Département de Mathématiques et de Génie Industriel
École Polytechnique de Montréal

MATHÉMATIQUES DES ÉLÉMENTS FINIS
MTH8207

Automne 2024

Devoir 2 — 100 points

Distribué le 2024/09/28 — À rendre le 2024/10/10

Question 1 :

On considère le problème suivant sous sa forme abstraite :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ telle que } \quad B(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V,$$

où V est un espace vectoriel tel que la forme bilinéaire $B(\cdot,\cdot)$ et la forme linéaire $F(\cdot)$ soient bien définies sur V. Pour approcher la solution u de ce problème par la méthode des éléments finis, on introduit l'espace de dimension finie $V_h \subset V$ tel que $V_h = \text{vect}\{\phi_i\}$, $i = 1, \ldots, N$, où les fonctions ϕ_i forment une base de V_h.

Démontrer que les deux énoncés suivants sont équivalents :

1) Trouver $u_h \in V_h$ telle que $B(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h$,
2) Trouver $u_h \in V_h$ telle que $B(u_h, \phi_i) = F(\phi_i), \quad \forall i = 1, \ldots, N$.

Remarque: C'est cette équivalence qui nous permet d'obtenir par la méthode de Galerkine un système d'équations algébriques $KU = F$ que l'on peut a priori résoudre (si le problème est bien posé).

Question 2 (Equivalence des formulations variationnelle et faible) :

Soit $\Omega = (0,1)$ et les espaces de fonctions :

$$U = \{u \in H^1(\Omega) : \ u(1) = u_1\}$$
$$V = \{u \in H^1(\Omega) : \ v(1) = 0\}$$

On suppose que $u \in U$ est la solution du problème faible suivant :

$$B(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V, \tag{1}$$

où $B(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique et définie positive et $F(v)$ est une forme linéaire.

On introduit le problème de minimisation :

$$u = \underset{v \in U}{\operatorname{argmin}}\, J(v), \quad \text{où } J(v) = \frac{1}{2}B(v,v) - F(v). \tag{2}$$

Montrer que u est solution du problème (1) si et seulement si u est solution du problème de minimisation (2).

Question 3 (Formulation Variationnelle) :

Soit $\Omega = (0,2)$. On considère la fonctionnelle J, définie sur $U = \{v \in H^1(\Omega) :\ v(2) = 2\}$ comme :

$$J(v) = \int_0^2 (av')^2 dx + v^2(0) - v(0) - v(1),$$

où la fonction $a = a(x)$ prend les valeurs $a(x) = 1$, $\forall x \in (0,1)$ et $a(x) = 2$, $\forall x \in (1,2)$. Construire les problèmes faible et fort que satisfait le minimisant de $J(v)$ et calculer analytiquement la solution du problème.

Question 4 (Équation d'Euler-Bernoulli) :

On considère l'équation d'Euler-Bernoulli (d'ordre 4) qui gouverne la flèche u d'une poutre :

$$(EIu'')'' = q, \quad \forall x \in \Omega = (0,1),$$

où E and I sont le module d'élasticité et le second moment de l'aire de section de la poutre, respectivement (supposés constants ici), et $q = q(x) \in L^2(\Omega)$ représente une charge répartie sur la poutre. De plus, on considère que la poutre est soumise aux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} u' &= 0, \quad x = 0, & \qquad u &= 2, \quad x = 1,\\ (EIu'')' &= g, \quad x = 0, & \qquad u'' &= 0, \quad x = 1, \end{aligned}$$

où g et $u_1 \in \mathbb{R}$. Trouver une formulation faible symétrique du problème ci-dessus. En particulier, définir l'ensemble des solutions admissibles et celui des fonctions tests et spécifier lesquelles des conditions aux limites sont essentielles ou naturelles. Expliquer clairement chacune de vos réponses.

Question 5 (Élément fini de Hermite en dimension 1) :

Afin de résoudre le problème de la Question 5 par la méthode des éléments finis, on considère l'élément fini de référence $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ où :

$$\begin{aligned} &\widehat{K} = [-1,1],\\ &\widehat{P} = \mathbb{P}_3(\widehat{K}) = \Big\{p(\xi) = \textstyle\sum_{i=0}^3 a_i \xi^i,\ \forall \xi \in \widehat{K},\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \ldots, 3\Big\},\\ &\widehat{\Sigma} = \Big\{\hat{\sigma}_i : \widehat{P} \longrightarrow \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, 4\Big\}. \end{aligned}$$

Pour tout $p \in \widehat{P}$, les degrés de liberté sont choisis comme étant :

$$\hat{\sigma}_1(p) = p(-1), \quad \hat{\sigma}_2(p) = p(1), \quad \hat{\sigma}_3(p) = p'(-1), \quad \hat{\sigma}_4(p) = p'(1).$$

a) Calculer les fonctions de forme $\hat{\theta}_i(\xi)$, $i = 1, \ldots, 4$, et représenter sur une figure chacune de ces fonctions sur l'élément de référence $\widehat{K}$.
b) Soit le domaine $\Omega = (0,5)$ et une partition de Ω en deux éléments, $K_1 = [0,3]$ et $K_2 = [3,5]$, tels que $\overline{\Omega} = K_1 \cup K_2$. Tracer toutes les fonctions de base globales qui génèrent le sous-espace de $C^1(\overline{\Omega})$ formé par les fonctions polynomiales par morceaux, de degré 3, et définies sur $\overline{\Omega}$. L'espace $C^1(\overline{\Omega})$ est l'ensemble des fonctions dont les dérivées premières sont continues sur $\overline{\Omega}$.

SOLUTIONS

<u>QUESTION 1 (10 POINTS) :</u>

a) On suppose que la solution u_h satisfait :

$$B(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

Puisque $\phi_i \in V_h$ (fonctions de base de V_h), $i = 1, \ldots, N$, alors il suffit de prendre $v_h = \phi_i$ dans l'équation ci-dessus, ce qui implique :

$$B(u_h, \phi_i) = F(\phi_i), \quad i = 1, \ldots, N$$

b) On suppose maintenant que u_h satisfait: $B(u_h, \phi_i) = F(\phi_i)$, $i = 1, \ldots, N$. Comme $V_h = \text{vect}\{\phi_i\}$, toute fonction v_h de V_h peut s'écrire comme une combinaison linéaire des fonctions de base, i.e.

$$v_h = \sum_{i=1}^{N} v_i \phi_i.$$

où $v_i \in \mathbb{R}$. Soit $v_h \in V_h$, on a donc, en utilisant la linéarité de B et F :

$$\begin{aligned} B(u_h, v_h) - F(v_h) &= B\big(u_h, \sum_i v_i \phi_i\big) - F\big(\sum_i v_i \phi_i\big) = \sum_i v_i B(u_h, \phi_i) - \sum_i v_i F(\phi_i) \\ &= \sum_i v_i \big[B(u_h, \phi_i) - F(\phi_i)\big] = 0 \end{aligned}$$

Comme le résultat ci-dessus est valable pour toute fonction v_h de V_h, on a donc bien :

$$B(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

<u>QUESTION 2 (20 POINTS) :</u>

a) On suppose que $u \in U$ est la solution du problème de minimisation :

$$u = \underset{v \in U}{\text{argmin}}\, J(v), \quad \text{où } J(v) = \frac{1}{2} B(v, v) - F(v).$$

La dérivée de Gâteaux de J en u doit alors s'annuler pour toute variation $v \in V$, i.e.

$$J'_u(v) = \lim_{\theta \to 0} \frac{J(u + \theta v) - J(u)}{\theta} = 0, \qquad v \in V.$$

On a, en utilisant le fait que $B(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire et symétrique et que $F(\cdot)$ est linéaire :

$$\begin{aligned} J(u + \theta v) &= \frac{1}{2} B(u + \theta v, u + \theta v) - F(u + \theta v) \\ &= \frac{1}{2} B(u, u) - F(u) + \frac{\theta}{2} [B(u, v) + B(v, u)] - \theta F(v) + \frac{\theta^2}{2} B(v, v) \\ &= J(u) + \theta [B(u, v) - F(v)] + \frac{\theta^2}{2} B(v, v), \end{aligned}$$

soit :

$$\frac{J(u+\theta v)-J(u)}{\theta}=B(u,v)-F(v)+\frac{\theta}{2}B(v,v).$$

En prenant la limite, on obtient :

$$J'_u(v)=\lim_{\theta\to 0}\frac{J(u+\theta v)-J(u)}{\theta}=B(u,v)-F(v).$$

Puisque $u\in U$ doit satisfaire $J'_u(v)=0$, $\forall v\in V$, on retrouve donc la formulation faible :

$$\text{Trouver } u\in U \text{ telle que } \quad B(u,v)=F(v), \quad \forall v\in V.$$

b) On suppose maintenant que $u\in U$ satisfait le problème faible :

$$B(u,v)=F(v), \quad \forall v\in V.$$

Donc, pour une fonction arbitraire $v\in V$, on a :

$$J(u+v)=\frac{1}{2}b(u+v,u+v)-F(u+v)=\frac{1}{2}b(u,u)-F(u)+\frac{1}{2}[B(u,v)+B(v,u)]-F(v)+\frac{1}{2}B(v,v)$$

Par définition de J et le fait que $B(\cdot,\cdot)$ est symétrique, on obtient :

$$J(u+v)-J(u)=B(u,v)-F(v)+\frac{1}{2}B(v,v)$$

Comme u est solution du problème faible, $B(u,v)-F(v)=0$, et puisque $B(\cdot,\cdot)$ est définie positive, on en déduit que :

$$J(u+v)-J(u)\geq 0, \quad \forall v\in V,$$

ce qui nous permet de conclure que u est un minimum de la fonctionnelle J.

<u>Question 3 (35 points) :</u>

Le problème faible s'obtient par minimisation de $J(v)$ dans U. Il suffit de calculer la dérivée de Gâteaux de J dans chaque direction $v\in V=\{v\in H^1(0,2):\ v(2)=0\}$, soit :

$$J'(u)(v)=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\big[J(u+\theta v)-J(u)\big]=\int_0^2 2a^2u'v'dx+2u(0)v(0)-v(0)-v(1).$$

En prenant $J'(u)(v)=0$, $\forall v\in V$, on obtient le problème faible :

$$\text{Trouver } u\in U \text{ telle que : } \quad \int_0^2 2a^2u'v'dx+2u(0)v(0)=v(0)+v(1), \quad \forall v\in V.$$

La présence du terme $v(1)$ dans l'équation indique que le système est soumis à un chargement ponctuel à $x=1$ puisque :

$$v(1)=\int_0^2 \delta(x-1)v(x)dx, \quad \forall v\in H^1(0,2)\subset C^0[0,2].$$

La solution u du problème ci-dessus n'est donc pas dans $H^2(\Omega)$ globalement et l'on ne peut pas intégrer par parties. On peut cependant décomposer l'intégrale sur $\Omega=(0,2)$ en deux intégrales sur les deux sous-domaines $\Omega_1=(0,1)$ et $\Omega_2=(1,2)$:

$$\int_0^1 2u'v'dx+\int_1^2 8u'v'dx+2u(0)v(0)=v(0)+v(1).$$

En choisissant des fonctions test v_1 et v_2 dans $H^1(\Omega)$ qui s'annulent toutes sur Ω_2 et Ω_1, respectivement, on obtient alors :

$$\int_0^1 2u'v_1'dx + 2u(0)v_1(0) = v_1(0), \quad \forall v_1,$$
$$\int_1^2 8u'v_2'dx = 0, \quad \forall v_2,$$

ce qui permet de montrer que la solution u est suffisamment régulière sur chacun des sous-intervalles pour pouvoir intégrer par parties les deux intégrales. On obtient alors :

$$\int_{\Omega_1} -2u''v\,dx + \int_{\Omega_2} -8u''v\,dx + \big[-2u'(0) + 2u(0) - 1\big]v(0) + \big[2u'(1^-) - 8u'(1^+) - 1\big]v(1) = 0, \quad \forall \in V.$$

En appliquant judicieusement le lemme fondamental du calcul variationnel, le problème fort s'écrit :

Trouver $u \in C^0(\Omega)$ telle que $u|_{\Omega_1} \in C^\infty(\Omega_1)$, $u|_{\Omega_2} \in C^\infty(\Omega_2)$, et

$$\begin{aligned}
-2u'' &= 0, \quad \forall x \in (0,1), \\
-8u'' &= 0, \quad \forall x \in (1,2), \\
-2u'(0) + 2u(0) &= 1, \\
u(2) &= 2, \\
u(1^-) - u(1^+) &= 0, \\
2u'(1^-) - 8u'(1^+) &= 1.
\end{aligned}$$

Les deux dernières conditions en $x = 1$ sont appelées des conditions d'interface. La condition $u(1^-) = u(1^+)$ s'obtient du fait que $u \in H^1(\Omega) \subset C^0(\Omega)$.

Il suffit maintenant de résoudre le problème ci-dessus. On intègre directement les deux équations différentielles:

$$\begin{aligned}
u(x) &= Ax + B, \quad \forall x \in \Omega_1, \\
u(x) &= Cx + D, \quad \forall x \in \Omega_2,
\end{aligned}$$

et on utilise les deux conditions aux limites et les deux conditions d'interface pour identifier les quatre constantes d'intégration. Celles-ci satisfont le système :

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On a alors :

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{13x + 22}{18}, & \forall x \in [0,1] \\ \dfrac{x + 34}{18}, & \forall x \in (1,2] \end{cases}$$

Il est aussi judicieux de représenter la solution en utilisant le principe de superposition en séparant les contributions des conditions aux limites de celles des conditions d'interface (Dirac) :

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{4x + 7}{6} + \dfrac{x + 1}{18}, & \forall x \in [0,1] \\ \dfrac{x + 10}{6} + \dfrac{4 - 2x}{18}, & \forall x \in (1,2] \end{cases}$$

Question 4 (15 points) :

En faisant une double intégration par partie, afin d'obtenir une forme bilinéaire symétrique, et en appliquant les conditions aux limites, on obtient :

$$\text{Trouver } u \in U \text{ telle que : } \quad \int_0^1 EIu''v''dx = \int_0^1 qv\,dx + gv(0), \quad \forall v \in V,$$

où l'espace des fonctions admissibles et l'espace des fonctions test sont donnés par :

$$\begin{aligned} U &= \{u \in H^2(\Omega) :\ u(1) = 2,\ u'(0) = 0\}, \\ V &= \{v \in H^2(\Omega) :\ v(1) = 0,\ v'(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Les conditions $u(1) = 2$ et $u'(0) = 0$ sont dites essentielles tandis que les conditions $u''(1) = 0$ et $(EIu'')'(0) = g$ sont dites naturelles.

Question 5 (20 points) :

a) Soit $\hat{\theta}_j(\xi) = a_j + b_j\xi + c_j\xi^2 + d_j\xi^3$, $j = 1, \dots, 4$. La dérivée première de $\hat{\theta}_j$ est donnée par:

$$\hat{\theta}_j'(\xi) = b_j + 2c_j\xi + 3d_j\xi^2$$

Les coefficients des fonctions de forme satisfont le système d'équations suivant:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La solution de ce système est donnée par:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1(\xi) &= \frac{1}{4}\big(2 - 3\xi + \xi^3\big) = \frac{1}{4}\big(1 - \xi\big)\big(2 - \xi - \xi^2\big) \\ \hat{\theta}_2(\xi) &= \frac{1}{4}\big(2 + 3\xi - \xi^3\big) = \frac{1}{4}\big(1 + \xi\big)\big(2 + \xi - \xi^2\big) \\ \hat{\theta}_3(\xi) &= \frac{1}{4}\big(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3\big) = \frac{1}{4}\big(1 - \xi\big)^2\big(1 + \xi\big) \\ \hat{\theta}_4(\xi) &= \frac{1}{4}\big(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3\big) = -\frac{1}{4}\big(1 - \xi\big)\big(1 + \xi\big)^2 \end{aligned}$$

b) Soient $\theta_i^1(x)$ et $\theta_i^2(x)$, $i = 1, \dots, 4$, les fonctions de forme sur les éléments K_1 et K_2, respectivement. Les fonctions de base globales ϕ_j, $j = 1, \dots, 6$, sont données par:

$$\phi_1 = \begin{cases} \theta_1^1, & x \in K_1 \\ 0, & x \in K_2 \end{cases} \quad \phi_2 = \begin{cases} \theta_2^1, & x \in K_1 \\ \theta_1^2, & x \in K_2 \end{cases} \quad \phi_3 = \begin{cases} 0, & x \in K_1 \\ \theta_2^2, & x \in K_2 \end{cases}$$

$$\phi_4 = \begin{cases} \theta_3^1, & x \in K_1 \\ 0, & x \in K_2 \end{cases} \quad \phi_5 = \begin{cases} \theta_4^1, & x \in K_1 \\ \theta_3^2, & x \in K_2 \end{cases} \quad \phi_6 = \begin{cases} 0, & x \in K_1 \\ \theta_4^2, & x \in K_2 \end{cases}$$

Remarquer que les fonctions de forme $\theta_i^1(x)$ et $\theta_i^2(x)$, $i = 3, 4$, ont besoin d'être normalisées (par le Jacobien) afin d'assurer la continuité de la dérivée au point $x = 2$ (en particulier pour ϕ_5).