

Travaux dirigés MTH1101 - Calcul I  
TD n°5  
**Nathanaël Perrin**

Pour le vendredi 22 octobre

**Exercices d'introduction aux fonctions à plusieurs variables**

1. Soit  $f(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2-1}$ 
  - (a) Quel est le domaine de définition de  $f$  ? Faire un dessin du domaine de définition de  $f$  en identifiant avec attention les points qui n'en font pas partie.
  - (b) Pour  $c = 0$  et  $c = 1$ , donner  $E_c$  les courbes de niveau de  $f$  et tracer ces courbes sur le graphique précédent.

2. Soit la fonction  $f$  suivante définie par morceaux sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$f(x, y) = \begin{cases} \cos(x^2 + y) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Résoudre cet exercice d'après la question du 1. (b).

3. Répondre par vrai ou faux et justifier :

- (a) Les courbes de niveau de  $f(x, y) = \sin(y)$  sont des droites parallèles à l'axe des  $x$  ?
  - (b) Pour une courbe de niveau donné, la valeur de la fonction ne change pas sur cette courbe ?
  - (c) Les courbes de niveau  $f(x, y) = c_1$  et  $f(x, y) = c_2$  pour  $c_1 \neq c_2$  peuvent se rencontrer en un point  $(x_0, y_0)$  ?
  - (d) Une courbe de niveau peut-être un point seulement ?
  - (e) Pour  $f(x, y) = c$  une courbe de niveau de  $f$ , il est possible d'avoir plus d'une courbe pour une même valeur de  $c$  ?
4. En examinant les courbes de niveau  $f(x, y) = c$ , autour d'un point  $P$  de coordonnées  $(x, y)$ , quelle condition faut-il imposer aux valeurs de  $c$  (décroissance, croissance) lorsque l'on se rapproche de  $P$  pour obtenir soit un minimum local, soit un maximum local ?
  5. Quelle est l'équation de la surface de niveau de la fonction  $f(x, y, z) = 4y^2 + x^2 - z^2$  passant par le point  $P$  de coordonnées  $(2, 1, 3)$  ?
  6. La puissance  $P$  développée par une éolienne est proportionnelle au produit de l'aire  $A$  balayée par les pales et de la puissance 3 de la vitesse du vent  $V$ . Représentation très simplifiée page suivante.
    - (a) Exprimer  $P$  comme fonction de  $A$  et de  $V$ .
    - (b) Dessiner de façon générale les courbes de niveau de  $P$  dans le plan aire-vitesse et donner leur interprétation physique.
    - (c) Supposons que le diamètre de la surface balayée par les pales est de 3m et que la puissance fournie est de 3000W avec un vent soufflant à 30km/h. Donner l'équation de la courbe de niveau  $P = 4000W$ .

