GLQ3401 : Troisième partie
Cours 9 : Géostatistique multivariable et cokrigeage

POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

UNIVERSITÉ
D'INGÉNIERIE

Objectifs

- Comprendre la mécanique du cokrigeage (généralisation du krigeage au cas multivariable) ;
- Analyser et expliquer les situations où le cokrigeage peut être utile ;
- Calculer des variogrammes croisés et covariances croisées ;
- Définir les paramètres d'un modèle linéaire de corégionalisation et vérifier l'admissibilité du modèle ;
- Interpréter les résultats d'un cokrigeage et de différentes formes de validation croisées.

Plan du cours

1. Mise en contexte
2. Cokrigeage simple et ordinaire
   2.1. Cokrigeage simple
   2.2. Cokrigeage ordinaire
   2.3. Forme matricielle
3. Covariance croisée et variogramme croisé
   3.1. Covariance croisée
   3.2. Variogramme croisé
4. Modèles admissibles
5. Cas où le cokrigeage peut être utile

1. Mise en contexte

Idée : Améliorer les estimations obtenues par krigeage en utilisant l'information fournie par d'autres variables (données secondaires) que la variable principale.

Variable principale : Ce que l'on cherche à estimer (noté Z)

Variable(s) secondaire(s) : Données de terrain corrélées avec la variable principale. Ajoute une information supplémentaire sur la structure spatiale de la variable principale (noté $Y_1, \dots, Y_n$).

Objectif : Obtenir une estimation qui respecte à la fois les données principales et toutes les données secondaires.

Avez-vous des idées de variables principales et de variables secondaires communs en géologie ?

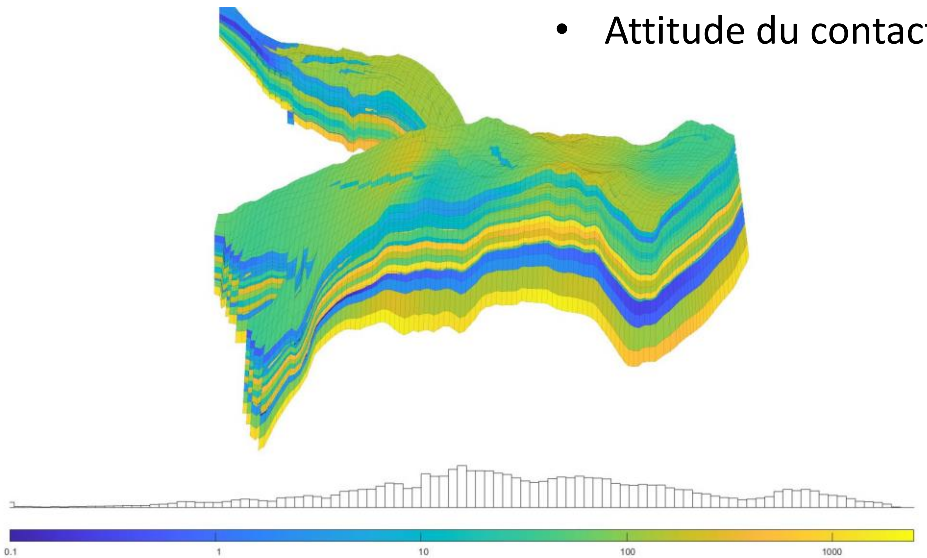
1. Mise en contexte

Exemples :

1) Estimer la position du sommet d'un réservoir pétrolier ou gazier

Variable principale : Position du sommet observé dans *quelques* forages

Variable(s) secondaire(s) :
- Positions interprétées par sismiques
- Contact(s) géologique(s) estimé(s) par géophysique
- Attitude du contact dans les forages



Tiré de : K.-A. Lie. An Introduction to Reservoir Simulation Using MATLAB/GNU Octave: User Guide for the MATLAB Reservoir Simulation Toolbox (MRST). Cambridge University Press, 2019.

1. Mise en contexte

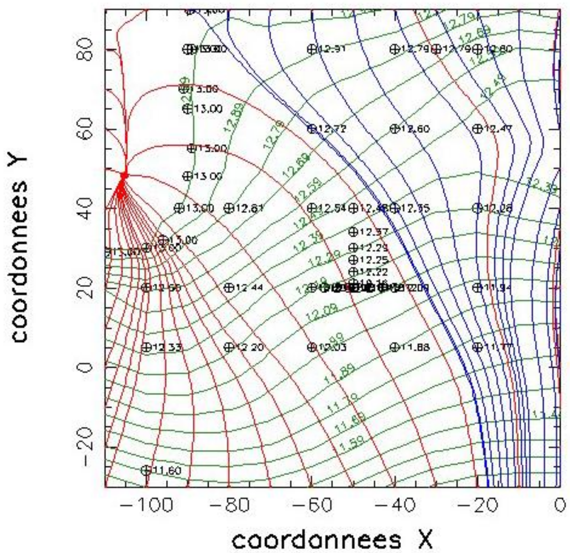
Exemples :

2) <u>Produire une carte de charges hydraulique qui soit réaliste</u>

Variable principale : Surface piézométrique dans *quelques* puits

Variable(s) secondaire(s) :

- Surface topographique (aquifère à nappe libre)
- Frontières imperméables connues
- Vecteurs gradients connus (sens de l'écoulement)
- Mesures géoradar (contacts géologiques)



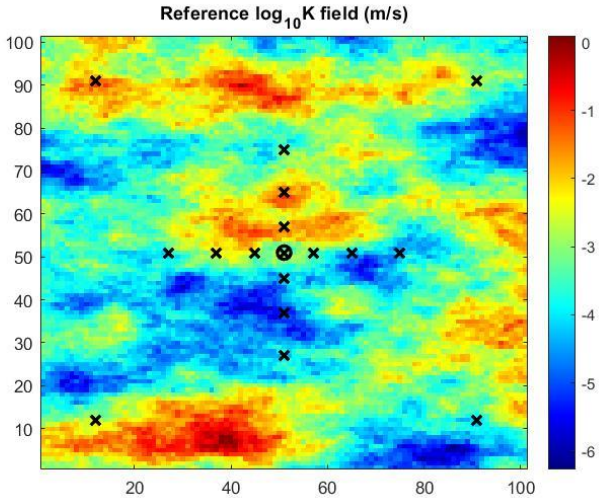
Exemples :

3) Modélisation de la transmissivité d'un aquifère

Variable principale : Transmissivités dans un modèle d'éléments finis ou de différences finies

Variable(s) secondaire(s) :

- La transmissivité (ou conductivités hydrauliques) obtenue par *slug-test,* test de pompage, courbes granulométriques, capacité spécifique de puits
- Frontières hydrauliques connues
- Charges hydrauliques connues (permanent et transitoire)



Ici, les variables secondaires reflètent la variable principale à des échelles différentes (ponctuelle, local, radial, régional).

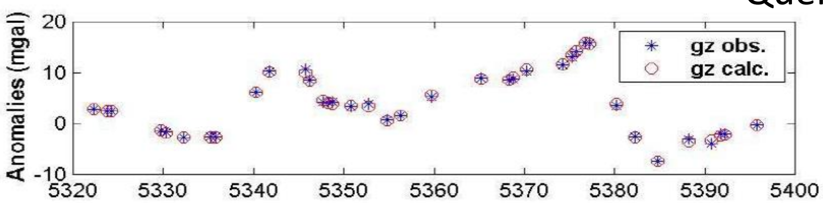
Exemples :

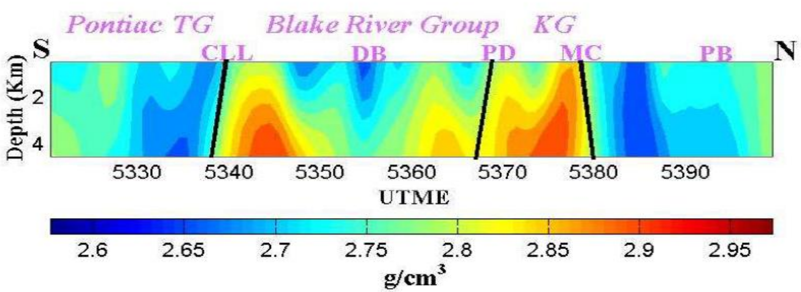
4) Inversion de données gravimétriques

Variable principale : Densité pour un modèle de blocs du sous-sol

Variable(s) secondaire(s) :

- Anomalie gravimétrique mesurée au sol
- Anomalie gravimétrique aéroportée
- Quelques mesures de densité en forage





Note : on n'a souvent aucune observation de la variable principale pour ce cas.

Exemples :

5) Inversion de tomographies radar

Variable principale : Modèle de 'lenteurs' pour un modèle de blocs du sous-sol dans le plan défini par 2 forages coplanaires

Variable(s) secondaire(s) :
- Temps de parcours émetteur-récepteur

Note : on n'a souvent aucune observation de la variable principale pour ce cas.

1. Mise en contexte

Exemples :

6) Cartographie de la température de l’eau en surface

Variable principale : Température de l’eau mesurée directement

Variable(s) secondaire(s) :
- Température obtenues par interprétation du signal spectral d’un satellite

7) Cartographie de la bathymétrie

Variable principale : Mesures directes (bateau)

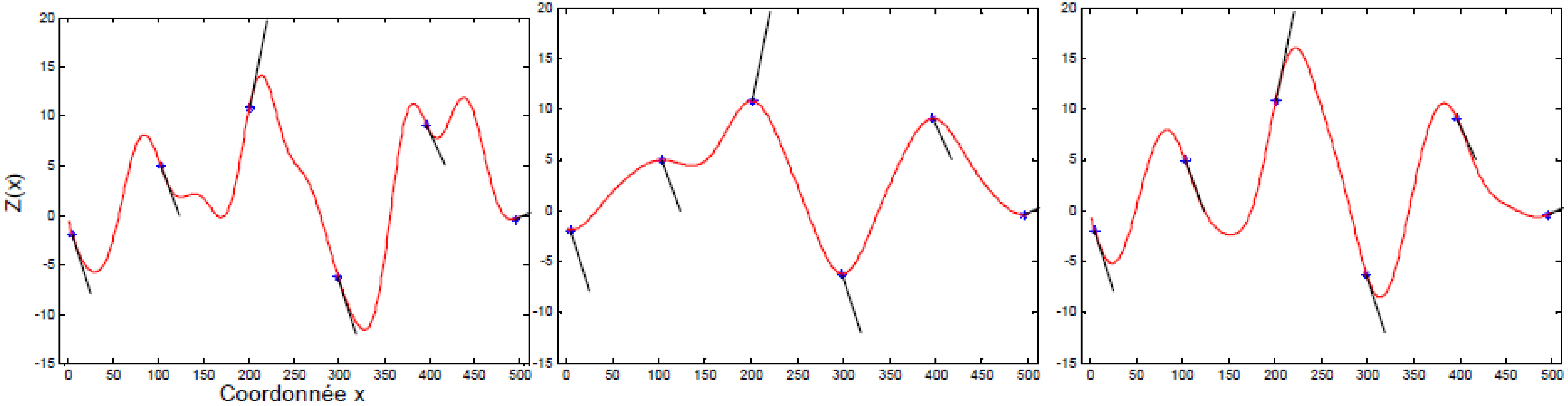
Variable(s) secondaire(s) :
- Interprétation d’un levé hydroacoustique

8) Cartographie de la contamination

Variable principale : Teneurs d’un polluant

Variable(s) secondaire(s) :
- Topographie
- Surface piézométrique
- …

Exemples :



Réalité | Krigeage | Cokrigeage avec dérivées

MAE : | Krigeage 4.13 | Cokrigeage : 1.24

1. Mise en contexte

Exemples :

1. On mesure la base (B), le sommet (S) et l'épaisseur (E) d'une même formation en quelques forages ;

2. On modélise les variogrammes de ces 3 variables ;

3. On effectue le krigeage de ces 3 variables → $B^*(x)$, $S^*(x)$, $E^*(x)$.

Aura-t-on : $E^*(x) = S^*(x)-B^*(x)$?

Pour le krigeage :

Pour le cokrigeage :

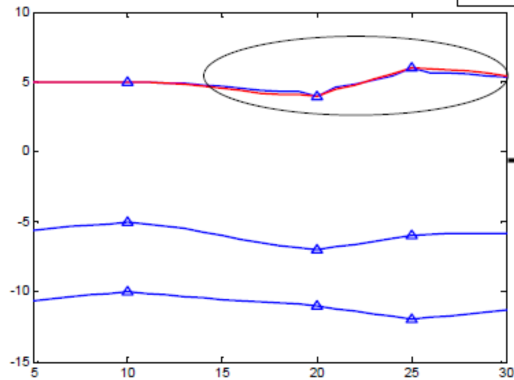
Exemples :

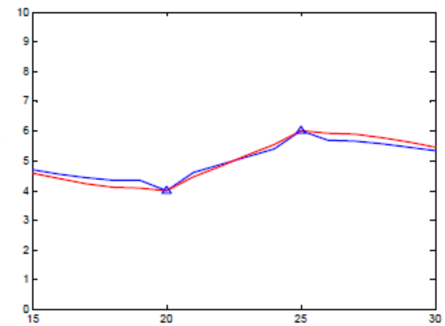
Krigeage

$E^*, S^* - B^*$

S^*

B^*



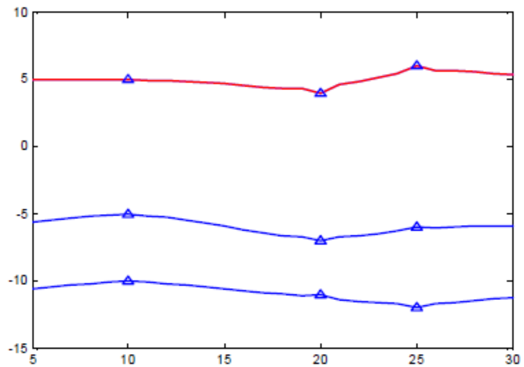


Cokrigeage

E^*

S^*

B^*



<u>Réponse :</u>

Pour le krigeage : NON

Pour le cokrigeage : OUI

2. Cokrigeage simple et ordinaire

Cas à deux variables :

On va étudier seulement le cas avec une variable principale et une variable secondaire.

Posons $Z(x)$, la variable principale, et $Y(x)$, la variable secondaire, avec respectivement n_z et n_y observations et de moyenne m_z et m_y.

La généralisation à plusieurs variables secondaires est identique à la méthodologie à deux variables. Seulement plus lourd mathématiquement, sans pour autant être plus complexes.

2. Cokrigeage simple et ordinaire

2.1. Cokrigeage simple

Les moyennes m_z et m_y sont connues. L'estimateur de Z est alors :

$$Z_0^* = m_z + \sum_{i=1}^{n_z} \lambda_i (Z_i - m_z) + \sum_{i=1}^{n_y} \alpha_i (Y_i - m_y)$$

<u>La variance d'estimation :</u>

$$Var(e) = Var(Z_0 - Z_0^*) = \quad Var(Z_0) +$$

$$\sum_{i=1}^{n_z} \sum_{j=1}^{n_y} \lambda_i \lambda_j Cov(Z_i, Z_j) + \sum_{i=1}^{n_z} \sum_{j=1}^{n_y} \alpha_i \alpha_j Cov(Y_i, Y_j) + 2 \sum_{i=1}^{n_z} \sum_{j=1}^{n_y} Cov(Z_i, Y_i) +$$

$$-2 \sum_{i=1}^{n_z} \lambda_i Cov(Z_0, Z_i) - 2 \sum_{i=1}^{n_y} \alpha_i Cov(Z_0, Y_i)$$

Terme du haut : Variance de ce que l'on estime
Terme du milieu : Variance de l'estimateur
Terme du bas : Covariance de l'estimateur et ce que l'on estime

2. Cokrigeage simple et ordinaire

2.1. Cokrigeage simple

Minimisation de $Var(e)$. Système de $n_z + n_y$ équations et inconnues.

$$\frac{\partial Var(e)}{\partial \lambda_i} = 0 \rightarrow \sum_{j=1}^{n_z} \lambda_j Cov(Z_i, Z_j) + \sum_{j=1}^{n_y} \alpha_j Cov(Z_i, Y_j) = Cov(Z_0, Z_i), \qquad \forall i = 1, \ldots, n_z$$

$$\frac{\partial Var(e)}{\partial \alpha_i} = 0 \rightarrow \sum_{j=1}^{n_z} \lambda_j Cov(Y_i, Z_j) + \sum_{j=1}^{n_y} \alpha_j Cov(Y_i, Y_j) = Cov(Z_0, Y_i), \qquad \forall i = 1, \ldots, n_y$$

<u>Variance de cokrigeage simple :</u>

$$\sigma_{CS}^2 = Var(Z_0) - \sum_{i=1}^{n_z} \lambda_i Cov(Z_0, Z_i) - \sum_{i=1}^{n_y} \alpha_i Cov(Z_0, Y_i) \leq \sigma_{KS}^2$$

2.2. Cokrigeage ordinaire

Méthode de Lagrange :

Les moyennes m_z et m_y sont inconnues. L'estimateur de Z est alors :

$$Z_0^* = \sum_{i=1}^{n_z} \lambda_i Z_i + \sum_{i=1}^{n_y} \alpha_i Y_i\,, \qquad \sum_{i=1}^{n_z} \lambda_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n_y} \alpha_i = 0$$

Lagrangien :

$$L(\lambda_i, \alpha_i, \mu_z, \mu_y) = Var(e) - 2\mu_z\left(\sum_{i=1}^{n_z} \lambda_i - 1\right) - 2\mu_y\left(\sum_{i=1}^{n_y} \alpha_i\right)$$

2.2. Cokrigeage ordinaire

Minimisation de $Var(e)$. Système de $n_z + n_y + 2$ équations et inconnues.

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \ \rightarrow \sum_{j=1}^{n_z} \lambda_j Cov(Z_i, Z_j) + \sum_{j=1}^{n_y} \alpha_j Cov(Z_i, Y_j) + \mu_z = Cov(Z_0, Z_i)\,, \qquad \forall i = 1, \dots, n_z$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = 0 \ \rightarrow \sum_{j=1}^{n_z} \lambda_j Cov(Y_i, Z_j) + \sum_{j=1}^{n_y} \alpha_j Cov(Y_i, Y_j) + \mu_y = Cov(Z_0, Y_i)\,, \qquad \forall i = 1, \dots, n_y$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_z} = 0 \ \rightarrow \sum_{i=1}^{n_z} \lambda_i = 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_y} = 0 \ \rightarrow \sum_{i=1}^{n_z} \alpha_i = 0$$

<u>Variance de cokrigeage ordinaire</u> :

$$\sigma_{CO}^2 = Var(Z_0) - \sum_{i=1}^{n_z} \lambda_i Cov(Z_0, Z_i) - \sum_{i=1}^{n_y} \alpha_i Cov(Z_0, Y_i) - \mu_z$$

2. Cokrigeage simple et ordinaire

2.3. Forme matricielle

$$\mathrm{K}\tilde{\lambda} = k \text{ et } \sigma_{ck}^2 = Var(Z_0) - \tilde{\lambda}' k$$

Cokrigeage simple :

$$\begin{bmatrix} K_{zz} & K_{zy} \\ K_{yz} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{zz} \\ k_{yz} \end{bmatrix}$$

Cokrigeage ordinaire :

$$\begin{bmatrix} K_{zz} & K_{zy} & 1 & 0 \\ K_{yz} & K_{yy} & 0 & 1 \\ 1' & 0' & 0 & 0 \\ 0' & 1' & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \mu_z \\ \mu_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{zz} \\ k_{yz} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{zz} \to n_z \times n_z \,;\, K_{zy} \to n_z \times n_y \,;\; K_{yz} \to n_y \times n_z \,;\; K_{yy} \to n_y \times n_y$$
$$k_{zz} \to n_z \times 1 \;;\, k_{yy} \to n_y \times 1$$

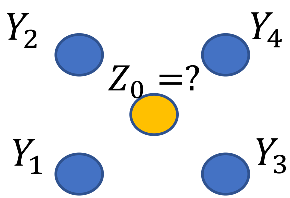
2. Cokrigeage simple et ordinaire

Cokrigeage simple (CS) vs cokrigeage ordinaire (CO)

Souvent le CS est préférable

- CS → ne nécessite pas d'observations de Z

- CO → dans certaines configurations symétriques, la contrainte sur les poids empêche de tenir compte de l'information de la variable secondaire



$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 0 \rightarrow \alpha_i = 0 \; \forall i = 1, \ldots, 4$$

3. Covariance croisée et variogramme croisé

Exercice en équipe

1) Calcul de covariances croisées et variogrammes croisés:

Covariance croisée expérimentale :

$$C_{ZY,e}(h) = \frac{1}{N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [(Z(x_i) - m_Z)(Y(x_i + h) - m_Y)]$$

Variogramme croisé expérimental:

$$\gamma_{ZY,e}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} \left[\left(Z(x_i) - Z(x_i + h)\right)\left(Y(x_i) - Y(x_i + h)\right)\right]$$

3. Covariance croisée et variogramme croisé

Définitions :

Covariance croisée : $C_{ZY}(h) = Cov\big(\underline{Z(x)}, \underline{Y(x+h)}\big)$

Variogramme croisé : $\gamma_{ZY}(h) = 0.5\, E\big[\big(Z(x) - Z(x+h)\big)\big(Y(x) - Y(x+h)\big)\big]$

$$= 0.5\, Cov\big(\underline{Z(x)} - \underline{Z(x+h)}, \underline{Y(x)} - \underline{Y(x+h)}\big)$$

Le variogramme croisé est toujours symétrique

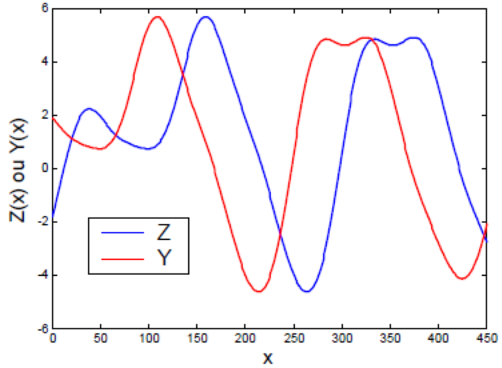
$$\gamma_{ZY}(h) = C_{ZY}(0) - 0.5(C_{ZY}(h) + C_{ZY}(-h))$$

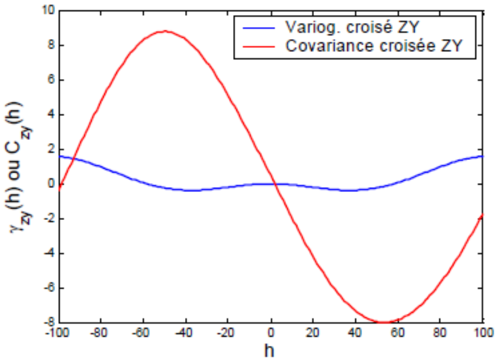
$$\downarrow$$

$$\gamma_{ZY}(h) = \gamma_{ZY}(-h)$$

- La covariance croisée ne peut être déduite du variogramme croisé que si elle est symétrique !
- La covariance croisée est plus générale que le variogramme croisé

Comparaison :





$$Y(x) = Z(x - 50)$$

Le variogramme croisé (bleu) ne détecte aucune structure.

La covariance croisée (rouge) détecte une forte structure

- Asymétrique
- Reconnais le décalage

3. Covariance croisée et variogramme croisé

Comparaison :

Covariance croisée	Variogramme croisée
m_Z et m_y connus	Pas besoin
Tous les points où l'une ou l'autre variable est connue peuvent être utilisés dans le calcul de la covariance	Seuls les points où les 2 variables sont connues peuvent être utilisés dans le calcul du variogramme croisé
La covariance peut être asymétrique	La covariance doit être symétrique

3. Covariance croisée et variogramme croisé

<u>Notes:</u>

a)

Krigeage → plus souvent krigeage ordinaire
Cokrigeage → cokrigeage simple est souvent plus indiqué
(p. ex. cas où la variable principale n'est pas observée)

b)

Krigeage → variogramme est l'outil de base
Cokrigeage → covariance est l'outil de base

3. Covariance croisée et variogramme croisé

Symétrie :

- Les matrices de cokrigeage sont toujours symétriques → $K_{zy} = K'_{yz}$

- Toutefois, les fonctions de covariances croisées, elles, ne sont pas nécessairement symétriques, en effet :

$$C_{zy}(h) = Cov\big(Z(x), Y(x+h)\big) = Cov\big(Y(x+h), Z(x)\big) = C_{yz}(-h)$$

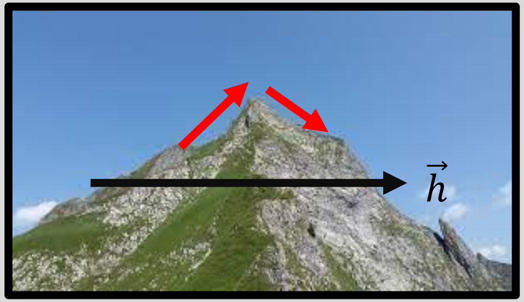
- Mais, en général

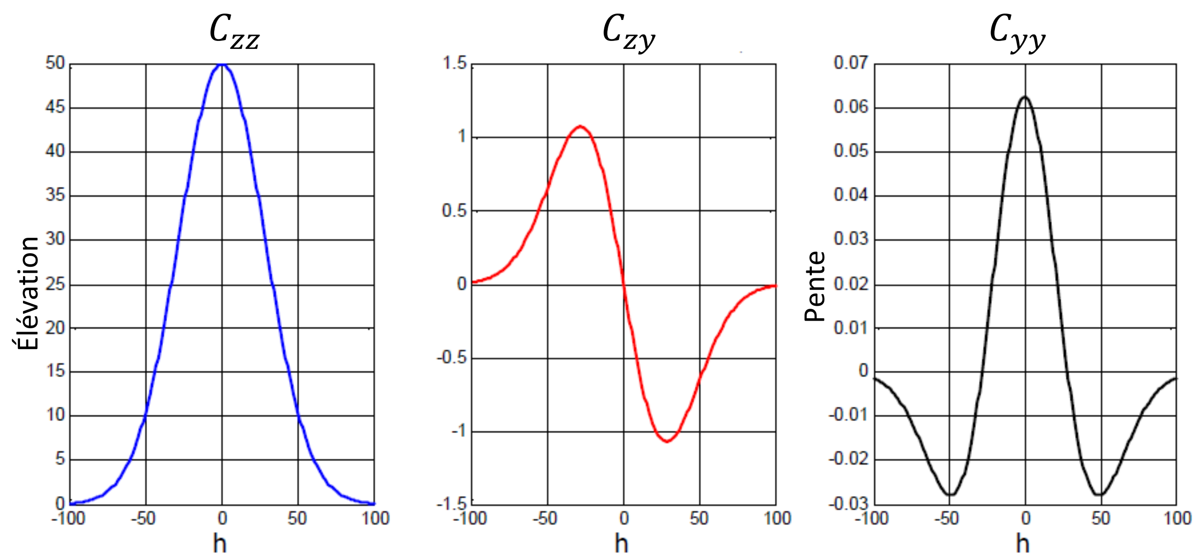
$$C_{zy}(h) = Cov\big(Z(x), Y(x+h)\big) \neq Cov\big(Y(x), Z(x+h)\big) = C_{yz}(h) = C_{zy}(-h)$$

3. Covariance croisée et variogramme croisé

Exemple visuel :

$$C_{zy}(h) \neq C_{zy}(-h)$$





4. Modèles admissibles

But : Assurer que toute combinaison linéaire de Z et Y présente une variance théorique positive.

- Vérification délicate, non triviale, complexe mathématiquement.

- On va se limiter aux modèles admissibles par construction.

4. Modèles admissibles

1) Modèle découlant de relations physiques ou mathématique entre Z et Y.

Si on connaît C_{ZZ}, on peut déduire C_{ZY} et C_{YY}

<u>Exemple 1D :</u> $Y(x)$ est la dérivée de $Z(x)$

$$Y(x) = \frac{dZ(x)}{dx}$$

$$C_{ZY} = Cov\big(Z(x), Y(x+h)\big) = \frac{d}{dh}\left[Cov\big(Z(x), Z(x+h)\big)\right] = \frac{dC_{zz}}{dh}$$

$$C_{YY} = Cov\big(Y(x), Y(x+h)\big) = -\frac{d^2}{dh^2}\left[Cov\big(Z(x), Z(x+h)\big)\right] = -\frac{d^2 C_{ZZ}}{dh^2}$$

$$C_{YZ} = -C_{ZY}$$

Exercice en équipe

2) Modèle découlant de relations physiques ou mathématiques entre Z et Y.

2) Modèle de corégionalisation linéaire :

Très fréquent

Toutes les covariances et covariances croisées peuvent s'exprimer comme une *combinaison linéaire de quelques structures de base* (de palier 1, arbitrairement)

$$\begin{bmatrix} C_{ZZ}(h) & C_{ZY}(h) \\ C_{YZ}(h) & C_{YY}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1,ZZ} & B_{1,ZY} \\ B_{1,YZ} & B_{1,YY} \end{bmatrix} C_1(h) + \begin{bmatrix} B_{2,ZZ} & B_{2,ZY} \\ B_{2,YZ} & B_{2,YY} \end{bmatrix} C_2(h) + \ \ldots$$

$$= \quad B_1 C_1(h) + B_2 C_2(h) + \cdots + B_n C_n(h)$$

Les matrices B_i sont des matrices de coefficients

4. Modèles admissibles

2) Modèle de corégionalisation linéaire :

Très fréquent

1. Si chaque matrice B est positive semi-définie (c.-à-d. avec 2 variables $\det(B) \geq 0$) alors le modèle est admissible.

2. Si l'une des matrices n'est pas positive semi-définie, alors on ne peut rien dire sur l'admissibilité du modèle.

3. Si la matrice B associée à l'effet de pépite n'est pas positive semi-définie, on est certain que le modèle est non admissible.

Note : lorsque toutes les matrices B sont proportionnelles, on peut réécrire le modèle linéaire de corégionalisation comme:

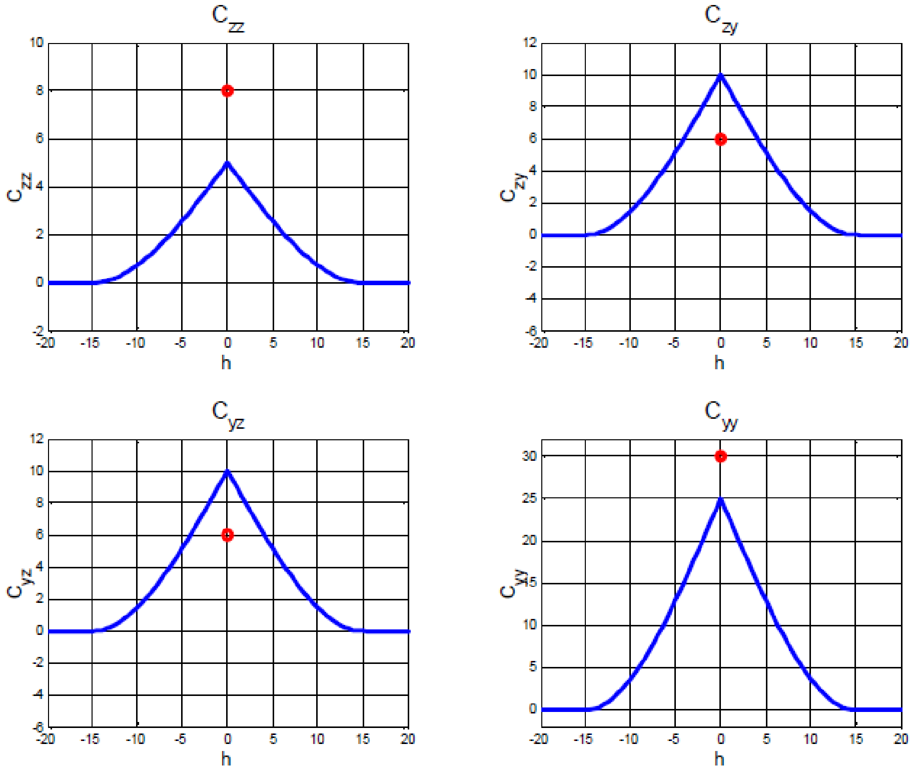
$$\begin{bmatrix} C_{ZZ}(h) & C_{ZY}(h) \\ C_{YZ}(h) & C_{YY}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{ZZ} & B_{ZY} \\ B_{YZ} & B_{YY} \end{bmatrix} C(h) = BC(h)$$

Ce modèle est admissible **si et seulement si** B est positive semi-définie.

4. Modèles admissibles

2) Modèle de corégionalisation linéaire :

Exemples :



Effet de pépite

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \quad \delta(h)$$

Modèle sphérique :

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 25 \end{bmatrix} sphérique\ (a = 15, C = 1)$$

Admissibilité :

$$\det(\delta(h)) = 15 - 16 = -1 \ngeq 0$$

$$\det(sph(h)) = 125 - 100 = 25$$

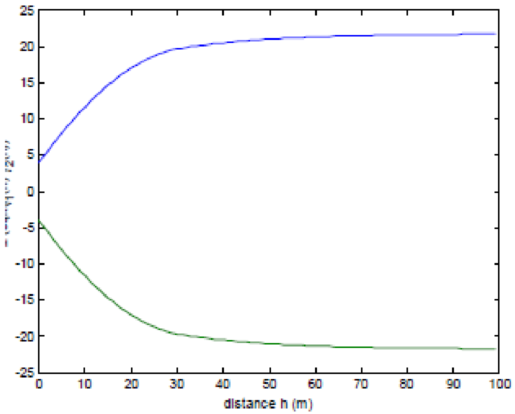
Exercice en équipe

3) Modèle de corégionalisation linéaire.

4. Modèles admissibles

Condition de Cauchy-Schwartz

Définis une enveloppe où doit se retrouver entièrement le modèle de variogramme croisé



$$|\gamma_{ZY}(h)| \leq \sqrt{\gamma_{ZZ}(h)\gamma_{YY}(h)}$$

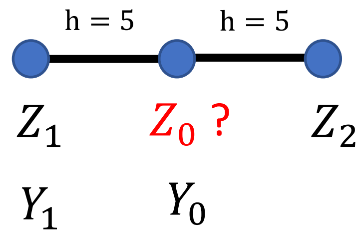
Condition nécessaire, mais non suffisante !

Cette condition permet de s'assurer que la corrélation est toujours comprise entre -1 et 1.

4. Modèles admissibles

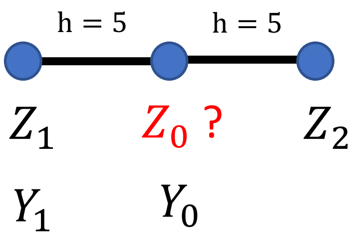
Exemple de calcul :

$$\begin{bmatrix} C_{zz}(h) & C_{zy}(h) \\ C_{yz}(h) & C_{yy}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(h) + \begin{bmatrix} 2 & 2.4 \\ 2.4 & 4 \end{bmatrix} Sphérique(a = 30m, C = 1)$$



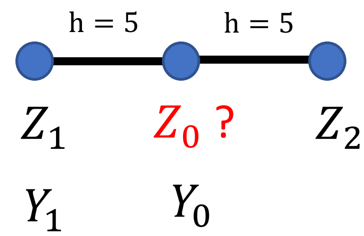
Exemple de calcul : cokrigeage simple

$$\begin{bmatrix} C_{zz}(h) & C_{zy}(h) \\ C_{yz}(h) & C_{yy}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(h) + \begin{bmatrix} 2 & 2.4 \\ 2.4 & 4 \end{bmatrix} Sphérique(a = 30m, C = 1)$$



$$\begin{array}{c c c} & \begin{array}{cccc} Z_1 & Z_2 & Y_1 & Y_0 \end{array} & & Z_0 \\ \begin{array}{c} Z_1 \\ Z_2 \\ Y_1 \\ Y_0 \end{array} & \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda_{1,z} \\ \lambda_{2,z} \\ \lambda_{1,y} \\ \lambda_{0,y} \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} \end{array}$$

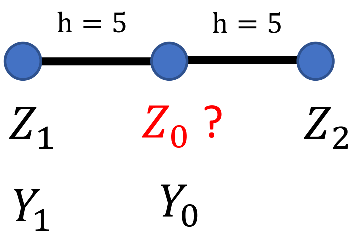
Exemple de calcul : cokrigeage simple



$$\begin{bmatrix} C_{zz}(h) & C_{zy}(h) \\ C_{yz}(h) & C_{yy}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(h) + \begin{bmatrix} 2 & 2.4 \\ 2.4 & 4 \end{bmatrix} Sphérique(a = 30m, C = 1)$$

$$\begin{array}{c} \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Y_1 \\ Y_0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Z_1 & Z_2 & Y_1 & Y_0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1.04 & 2.4 & 1.81 \\ 1.04 & 3 & 1.24 & 1.81 \\ 2.4 & 1.24 & 5 & 3.01 \\ 1.81 & 1.81 & 3.01 & 5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} \lambda_{1,z} \\ \lambda_{2,z} \\ \lambda_{1,y} \\ \lambda_{0,y} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} Z_0 \\ \begin{bmatrix} 1.50 \\ 1.50 \\ 1.81 \\ 2.4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Exemple de calcul : cokrigeage simple



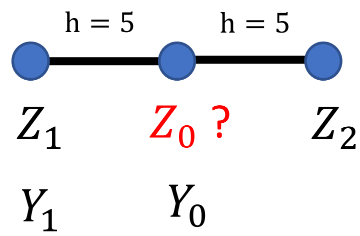
$$\begin{bmatrix} C_{zz}(h) & C_{zy}(h) \\ C_{yz}(h) & C_{yy}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(h) + \begin{bmatrix} 2 & 2.4 \\ 2.4 & 4 \end{bmatrix} Sphérique(a = 30m, C = 1)$$

$$\begin{array}{c} \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Y_1 \\ Y_0 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Z_1 & Z_2 & Y_1 & Y_0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1.037 & 2.4 & 1.8056 \\ 1.037 & 3 & 1.2444 & 1.8056 \\ 2.4 & 1.2444 & 5 & 3.0093 \\ 1.8056 & 1.8056 & 3.0093 & 5 \end{bmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} \lambda_{1,z} \\ \lambda_{2,z} \\ \lambda_{1,y} \\ \lambda_{0,y} \end{bmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \\ = \end{array}
\begin{array}{c} Z_0 \\ \begin{bmatrix} 1.5046 \\ 1.5046 \\ 1.8056 \\ 2.4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\lambda_{1,z} = 0.2294, \lambda_{2,z} = 0.2336, \lambda_{1,y} = \underline{0.0072}, \lambda_{0,y} = \underline{0.3085} \quad \text{et } \sigma^2_{ck} = 1.5500$$

Note) Variance de krigeage simple : 1.88

Exemple de calcul : cokrigeage ordinaire



$$
\begin{array}{c}
 \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Y_1 \\ Y_0 \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} Z_1 & Z_2 & Y_1 & Y_0 & & \end{array} \\
\begin{bmatrix}
3 & 1.037 & 2.4 & 1.8056 & 1 & 0 \\
1.037 & 3 & 1.2444 & 1.8056 & 1 & 0 \\
2.4 & 1.2444 & 5 & 3.0093 & 0 & 1 \\
1.8056 & 1.8056 & 3.0093 & 5 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix}
\lambda_{1,z} \\ \lambda_{2,z} \\ \lambda_{1,y} \\ \lambda_{0,y} \\ \mu_z \\ \mu_y
\end{bmatrix}
=
\begin{array}{c}
Z_0 \\
\begin{bmatrix}
1.5046 \\ 1.5046 \\ 1.8056 \\ 2.4 \\ 1 \\ 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$\lambda_{1,z} = 0.5494, \lambda_{2,z} = 0.4506, \lambda_{1,y} = \underline{-0.1678,} \lambda_{0,y} = \underline{0.1678,}$$

$$\mu_Z = -0.5111, \mu_y = 0.2603 \text{ et } \sigma^2_{ck} = 1.907$$

Note) Variance de krigeage ordinaire : 2.01

Exercice en équipe

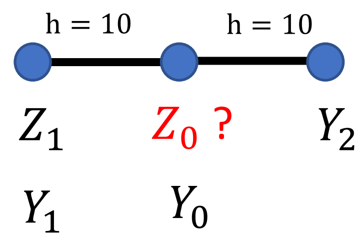
4) Construction d'un système de cokrigeage ordinaire.

$$\begin{bmatrix} C_{ZZ}(h) & C_{ZY}(h) \\ C_{YZ}(h) & C_{YY}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix} \delta(h) + \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} sphérique\ (a = 30m, C = 1)$$

Sphérique (a=30 , C=1)

h	C(h)
0	1
10	0.519
20	0.148

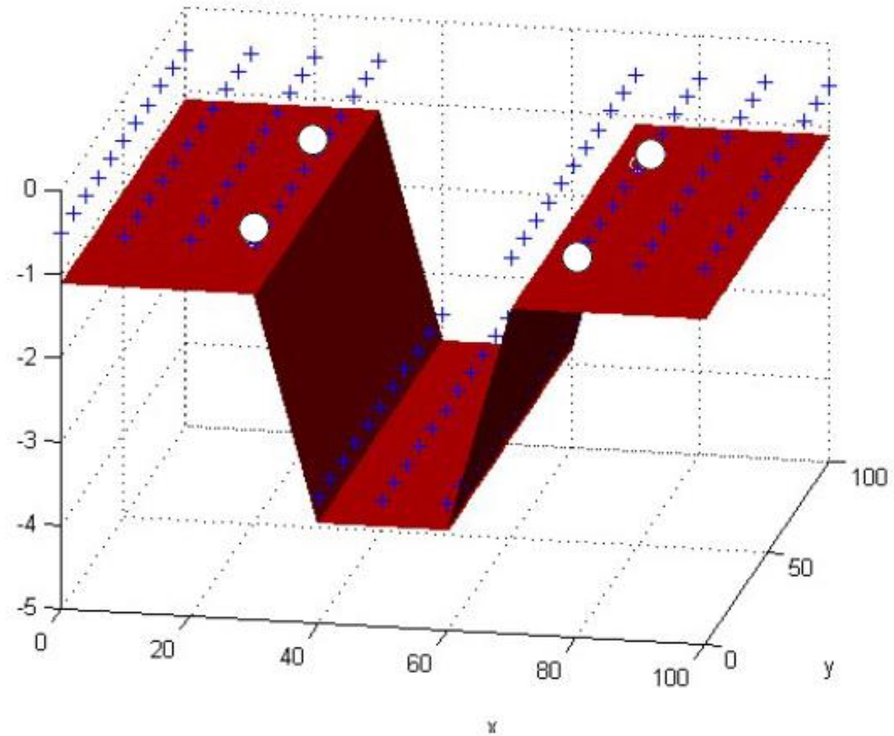
$$\begin{array}{c} \\ Z_1 \\ Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} Z_1 & Y_0 & Y_1 & Y_2 & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \mu_Z \\ \mu_Y \end{bmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \\ = \end{array}
\begin{array}{c} Z_0 \\ \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} \end{array}$$



5. Cas où le cokrigeage peut être utile

Géophysique

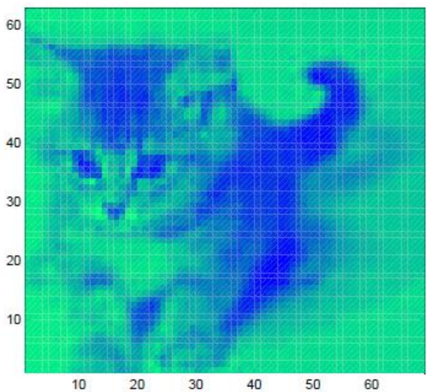
Données d'élévation estimées par géoradar (Y) et quelques observations de l'élévation aux forages (Z)

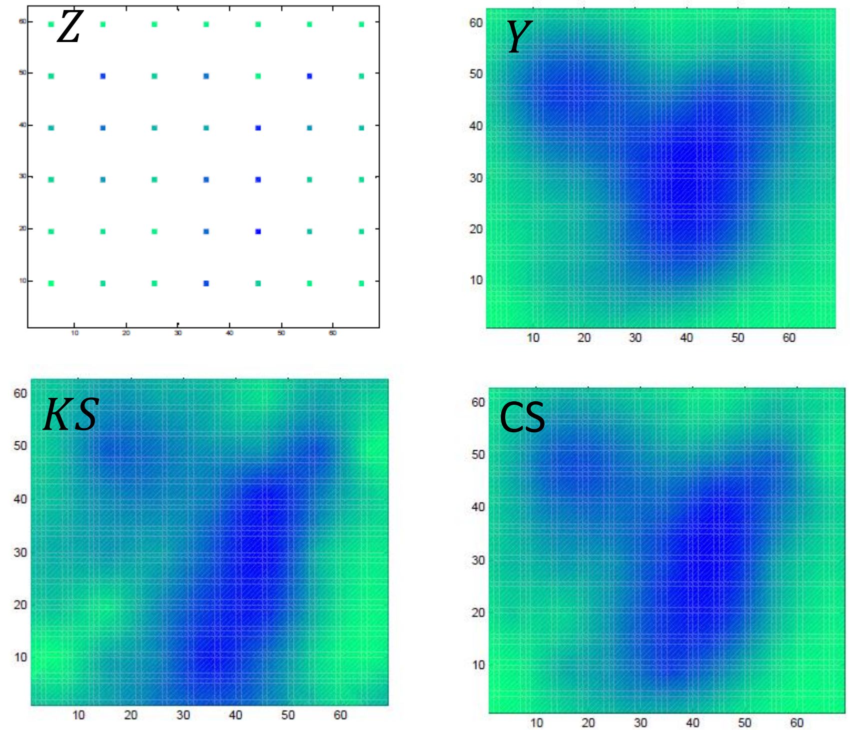


5. Cas où le cokrigeage peut être utile

Géophysique

Données régionales lisses estimées par géophysique (Y) et quelques observations de la propriété estimée (Z)



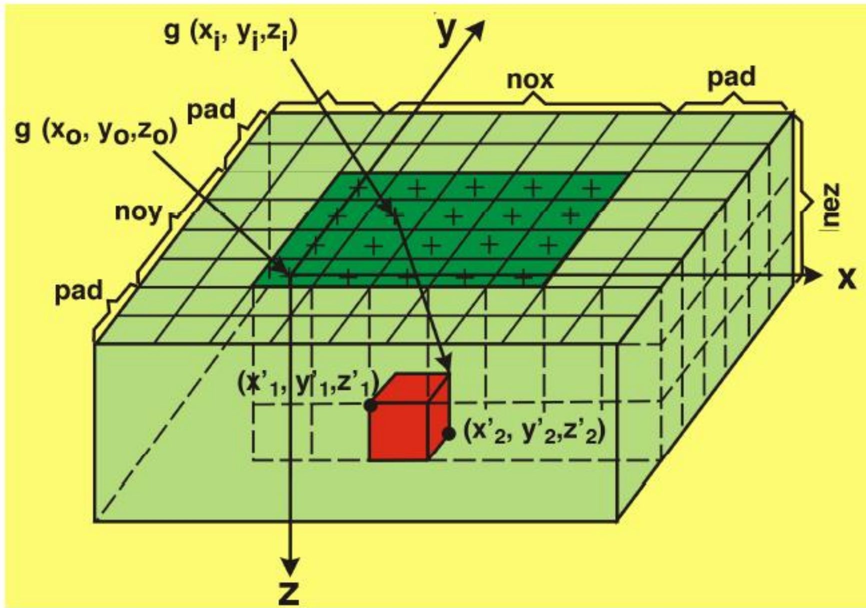


Krigeage : MAE = 26.3 ; ρ=0.73

Cokrigeage : MAE = 22.1 ; ρ=0.81

5. Cas où le cokrigeage peut être utile

Inversion de données gravimétrique



$$\frac{g_i}{\rho_j} = -\gamma \sum_{p=1}^{2}\sum_{q=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\mu_{pqs}\left[x'_p \ln\left(y'_q + r_{pqs}\right) + y'_q \ln\left(x'_p + r_{pqs}\right) - z'_s \arctan\left(\frac{x'_p\, y'_q}{z'_s\, r_{pqs}}\right)\right] \Rightarrow g_i = G_{ij} \times \rho_j$$

5. Cas où le cokrigeage peut être utile

Inversion de données gravimétrique

Sous forme matricielle :

$$g = G\rho$$

g : vecteur des anomalies gravimétriques (n x 1)
G : matrice géométrique (n x m)
ρ : vecteur des contrastes de densité de blocs (m x 1)

On peut déduire les covariances à partir de l'équation ci-haut :

$$C_{gg} = G C_{\rho\rho} G^T$$

$$C_{g\rho} = G C_{\rho\rho}$$

C_{gg} : matrice des covariances gravité-gravité (n x n)
$C_{\rho\rho}$: matrice des covariances densité-densité (m x m)
$C_{g\rho}$: matrice des covariances gravité-densité (n x m)
G : matrice géométrique (n x m)

5. Cas où le cokrigeage peut être utile

Inversion de données gravimétrique

Lorsque l'on résout le système de cokrigeage, on obtient

$$\rho^* = \Lambda' g$$

$$\Lambda = C_{gg}^{-1} C_{g\rho}$$

Λ : matrice contenant les poids de cokrigeage (n x m)

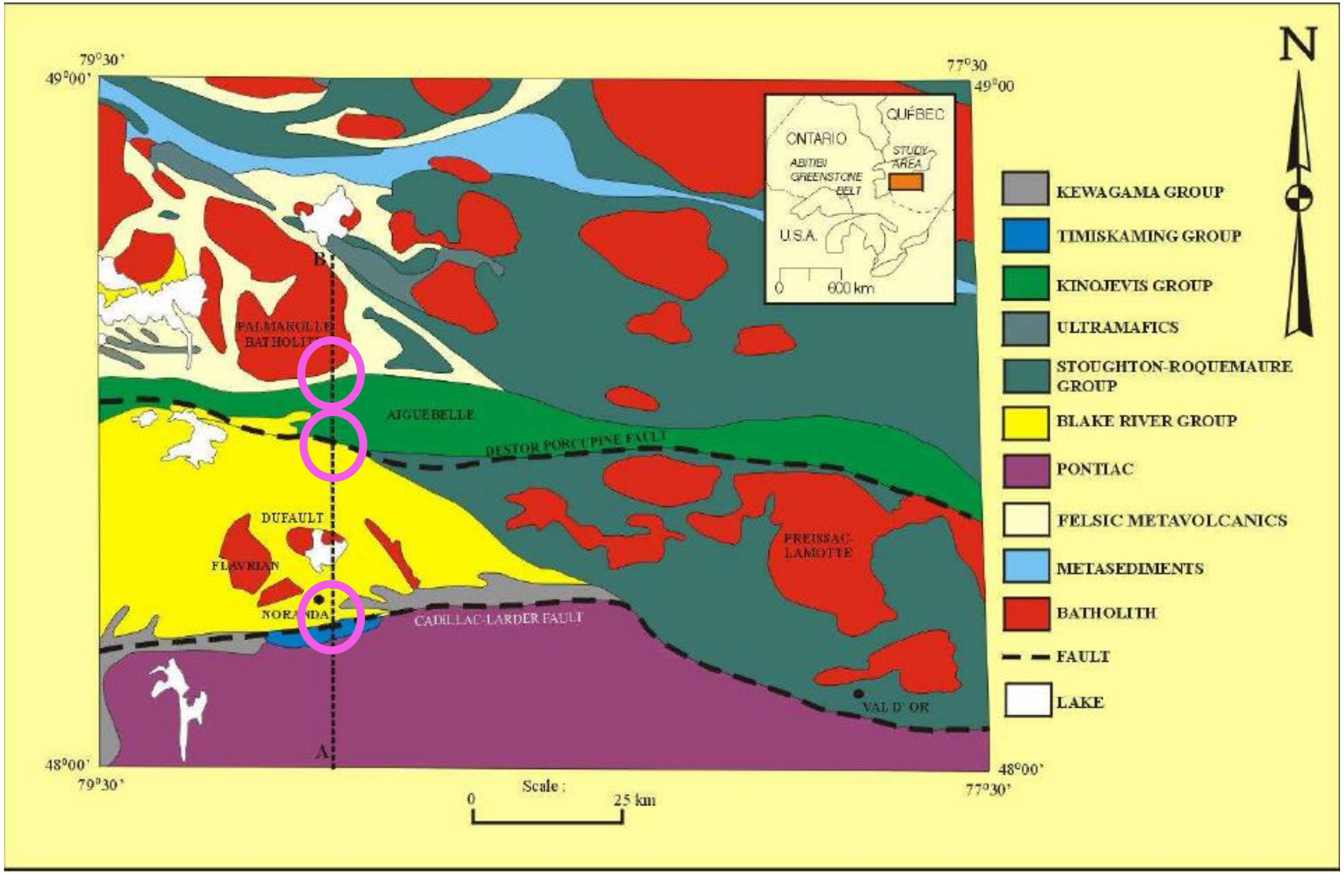
Reproduis exactement l'anomalie gravimétrique observée :

$$g^* = G\rho^* = G\Lambda' g = GC_{\rho\rho}G'\left(GC_{\rho\rho}G'\right)^{-1} g = g$$

Vrai, s'il n'y a pas d'effet de pépite

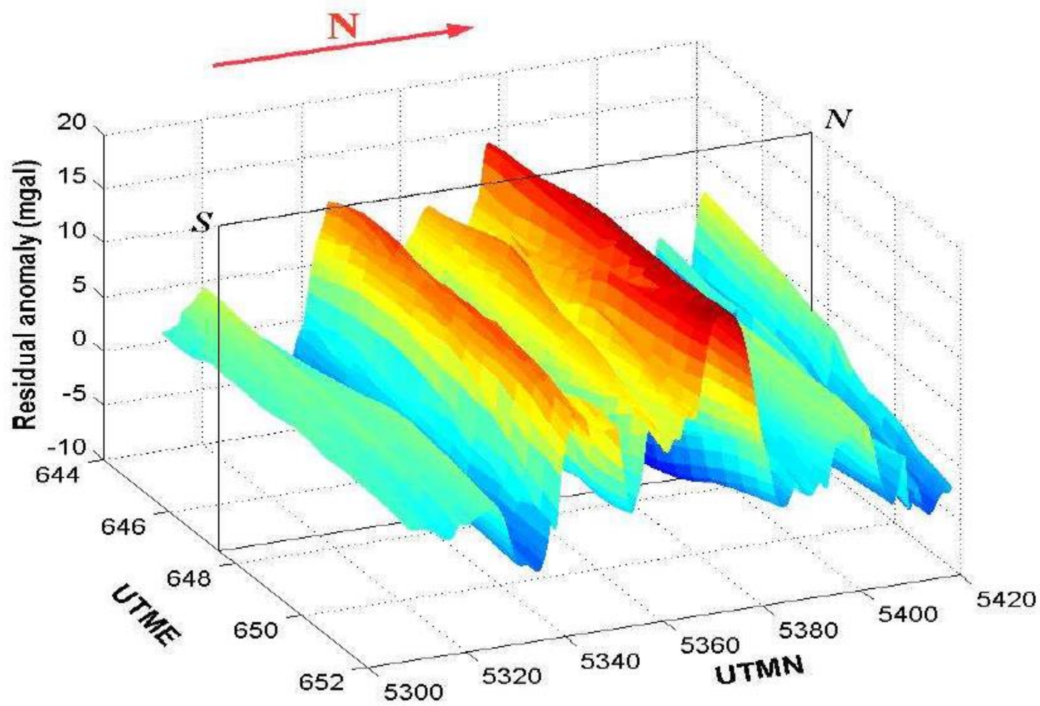
5. Cas où le cokrigeage peut être utile

Inversion de données gravimétrique



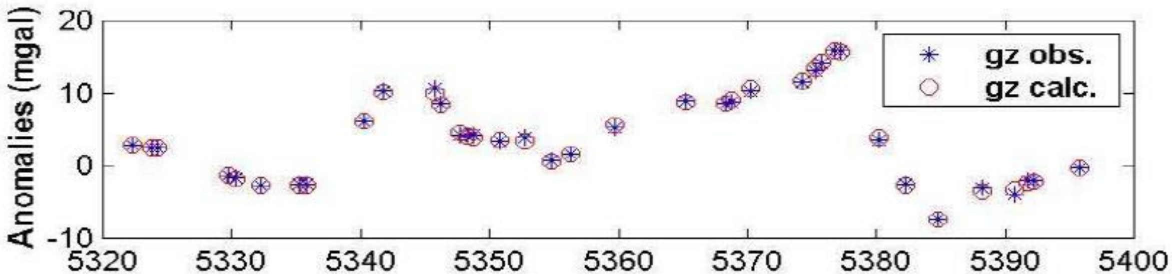
5. Cas où le cokrigeage peut être utile

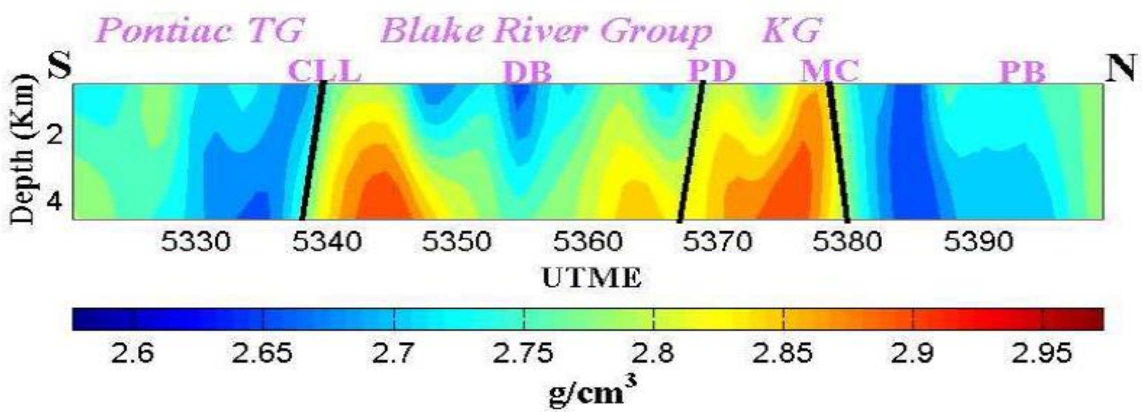
Inversion de données gravimétrique



5. Cas où le cokrigeage peut être utile

Inversion de données gravimétrique



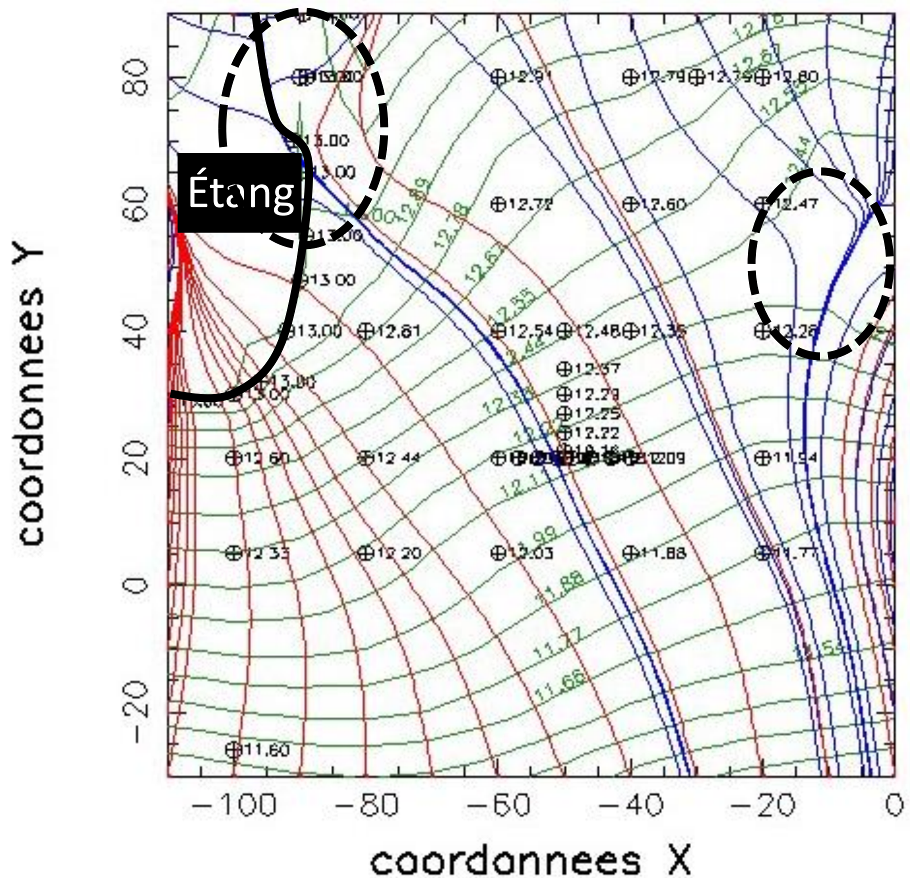


5. Cas où le cokrigeage peut être utile

Hydrogéologie

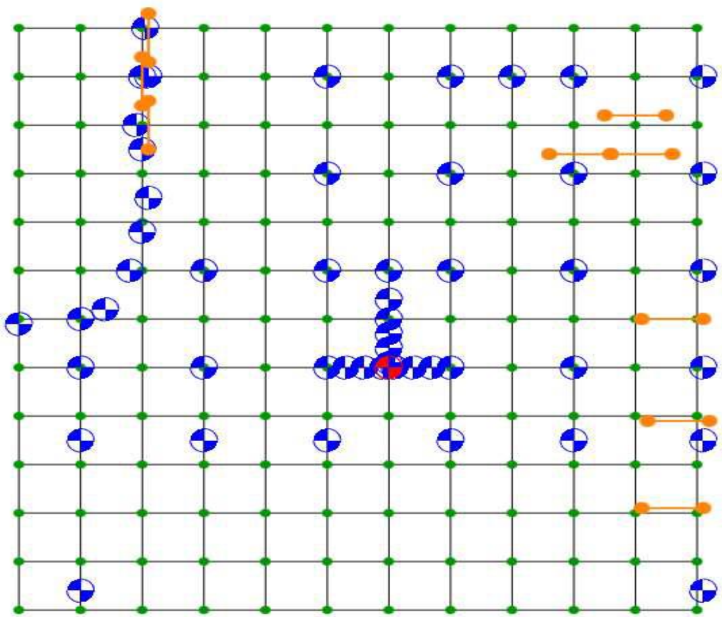
- Un étang au coin nord-ouest recharge l'aquifère de surface. On s'attendrait à ce que les lignes d'écoulement (bleu et rouge) soient perpendiculaires au bord de l'étang.

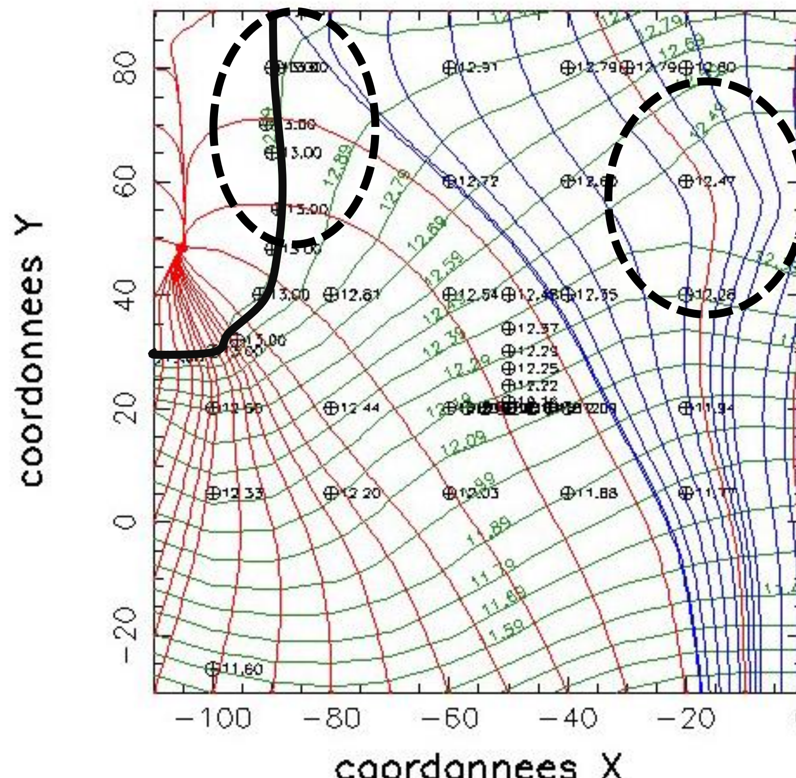
- Plusieurs lignes d'écoulement convergent, ce qui implique un fort débit à cet endroit, ce qui est perçu comme peu réaliste



Hydrogéologie

Utilisation de points doublons : forcer localement une direction d'écoulement





Les deux problèmes soulevés sur la diapo précédente sont disparus

5. Cas où le cokrigeage peut être utile

Hydrogéologie

Utilisation de points doublons : forcer localement une direction d'écoulement

- En forçant des valeurs égales de charge sur des points rapprochés (sans spécifier les charges, juste dire qu'elles sont égales), on force l'écoulement perpendiculairement au segment liant les deux points.

- On peut voir le doublon comme une variable auxiliaire et le traiter en cokrigeage.

- Il suffit de connaître la covariance des charges pour déduire la covariance simple des doublons et la covariance croisée charge-doublon (modèle déterministe)

5. Cas où le cokrigeage peut être utile

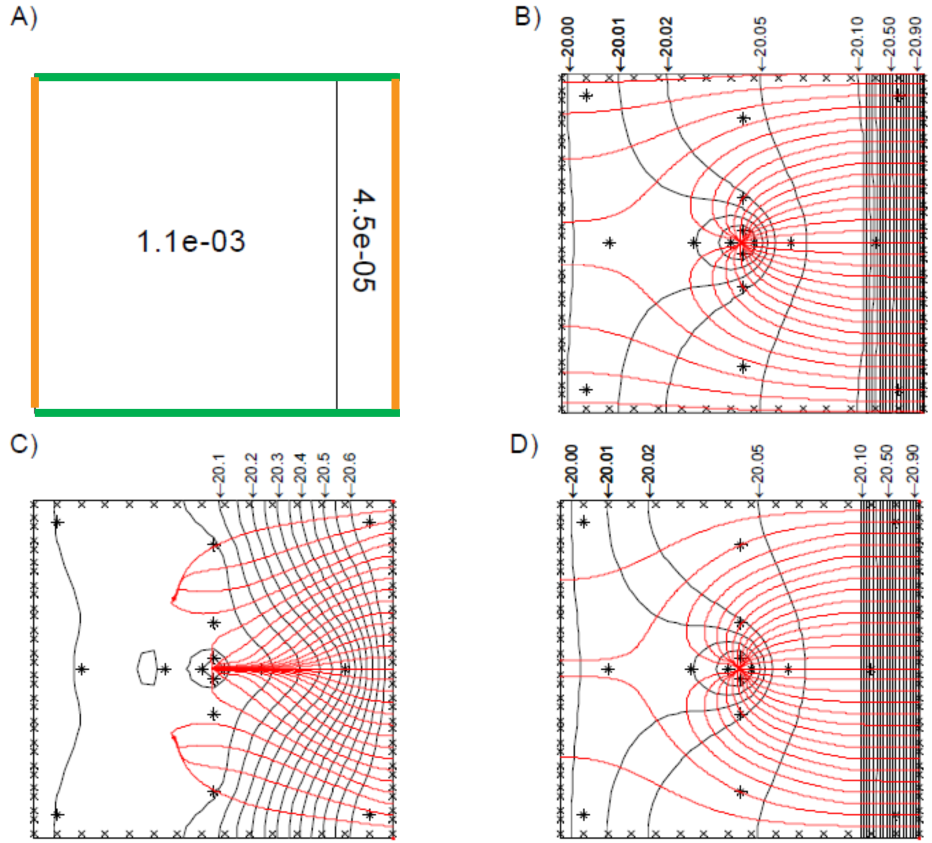
Hydrogéologie : deux domaines

A) Modèle géologique
- Vert : frontières imperméables
- Orange : Charges constantes

B) Solution par éléments finis

C) Solution cokrigeage sans doublons et sans informations sur le domaine

D) Solution cokrigeage avec doublons et les informations sur le domaine



5. Cas où le cokrigeage peut être utile

Hydrogéologie : pompage

Modèle géologique

- Vert : frontières imperméables
- A et C : sans pompage
- B et D : avec pompage
- A et B : sans doublons
- C et D : avec doublons

Problématique

- Frontières imperméables mal représentées
- Une source n'est même pas alimentée par le réseau
- La source est approvisionnée lorsque le pompage n'est pas actif.