

Travaux dirigés MTH1101 - Calcul I
TD n°7
Nathanaël Perrin

Pour le vendredi 05 novembre

Exercices portant sur les dérivées partielles, la dérivée directionnelle, le gradient, et les vecteurs normaux et

1. On suppose que les fonctions suivantes ont des dérivées partielles secondes continues. Montrer que toute fonction de la forme $z = f(x + at) + g(x - at)$, où x et t sont des variables et a un réel fixé, est une solution de l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

(Suggestion : poser $u = x + at$ et $v = x - at$ et penser à la dérivée en chaîne)

2. On approfondit le problème du marcheur du TD précédent : $A(x, y) = 3x^2 - 2xy^2 - 4x + y + 20$
- (a) À partir de $P = (0, 1, 21)$, dans quelle direction (dans le plan Oxy orthonormé), le marcheur doit se diriger pour grimper le plus rapidement possible ? Quelle est la pente dans cette direction ?
 - (b) Un chalet est situé à $Q = (3, 2, 67)$. À partir de P , le marcheur doit-il commencer par monter ou descendre s'il se dirige vers le chalet ?
 - (c) Donner une direction suivant laquelle le marcheur peut se diriger à partir de P sans changer d'altitude.
 - (d) Donner un vecteur normal \vec{N} à la surface au point $P = (0, 1, 21)$
 - (e) Donner les équations paramétriques de la droite normale à la surface au point P et déterminer les coordonnées du point de cette droite pour lequel l'altitude est nulle.
3. La dérivée directionnelle de $f(x, y, z)$ en un point P donné est la plus grande dans la direction du vecteur $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ (dans le plan $Oxyz$ orthonormé). Dans cette direction, la valeur de la dérivée est $2\sqrt{3}$.
- (a) Trouver $\nabla f(P)$
 - (b) Trouver la dérivée directionnelle de $f(x, y, z)$ en P dans la direction $\vec{i} + \vec{j}$
4. La dérivée directionnelle de $f(x, y)$ en un point $P = (1, 2)$ dans la direction $\vec{i} + \vec{j}$ (dans le plan Oxy orthonormé) est de $2\sqrt{2}$ et dans la direction du vecteur $-2\vec{j}$ est de -3 . Quelle est la dérivée directionnelle de $f(x, y)$ est dans la direction $-\vec{i} - 2\vec{j}$?
5. Soit le cône parabolique d'équation $z = x^2 + y^2$ et $P = (1, 1, 2)$ un point du cône.
- (a) Donner l'équation du plan tangent du cône au point $P = (1, 1, 2)$.
 - (b) Quel lien relie les composantes du gradient d'une fonction quelconque et les coefficients des variables x, y et z dans l'équation du plan tangent ?