$	$E[Z_{SC}] = Z^*$
$Var(Z_S) = \sigma^2$	$Var(Z_{SC}) = \sigma_{KS}^2$
$Var(Z - Z_S) = 2\sigma^2$	$Var(Z - Z_{SC}) = 2\sigma_{KS}^2$

$Z_S$  : valeur simulée non conditionnelle à un point de la grille de simulation

$Z_{SC}$  : valeur simulée à un point de grille conditionnellement aux données

$Z$  : valeur vraie à un point de grille