

Travaux dirigés MTH1101 - Calcul I
TD n°5
Nathanaël Perrin

Pour le vendredi 22 octobre

Exercices d'introduction aux fonctions à plusieurs variables

1. Soit $f(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2-1}$
 - (a) Quel est le domaine de définition de f ? Faire un dessin du domaine de définition de f en identifiant avec attention les points qui n'en font pas partie.
 - (b) Pour $c = 0$ et $c = 1$, donner E_c les courbes de niveau de f et tracer ces courbes sur le graphique précédent.

2. Soit la fonction f suivante définie par morceaux sur \mathbb{R}^2 :

$$f(x, y) = \begin{cases} \cos(x^2 + y) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Résoudre cet exercice d'après la question du 1. (b).

3. Répondre par vrai ou faux et justifier :

- (a) Les courbes de niveau de $f(x, y) = \sin(y)$ sont des droites parallèles à l'axe des x ?
 - (b) Pour une courbe de niveau donné, la valeur de la fonction ne change pas sur cette courbe ?
 - (c) Les courbes de niveau $f(x, y) = c_1$ et $f(x, y) = c_2$ pour $c_1 \neq c_2$ peuvent se rencontrer en un point (x_0, y_0) ?
 - (d) Une courbe de niveau peut-être un point seulement ?
 - (e) Pour $f(x, y) = c$ une courbe de niveau de f , il est possible d'avoir plus d'une courbe pour une même valeur de c ?
4. En examinant les courbes de niveau $f(x, y) = c$, autour d'un point P de coordonnées (x, y) , quelle condition faut-il imposer aux valeurs de c (décroissance, croissance) lorsque l'on se rapproche de P pour obtenir soit un minimum local, soit un maximum local ?
 5. Quelle est l'équation de la surface de niveau de la fonction $f(x, y, z) = 4y^2 + x^2 - z^2$ passant par le point P de coordonnées $(2, 1, 3)$?
 6. La puissance P développée par une éolienne est proportionnelle au produit de l'aire A balayée par les pales et de la puissance 3 de la vitesse du vent V . Représentation très simplifiée page suivante.
 - (a) Exprimer P comme fonction de A et de V .
 - (b) Dessiner de façon générale les courbes de niveau de P dans le plan aire-vitesse et donner leur interprétation physique.
 - (c) Supposons que le diamètre de la surface balayée par les pales est de 3m et que la puissance fournie est de 3000W avec un vent soufflant à 30km/h. Donner l'équation de la courbe de niveau $P = 4000W$.

