MTH8207 – Mathématiques des éléments finis

Serge Prudhomme

Professeur
Département de mathématiques
Polytechnique Montréal

Cours 7

Sommaire du cours #7

- Estimation a posteriori des erreurs :
  - Méthode explicite pour estimer la norme du résiduel.
  - Méthode pour estimer l'erreur dans quantité d'intérêt basée sur la solution du problème adjoint.
- Adaptation des maillages éléments finis.

Estimation a posteriori des erreurs

On veut quantifier l'erreur $e(x) = u(x) - u_h(x)$:

$$\text{Trouver } u \in V \text{ telle que} \quad B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V$$
$$\text{Trouver } u_h \in V^h \text{ telle que} \quad B(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V^h$$

Deux approches fondamentales :

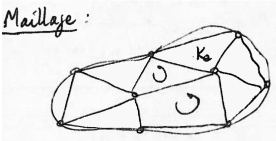
1) Estimation des erreurs en normes globales (H^1, L^2, ou normes dites d'énergie).
Premiers travaux dès la fin des années 1970.

2) Estimation par rapport à des grandeurs physiques (que l'on appelle aussi quantités d'intérêt), par exemple, la solution en un point donné $x_0 \in \Omega$, la moyenne locale de la solution dans un sous-domaine $\omega \subset \Omega$, le flux à travers certaines parties de la frontière, etc.
Premiers travaux dès le milieu des années 1990.

Sources d'erreur

1) Erreurs de discrétisation du domaine
2) Erreurs de quadrature

$$
\begin{aligned}
B(u_h, v_h) &= \int_\Omega u_h v_h dx \\
&\approx \int_{\Omega_h} u_h v_h dx = \sum_K \int_K u_h v_h dx \\
&\approx \sum_K \sum_g \omega(\xi_g) u_h(\xi_g) v_h(\xi_g) |J(\xi_g)|
\end{aligned}
$$



$\Omega_h = \cup_e K_e \neq \Omega$

3) Erreurs dans la solution du système $KU = F$ (e.g. erreurs d'arrondi si solveur direct ou erreurs de convergence si solveur itératif)
4) Approximation de la solution u par des fonctions u_h continues et polynomiales par morceaux

$\Rightarrow$ On ignore ici les sources d'erreur #1, #2, et #3 et se concentre sur #4!

Relation entre l'erreur et le résiduel

$$\boxed{\text{Trouver } e \in V \text{ telle que} \quad B(e,v) = \mathcal{R}_h(v) \equiv F(v) - B(u_h, v), \quad \forall v \in V}$$

The résiduel $\mathcal{R}$ est une forme linéaire (fonctionnelle) de V dans $\mathbb{R}$.

$$\|\mathcal{R}\| = \sup_{v \neq 0 \in V} \frac{|\mathcal{R}(v)|}{\|v\|_V} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\mathcal{R}(e)|}{\|e\|_V} \leq \|\mathcal{R}\| \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}(e) \leq \|\mathcal{R}\| \|e\|_V$$

Coercivité de B :

$$\alpha \|e\|_V^2 \leq B(e,e) = \mathcal{R}(e) \leq \|\mathcal{R}\| \|e\|_V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha \|e\|_V \leq \|\mathcal{R}\|}$$

Continuité de B :

$$\|\mathcal{R}\| = \sup_{v \neq 0 \in V} \frac{|\mathcal{R}(v)|}{\|v\|_V} = \sup_{v \neq 0 \in V} \frac{|B(e,v)|}{\|v\|_V} \leq \sup_{v \neq 0 \in V} \frac{M \|e\|_V \|v\|_V}{\|v\|_V} = M \|e\|_V$$

On a donc :

$$\boxed{\alpha \|e\|_V \leq \|\mathcal{R}\| \leq M \|e\|_V}$$

Méthodes d'estimation d'erreur a posteriori

$$\boxed{\alpha\|e\|_V \le \|\mathcal{R}\| \le M\|e\|_V} \qquad \text{où } \|\mathcal{R}\| = \sup_{v\neq 0\in V} \frac{|\mathcal{R}(v)|}{\|v\|_V}$$

Remarques :

- $\|\mathcal{R}\|$ est une bonne mesure de l'erreur $\|e\|_V$ si $\alpha \approx 1$ et $M \approx 1$. En particulier, $\|\mathcal{R}\| = \|e\|_V$ si $\alpha = M = 1$.
- Puisque $\mathcal{R}$ est le terme source dans l'équation d'erreur, c'est le terme à contrôler dans une stratégie d'adaptation de maillage.

L'objectif est alors de trouver une norme $\|\cdot\|_V$ (norme énergie), de sorte que α et M soient proches de 1, et de développer des méthodes efficaces pour estimer la norme $\|\mathcal{R}\|$:

- Méthodes explicites : aucun problème supplémentaire à résoudre.
- Méthodes implicites : résolution de problèmes auxiliaires sur chaque élément ou sur des sous-domaines de Ω.

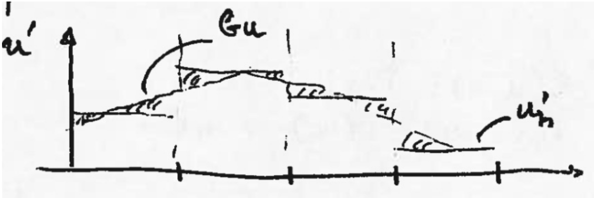
Méthodes d'estimation d'erreur a posteriori

Les "Recovery-type methods" :

Dans la méthode des éléments finis, puisque les fonctions u_h sont continues par morceaux, les dérivées premières, e.g. les gradients de u_h, sont discontinues à l'interface des éléments.

L'idée de ces méthodes est alors de "reconstruire" des dérivées continues par morceaux Gu_h en se servant de u_h, qui soient de meilleures approximations de u' que u_h'.

$$\|e\| = \|e'\|_{L^2} \approx \sqrt{\int_\Omega (Gu_h - u_h')^2 dx}$$



Méthode explicite

Un exemple en 1D :

$$\boxed{\begin{aligned} -\varepsilon u'' + u &= f, \quad \forall x \in \Omega = (0,1) \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 0. \end{aligned}}$$

Forme faible :

$$\boxed{\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que : } \underbrace{\int_0^1 \varepsilon u' v' + uv \, dx}_{B(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 fv \, dx}_{F(v)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)}$$

Définition du résiduel :

$$\boxed{\mathcal{R}(v) = F(v) - B(u_h, v) = \int_0^1 fv - \varepsilon u_h' v' - u_h v \, dx}$$

Méthode explicite

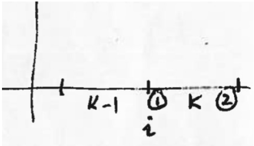
$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(v) &= \int_0^1 fv - \varepsilon u_h' v' - u_h v \, dx = \sum_{K=1}^{N_e} \int_K fv - \varepsilon u_h' v' - u_h v \, dx \\
&= \sum_{K=1}^{N_e} \left[\int_K \left(fv + \varepsilon u_h'' v - u_h v \right) dx - \varepsilon u_h'(x) v(x) \Big|_{x_{1,K}}^{x_{2,K}} \right] \\
&= \sum_{K=1}^{N_e} \int_K \underbrace{\left(f + \varepsilon u_h'' - u_h \right)}_{= r_K(x)} v \, dx + \sum_{i=2}^{N-1} \underbrace{\left[\varepsilon u_h'(x_i^+) - \varepsilon u_h'(x_i^-) \right]}_{= j_i} v(x_i) \\
&= \sum_{K=1}^{N_e} \int_K {\color{blue} r_K(x) v} \, dx + \sum_{i=2}^{N-1} {\color{red} j_i v(x_i)}
\end{aligned}$$

Résiduel intérieur :

$$r_K(x) = (f + \varepsilon u_h'' - u_h) \in L^2(K), \forall K$$

Saut interfacial (jump) :

$$j_i = \varepsilon u_h'(x_i^+) - \varepsilon u_h'(x_i^-), \forall i = 2, \ldots, N-1$$



Méthode explicite

Soit $v_h \in V^h \subset H_0^1(\Omega)$:

$$\boxed{\mathcal{R}(v) = \mathcal{R}(v - v_h) = \sum_{K=1}^{N_e} \int_K r_k \left[v - v_h\right] dx + \sum_{i=2}^{N-1} j_i \left[v(x_i) - v_h(x_i)\right]}$$

On choisit $v_h = I_h v$, ce qui implique que $v(x_i) - I_h v(x_i) = 0$, $\forall i = 1, \ldots, N$.
Et donc, dans ce cas :

$$\mathcal{R}(v) = \sum_{K=1}^{N_e} \int_K r_k \left[v - I_h v\right] dx$$

Soit :

$$\left|\mathcal{R}(v)\right| \leq \sum_{K=1}^{N_e} \int_K \left|r_k \left[v - I_h v\right]\right| dx \leq \sum_{K=1}^{N_e} \|r_k\|_{L^2(K)} \|v - I_h v\|_{L^2(K)}$$

Méthode explicite

Estimation de l'erreur d'interpolation $\|v - I_h v\|$:

$$\|v - I_h v\|_{L^2(K)} \leq C_I h_K \|v\|_{H^1(K)}$$

où C_I est une constante d'interpolation indépendante de h_K.

$$\left|\mathcal{R}(v)\right| \leq C_I \sum_{K=1}^{N_e} \underbrace{h_K \|r_k\|_{L^2(K)}}_{a_K} \underbrace{\|v\|_{H^1(K)}}_{b_K}$$

En utilisant la relation du produit scalaire des deux vecteurs $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{N_e})$ et $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_{N_e})$:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_K a_k b_k \leq \sqrt{\sum_K a_K^2} \sqrt{\sum_K b_K^2}$$

on obtient :

$$\left|\mathcal{R}(v)\right| \leq C_I \sqrt{\sum_K h_K^2 \|r_k\|^2_{L^2(K)}} \sqrt{\sum_K \|v\|^2_{H^1(K)}}$$

Méthode explicite

Puisque

$$\sum_K \|v\|^2_{H^1(K)} = \sum_K \int_K v^2 + v'^2 dx = \int_\Omega v^2 + v'^2 dx = \|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \|v\|^2_{H^1}$$

on a :

$$\frac{|\mathcal{R}(v)|}{\|v\|_{H^1}} \leq C_I \sqrt{\sum_K h_K^2 \|r_k\|^2_{L^2(K)}}$$

On remarque que le terme à droite de l'inégalité est indépendant de v, donc :

$$\boxed{\|\mathcal{R}\| = \sup_{v \neq 0 \in H^1(\Omega)} \frac{|\mathcal{R}(v)|}{\|v\|_{H^1}} \leq C_I \sqrt{\sum_K h_K^2 \|r_k\|^2_{L^2(K)}}}$$

Finalement, on utilise :

$$\|e\|_{H^1} \leq \frac{1}{\alpha} \|\mathcal{R}\| \leq C_I \times \frac{1}{\alpha} \sqrt{\sum_K h_K^2 \|r_k\|^2_{L^2(K)}}$$

Méthode explicite

Estimateur : En général, $C_I \approx 1$, on peut alors définir un estimateur de l'erreur comme :

$$\boxed{\eta = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\sum_K h_K^2 \|r_k\|_{L^2(K)}^2}}$$

Il est important de choisir une norme telle que la constante de coercivité α soit le plus proche de 1.

On rappelle que :

$$\|r_k\|_{L^2(K)}^2 = \int_K (f + \varepsilon u_h'' - u_h)^2 dx$$

On mesure la performance de l'estimateur par l'index d'efficacité :

$$\boxed{\lambda = \frac{\eta}{\|e\|}}$$

Un bon estimateur d'erreur a de préférence un index $\lambda \geq 1$ et proche de 1.

Méthode explicite

Adaptivité du maillage :

On décompose l'estimateur en contributions élémentaires :

$$\boxed{\eta_K = h_K \|r_K\|_{L^2(K)}}$$

de sorte que

$$\eta = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\sum_K \eta_K^2}$$

Exemple d'indicateur de raffinement :

$$\boxed{\gamma_K = \frac{\eta_K}{\max_K \eta_K}}$$

On note que $0 \le \gamma_K \le 1$.

Si $\gamma_K \ge 0.5$, on décompose l'élément K en 2 éléments de taille égale.

Estimation d'erreur en quantité d'intérêt

Définition :
Une fonctionnelle, en mathématiques, est une application d'un espace vectoriel – généralement un espace vectoriel de fonctions – vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Lorsqu'une fonctionnelle est linéaire, on parle de forme linéaire.

Exemples de quantités d'intérêt (fonctionnelles) :

Moyenne de u sur Ω : $$Q(u) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx$$

Moyenne locale sur $\omega \subset \Omega$: $$Q(u) = \frac{1}{|\omega|}\int_\omega u\,dx$$

Valeur de u en un point x_0 : $$Q(u) = u(x_0) = \int_\Omega \delta(x - x_0)u(x)\,dx$$

Énergie cinétique (si u = vitesse) : $$Q(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho u^2\,dx$$

Flux à travers la frontière Γ_N : $$Q(u) = \int_{\Gamma_N} n \cdot u\,ds$$

Estimation d'erreur en quantité d'intérêt

De manière générale, toutes les fonctionnelles linéaires sur un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$ peuvent s'écrire :

$$Q : \ V \to \mathbb{R}, \qquad Q(u) = \int_\Omega k_i(x) u(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} k_f(s) u(s)\, ds$$

1) Moyenne globale : $k_i(x) = 1/|\Omega|$ et $k_f(s) = 0$.
2) Moyenne locale : $k_i(x) = 1/|\omega|$ si $x \in \omega$ et 0 sinon, et $k_f(s) = 0$.
3) Valeur en un point : $k_i(x) = \delta(x - x_0)$ et $k_f(s) = 0$.
4) Flux : $k_i(x) = 0$ et $k_f(s) = n \cdot$ si $s \in \Gamma_N$ et 0 sinon.

Problème adjoint (dual)

Soit le problème primal sous forme faible :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ telle que } \quad B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V$$

On définit le problème adjoint associé à une fonctionnelle Q linéaire comme :

$$\boxed{\text{Trouver } p \in V \text{ telle que } \quad B(v, p) = Q(v), \quad \forall v \in V}$$

où p est appelée la solution adjointe.

On obtient alors la relation fondamentale :

$$\boxed{Q(u) = B(u, p) = F(p)}$$

de laquelle on peut évaluer l'erreur dans la quantité d'intérêt :

$$\boxed{\mathcal{E} = Q(u) - Q(u_h) = F(p) - B(u_h, p) = \mathcal{R}(p)}$$

Estimation de l'erreur $\mathcal{E}$

$$\boxed{\mathcal{E} = Q(u) - Q(u_h) = \mathcal{R}(p)}$$

La solution p du problème adjoint indique comment les sources d'erreur $\mathcal{R}$ affectent l'erreur $\mathcal{E}$ dans l'approximation $Q(u_h)$ de la quantité d'intérêt $Q(u)$.

Approximation de p et de $\mathcal{E}$:

- On ne connait la solution p que pour des problèmes simples.
- Si p_h est une approximation de $p \in V^h$, alors, par la condition d'orthogonalité, on a $\mathcal{R}(p_h) = 0$.
- Il faut donc trouver une approximation de la solution adjointe p dans un espace EF plus riche que $V^h = V^{h,p}$ (où p est ici le degré des polynômes). On choisit par exemple $\widetilde{V} = V^{h/2,p}$ ou $\widetilde{V} = V^{h,p+1}$.

$$\boxed{\text{Trouver } \tilde{p} \in \widetilde{V} \text{ telle que} \quad B(v, \tilde{p}) = F(v), \quad \forall v \in \widetilde{V}}$$

- La quantité $\eta = \mathcal{R}(\tilde{p})$ fournit une approximation de $\mathcal{E}$.

Adaptation du maillage

L'idée est de décomposer l'estimateur η en des contributions η_K sur chacun des éléments K du maillage.
On peut suivre l'approche utilisée pour la méthode explicite :

$$\begin{aligned}
\eta &= \mathcal{R}(\tilde{p}) = \mathcal{R}(\tilde{p} - I_h\tilde{p}) \\
&= \sum_{K=1}^{N_e} \int_K r_k \left[\tilde{p} - I_h\tilde{p}\right] dx + \sum_{i=2}^{N-1} j_i \left[\tilde{p}(x_i) - I_h\tilde{p}(x_i)\right] \\
&= \sum_{K=1}^{N_e} \int_K r_k \left[\tilde{p} - I_h\tilde{p}\right] dx \\
&\leq \sum_{K=1}^{N_e} \|r_k\|_{L^2(K)} \|\tilde{p} - I_h\tilde{p}\|_{L^2(K)}
\end{aligned}$$

On définit alors les contributions élémentaires :

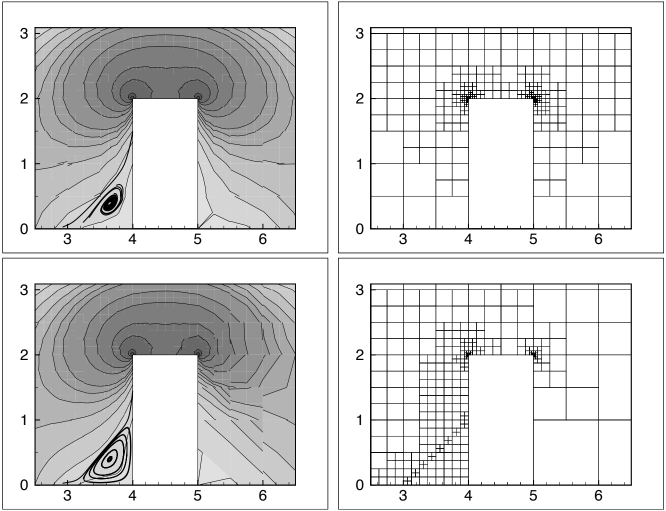
$$\boxed{\eta_K = \|r_k\|_{L^2(K)} \|\tilde{p} - I_h\tilde{p}\|_{L^2(K)}}$$

Flow around obstacle (Stokes flow)

Top plots:
Residual-based Error Estimation and adaptivity

Bottom plots:
Goal-Oriented Error Estimation and adaptivity

QoI = averaged vorticity in lower left corner.



Résumé du cours

- Les méthodes d'estimation a posteriori permettent de quantifier les erreurs d'approximation.
- Il existe deux types d'approches : les approches globales, par rapport à des normes, et les approches par rapport à des quantités d'intérêt.
- Les approaches globales sont en général basées sur l'estimation de la norme du résiduel $\|\mathcal{R}\|$, puisque pour des problèmes bien posés, cette dernière est équivalente à la norme de l'erreur $\|e\|_V$.
- Les approaches pour estimer l'erreur par rapport à des quantités d'intérêt sont basées sur l'approximation de la solution du problème adjoint et fournissent un estimateur construit comme le produit du résiduel et de la solution duale.
- Les estimateurs d'erreur peuvent être décomposés en contributions élémentaires afin de servir d'indicateurs de raffinement.