POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Questionnaire
Examen intra #2
MTH1101

Identification de l'étudiant		
Nom:	Prénom:	
Signature:	Matricule:	Groupe:

Sigle et titre du cours	Groupe	Trimestre
MTH1101 – Calcul I	Tous	A2019

Professeurs	Local	Téléphone
Guy Jomphe	A-520.36	5155

Date	Heures	Durée
Dimanche 10 novembre 2019	13h00-15h00	2h00

Calculatrices, cellulaires et agendas électronique sont interdits. Seul un aide-mémoire sur une feuille manuscrite $8\frac{1}{2} \times 11$ non photocopiée est autorisé. Cet examen contient 5 questions sur un total de 14 pages, excluant celle-ci. Vous devez répondre sur le questionnaire et le remettre. Justifiez vos réponses.

Par souci d'équité envers tous les étudiants, le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons (données manquantes, données erronées, etc.), veuillez le justifier (maximum 2 lignes) et passez à la question suivante.

Réservé

1.	/3
2.	/4
3.	/6
4.	/4
5.	/6

Total:	/23

Exercice 1 : [3] points

Soit $z = a + b\,i$ un nombre complexe où $a, b \in \mathbb{R}$.

(0.5 pt) a) Simplifiez l'expression $\dfrac{z + \bar{z}}{2}$. Rép : a

(0.5 pt) b) Simplifiez l'expression $\dfrac{z - \bar{z}}{2\,i}$. Rép : b

(1 pt) c) Soit r le module et θ l'argument de z. Écrivez l'expression $\dfrac{(z - \bar{z})}{(z + \bar{z})\,i}$ en fonction de r et de θ.

Rép : $\dfrac{b}{a}$ et $\dfrac{b}{a} = \tan(\theta)$

(1 pt) d) Exprimez le nombre w^{13} où $w = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$ sous forme exponentielle et cartésienne.

Rép :

$$\begin{aligned} w^{13} &= e^{\frac{\pi i}{6}} && \text{(forme exponentielle)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = w && \text{(forme cartésienne)} \end{aligned}$$

Exercice 2 : [4] points

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0), \qquad \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(1 pt) a) Trouvez la valeur de α pour laquelle la fonction f soit continue en $(0,0)$?

Rép : $\alpha = 0$

(2 pts) b) Évaluez $\nabla f(0,1)$.

Rép : $\nabla f(0,1) = 1\,\vec{\imath} + 0\,\vec{\jmath}$

(1 pt) c) Pour $\alpha = 1$ déterminez l'ensemble de niveau $E_c = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\right\}$ lorsque $c = 0$.

Rép : $E_c = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ ou } y = 0\right\} \setminus \left\{(0,0)\right\}$

Exercice 3 : [6] points

Le tableau ci-dessous donne les mesures de la température $T(x, y)$ en certains points (x, y) d'une plaque mince. Les unités ont été omises.

$T(x, y)$

y \ x	2	2.5	3
1	0	2	2
0	4	6	3
-1	12	15	10

(2 pts) a) Donnez la meilleure estimation de $T_x(2, -1)$ et $T_y(2, -1)$.

Rép : $T_x(2, -1) = 6, T_y(2, -1) = -8$

(2 pts) b) Donnez la meilleure estimation de $T_{xy}(2, -1)$.

Rép : $T_{xy}(2, -1) = -2$

(2 pts) c) Estimez la dérivée directionnelle de $T(x, y)$ au point $(2, -1)$ lorsqu'on se déplace vers le point $(1, -2)$.

Rép : $T_{\vec{u}}(2, -1) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Exercice 4 : [4] points

Soit z et f deux fonctions différentiables définies par

$$z(x, y) = x^2 \times f(u) \qquad \text{où} \quad u = x + y^2$$

(2 pts) a) Calculez $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en fonction de $x, y, f(u), \dfrac{df}{du}$.

Rép : $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2\,x\,f(u) + x^2\,\dfrac{\partial f}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2\,y\,x^2\,\dfrac{\partial f}{\partial u}$

(2 pts) b) Calculez $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ en fonction de $x, y, f(u), \dfrac{df}{du}, \dfrac{d^2 f}{du^2}$.

Rép : $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\,f(u) + 4x\dfrac{\partial f}{\partial u} + x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}$

Exercice 5 : [6] points

Pour chacune des sous-questions ci-dessous, veuillez choisir une seule réponse parmi celles proposées et **reportez celle-ci dans le tableau à la fin de la question**. Aucune justification n'est demandée pour cette question.

(1 pt) 5.1)

L'argument d'une des racines cinquième du nombre complexe z est $\frac{13\pi}{15}$. Parmi toutes les racines cinquièmes de z, combien d'entre-elles sont telles que la partie réelle et la partie imaginaire sont toutes les deux strictement positive ?

a) 0 c) 2 e) aucune de ces réponses

b) 1 d) 3

Rép : c)

(1 pt) 5.2)

Considérons la surface

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 2y^2 = 1 - y + z\}.$$

Alors un vecteur orthogonal à la surface S au point $(2, 1, 2)$ est

a) $4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 1\vec{k}$ c) $2\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} - 1\vec{k}$ e) aucune de ces réponses

b) $4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 1\vec{k}$ d) $2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 5\vec{k}$

Rép : b)

(1 pt) 5.3)

Une fonction $L(x, y)$ qui permet de linéariser la fonction

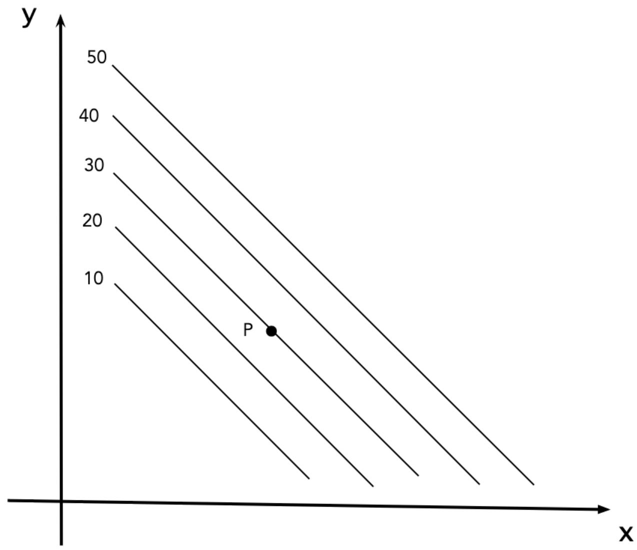
$$z = f(x, y) = \sqrt{2x + 2y} \qquad \text{au point } (1, 1) \text{ est :}$$

a) $4(x-1) + 4(y-1)$ c) $2 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1)$ e) aucune de ces réponses

b) $-2 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1)$ d) $2 + 4(x-1) + 4(y+1)$

Rép : c)

(1 pt) 5.4) La figure suivante montre les courbes de niveau également espacées d'une fonction f.



La valeur $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P)$ est

a) strictement positive c) nulle e) aucune de ces réponses
b) strictement négative d) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P)\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(P)$

Rép : c)

(1 pt) 5.5) La pression P agissant en un point de coordonnées (x, y) d'une plaque mince est donnée par la relation

$$P(x, y) = x^2y + y^3,$$

et les mesures sur x et y sont précises 0.1 cm près. À l'aide de la différentielle, une estimation de la variation de pression en valeur absolue au point $(2, 1)$ est

a) $\dfrac{3}{10}$ c) $\dfrac{11}{10}$ e) aucune de ces réponses
b) $-\dfrac{11}{10}$ d) 10^{-6}

Rép : c)

(1 pt) 5.6) Les courbes de niveau de la fonction $f(x, y) = \sin(x - y)$ sont

a) des droites de pente 1 c) des droites de pente -1 e) aucune de ces réponses
b) des courbes sinusoïdales d) toutes vides

Rép : a)

Réponses :

Q5.1)	Q5.2)	Q5.3)	Q5.4)	Q5.5)	Q5.6)

Brouillon :