

GLQ3401/GLQ3651 : Deuxième partie

Rappel variogramme



**POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL**

UNIVERSITÉ
D'INGÉNIERIE

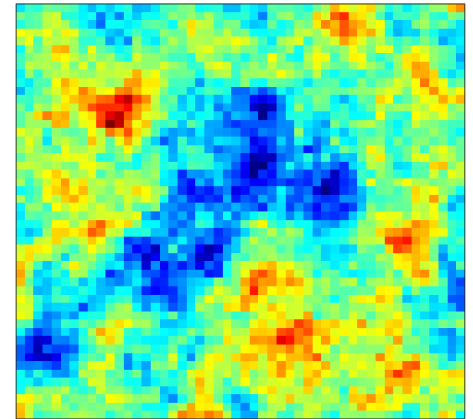
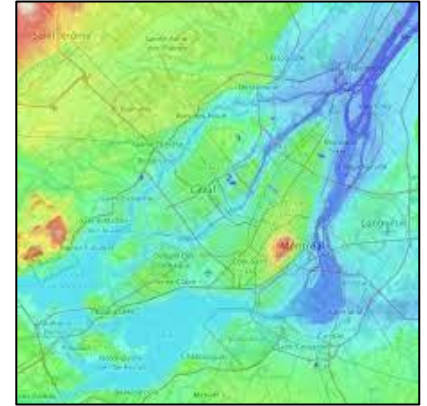
Point de vue de la géostatistique

Première loi de la géographie

« Tout interagit avec tout, mais deux objets proches ont plus de chances de le faire que deux objets éloignés », **Waldo Tobler**

Aussi vrai en géologie.

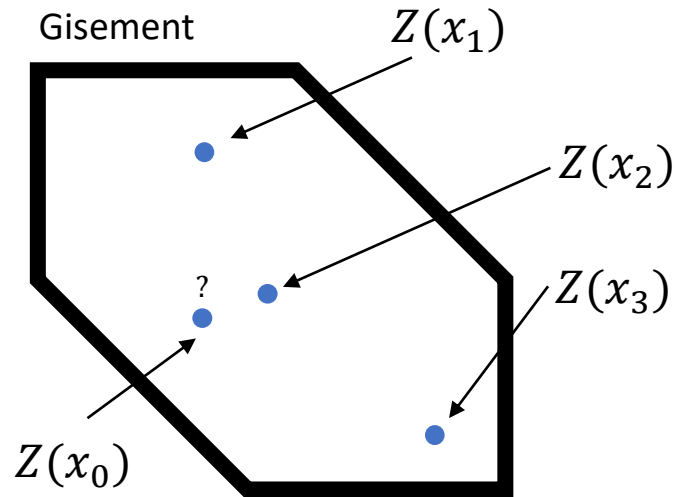
Deux observations situées l'une près de l'autre devraient, en moyenne, se ressembler davantage que deux observations éloignées.



Point de vue de la géostatistique

Idée fondamentale : La nature n'est pas entièrement "imprévisible". Deux observations situées l'une près de l'autre devraient, en moyenne, se ressembler davantage que deux observations éloignées.

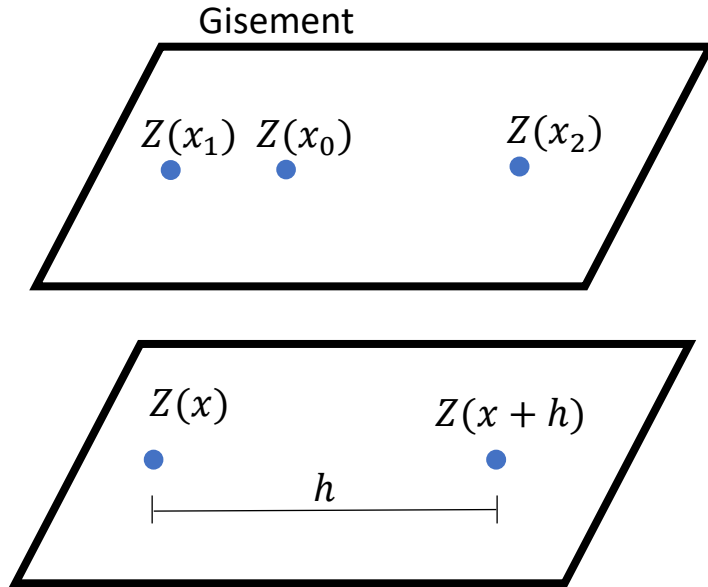
Attaquer le problème d'un point de vue de la géostatistique



Un gisement est constitué de plusieurs points ('quasi-points')

- Chaque point représente une teneur
- Chaque teneur est une v.a. $Z_i(x_i)$
- L'ensemble des teneurs suit une loi multivariable, de dimension n , le nombre de points.

Hypothèse de stationnarité



Stationnarité du second ordre

L'espérance mathématique ne dépend pas de la localisation x

- $E[Z(x)] = m$
- $E[Z(x) - Z(x + h)] = 0$

La covariance ne dépend que de h

- $Cov(Z(x), Z(x + h)) = C(h)$, covariogramme
- $\frac{1}{2}Var(Z(x) - Z(x + h)) = \gamma(h)$, variogramme
- $Var [Z(x)] = C(0)$, constante

$\gamma(h) \rightarrow$ fonction la plus utilisée pour caractériser la continuité d'une minéralisation

Effet de support et d'information

Pour une même quantité de matière extraite :

→ on récupère toujours moins de métal avec de gros blocs qu'avec des petits blocs (**effet support**)

→ on récupère toujours moins de métal avec des estimations qu'avec les vraies valeurs (**effet information**)

La géostatistique permet théoriquement de

- prévoir l'ampleur de ces effets
- Minimiser ces effets
- Prendre des décisions éclairées au vu de ces effets

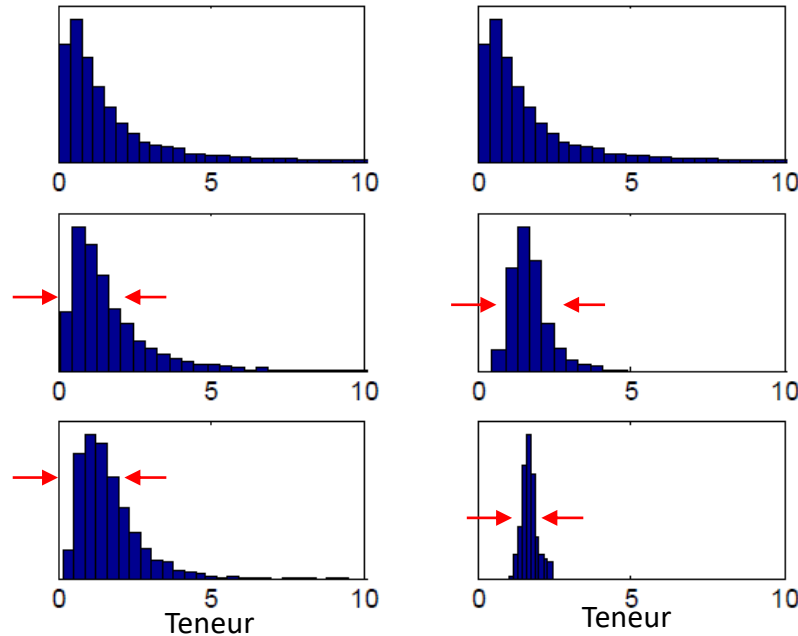
Effet de support et d'information

Effet de support



Gisement A

Gisement B

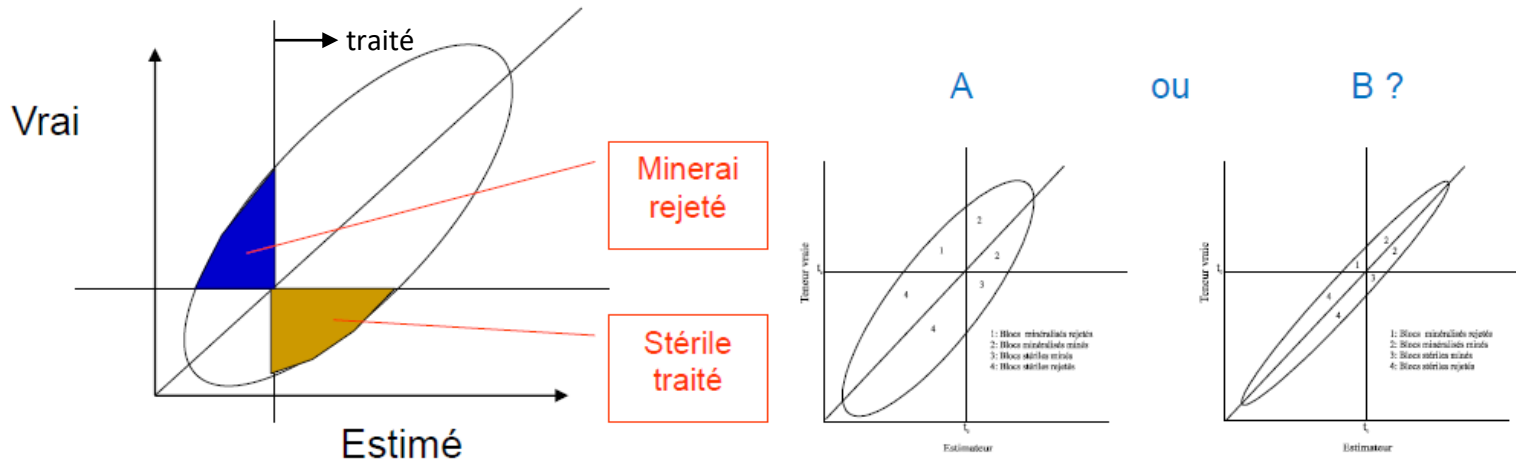


Qu'observe-t-on de particulier ?

Pourquoi ? Explication ?

Effet de support et d'information

Effet d'information : On mine à partir d'estimations, mais on récolte des valeurs vraies.



Peut-on prévoir les plages d'erreur et les pertes en \$?
Augmenter l'information disponible (\$) pour réduire les pertes ?

* La précision dépend du nombre de données, mais aussi des caractéristiques du gisement.

Covariance et variogramme

Définition covariance :

$$C(h) = C(Z(x), Z(x + h)) = E[(Z(x) - m_z)(Z(x + h) - m_z)]$$

Définition variogramme :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{Var}(Z(x) - Z(x + h)) = \frac{1}{2} E[(Z(x) - Z(x + h))^2]$$

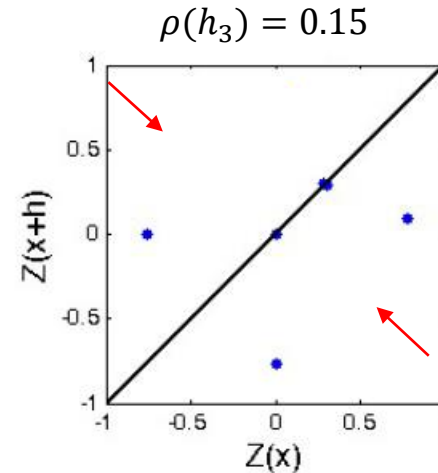
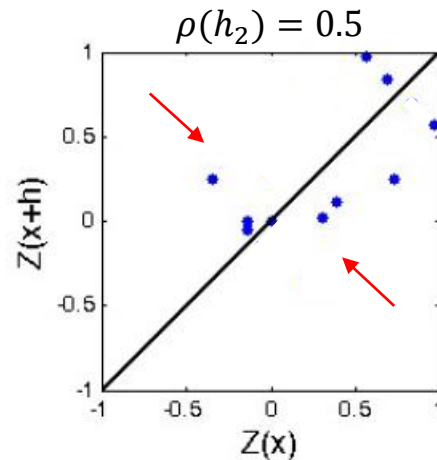
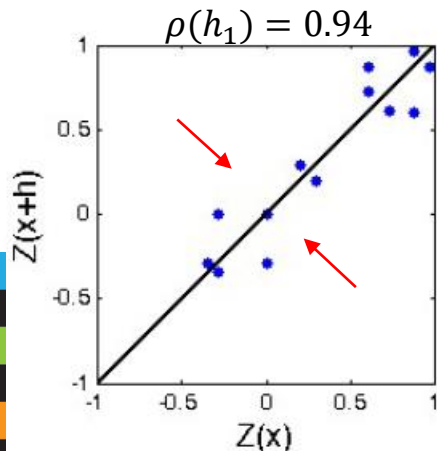
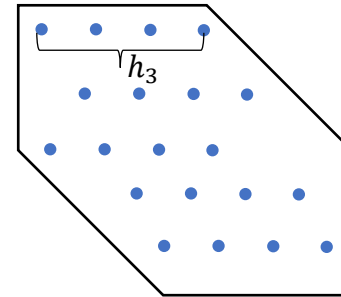
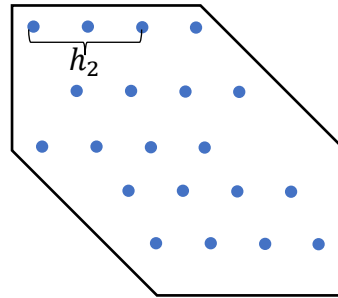
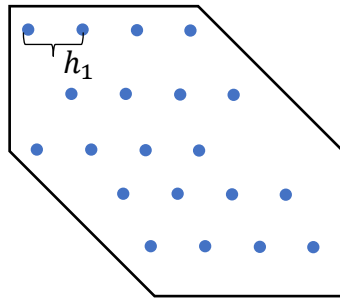
Le calcul du variogramme ne requiert pas l'estimation de la moyenne.
Un avantage précieux comparativement à la covariance.

Covariance et corrélation

Covariance et corrélation

$$C(h) = \text{Cov}(Z(x), Z(x+h)) \\ = E[(Z(x) - m)(Z(x+h) - m)]$$

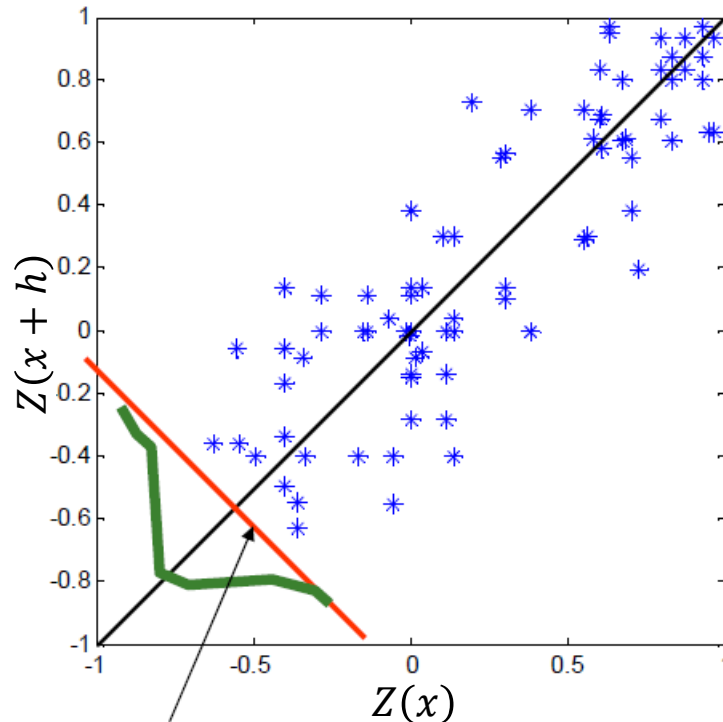
Gisement



Généralement
si $h \uparrow$, $C \downarrow$, $\rho \downarrow$

Variogramme

Variogramme



Mesure la dispersion sur cette droite

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{Var}(Z(x) - Z(x+h))$$
$$= \frac{1}{2} E \left[(Z(x) - Z(x+h))^2 \right]$$

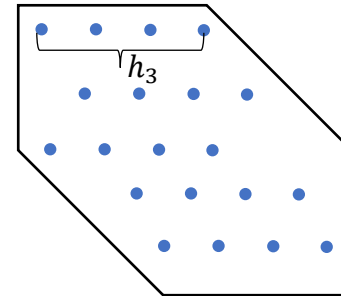
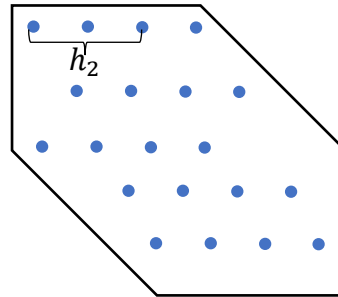
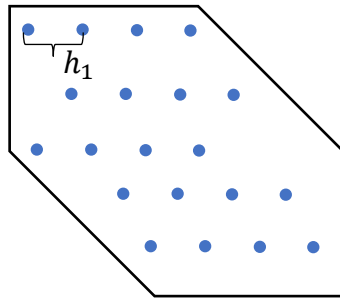
Généralement
si $h \uparrow$, $\gamma \uparrow$

Variogramme

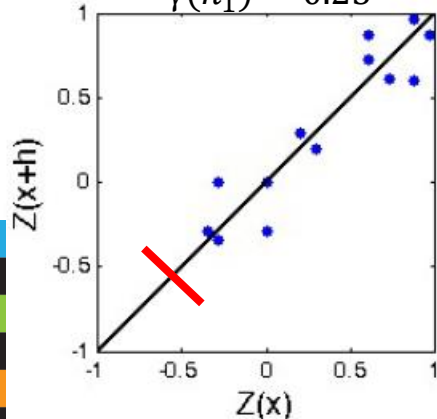
Variogramme

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{Var}(Z(x) - Z(x+h))$$

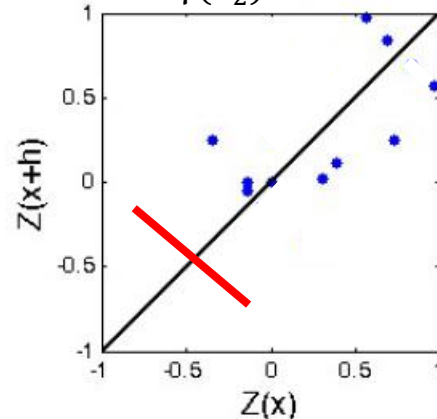
Gisement



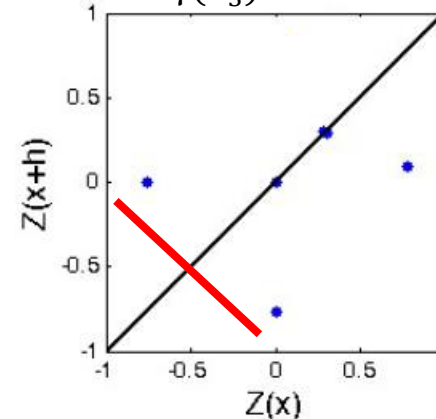
$$\gamma(h_1) = 0.25$$



$$\gamma(h_2) = 0.5$$



$$\gamma(h_3) = 0.75$$



Généralement
si $h \uparrow$, $\gamma \uparrow$

Symétrie du variogramme

Le variogramme est symétrique sous
l'hypothèse de stationnarité
 $\gamma(h) = \gamma(-h)$

Démonstration : Avec, $y = x + h$ ← La covariance est invariante par translation

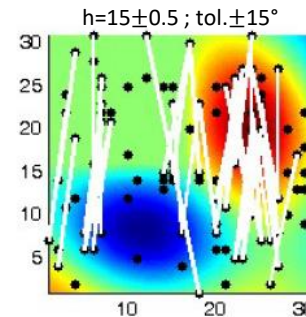
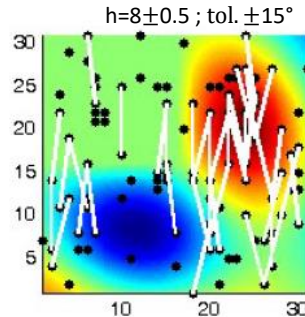
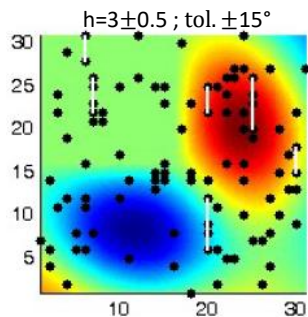
$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \frac{1}{2} \text{Var}(Z(x) - Z(x + h)) = \frac{1}{2} \text{Var}(Z(y - h) - Z(y)) \\ &= \frac{1}{2} E \left[(Z(y - h) - Z(y))^2 \right] = \frac{1}{2} E \left[(Z(y) - Z(y - h))^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Var}(Z(y) - Z(y - h)) = \gamma(-h)\end{aligned}$$

Variogramme expérimental

$$\text{Variogramme expérimental : } \gamma_e(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (Z(x_i) - Z(x_i + h))^2$$

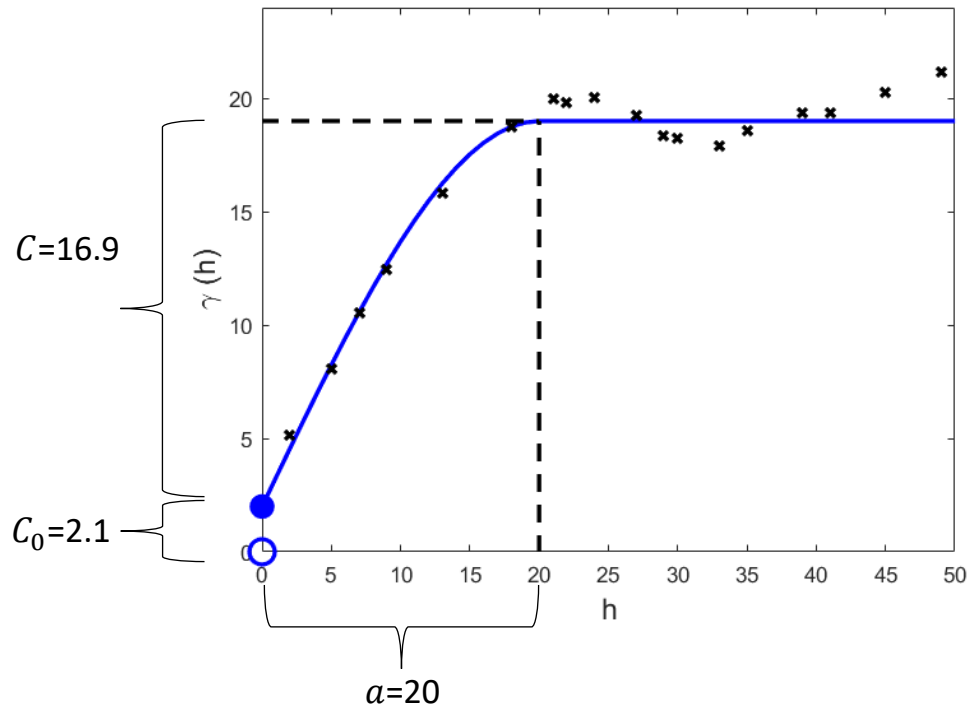
Étapes du calcul de $\gamma_e(h)$:

1. Choisir une direction h et les tolérances;
 - Direction Nord, $\pm 0.5\text{m}$ (tolérance sur la direction) et $\pm 15^\circ$ (tolérance sur l'angle)
2. Discrétiser h en classes distinctes;
 - $h = \{3\text{m}, 8\text{m}, 15\text{m}\}$
3. Identifier et répartir les couples de points $(x_i, x_i + h)$ dans les classes $N(h)$;
4. Calculer $\gamma_e(h)$ pour chaque classe.



Variogramme expérimental et théorique

Le variogramme expérimental est un *estimateur* du variogramme théorique à partir des données observées



Croix noires : expérimental

Ligne bleue : théorique

Variogramme expérimental et théorique

Un modèle théorique est requis afin d'assurer que toutes variances calculées à partir du modèle sont nulles ou positives.

Soit une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i$, il faut démontrer pour $\forall n, \forall \lambda_i$ et $\forall Z_i$ que :

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \text{Cov}(Z_i, Z_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C(h_{i,j}) \geq 0$$

BEURK!!!

FIUU !!

Utilisation de modèles éprouvés

Note 1 : C est nommé la matrice de covariance et elle fournit la covariance entre chaque paire d'éléments. Il suffit de démontrer que C est semi-défini positive pour vérifier l'admissibilité d'un modèle pour toutes les combinaisons linéaires possibles.

Note 2: La relation est valide seulement si le variogramme présente un palier. Sinon, l'équation à démontrer est légèrement plus complexe. Il faut stipuler que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, et démontrer que $\text{Var}(\sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma(h_{i,j}) \geq 0$.

Variogramme expérimental et théorique

Variogramme théorique

Lorsqu'un variogramme **présente un seuil**, il est défini par :

- **La portée** (a) : distance à partir de laquelle deux points de l'espace ne sont plus liés un à l'autre (covariance nulle, $C(h > a) = 0$). Pour un modèle asymptotique, la covariance tend vers zéro ($C(h > a) \rightarrow 0$).
- **Le palier** ($\sigma^2 = C_0 + \sum_i C_i$): variance de la variable aléatoire $Z(x)$.
- **L'effet de pépite** (C_0): variation à très courte échelle, erreurs de mesure, de localisation, de précision ou d'analyse

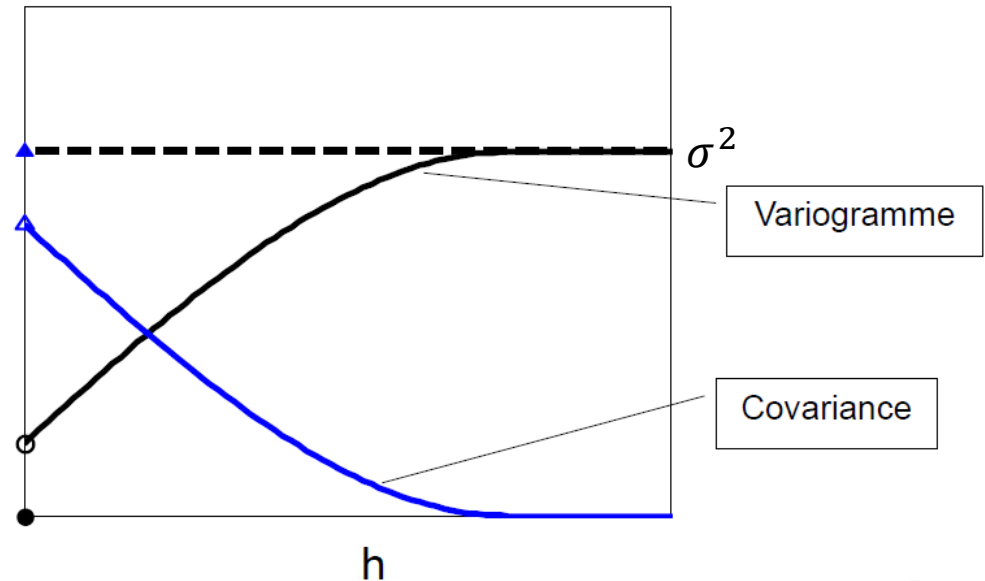
Variogramme théorique et covariance

Variogramme théorique

Liens entre covariance et variogramme

$$\gamma(h) = \sigma^2 - C(h)$$

Uniquement vrai si le variogramme présente un palier, sinon σ^2 n'est pas défini



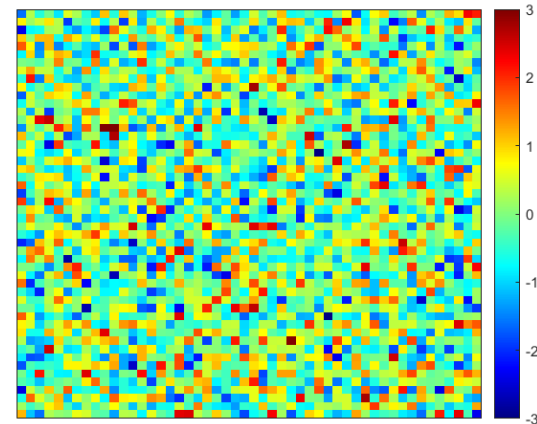
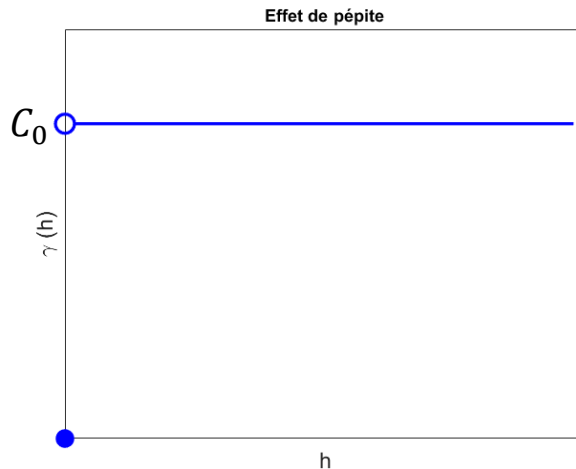
Modèles de variogrammes admissibles

Modèles communs : Effet de pépité

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0, & \text{si } h = 0 \\ C_0, & \text{si } h > 0 \end{cases}$$

- Erreur de mesure
- Erreurs de localisation
- Erreur d'analyse (Gy)
- Microstructure non identifiable due au manque de données

Presque toujours présent, jamais seul, sinon estimation impossible. Pourquoi ?

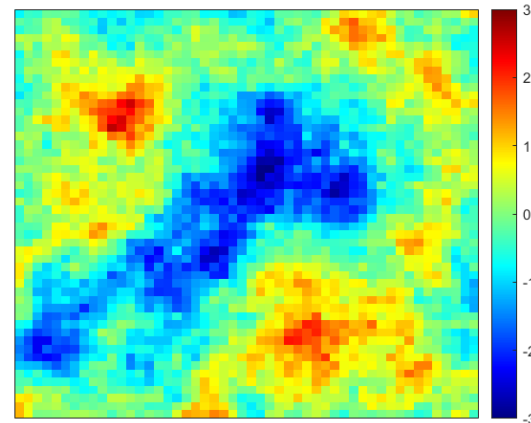
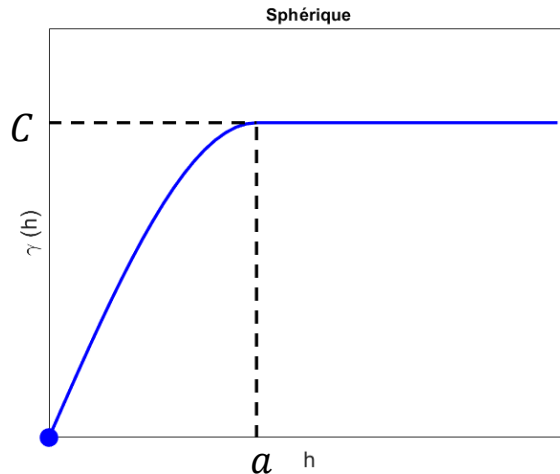


Modèles de variogrammes admissibles

Modèles communs : sphérique

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & , \text{si } h = 0 \\ C \left(1.5 \frac{h}{a} - 0.5 \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right) & , \text{si } 0 < h < a \\ C & , \text{si } h \geq a \end{cases}$$

- Modèle le plus fréquent
- Teneur, épaisseur, conductivité hydraulique
- Souvent combiné avec un effet de pépite



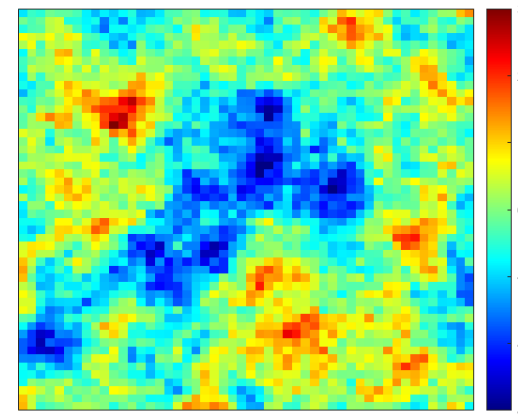
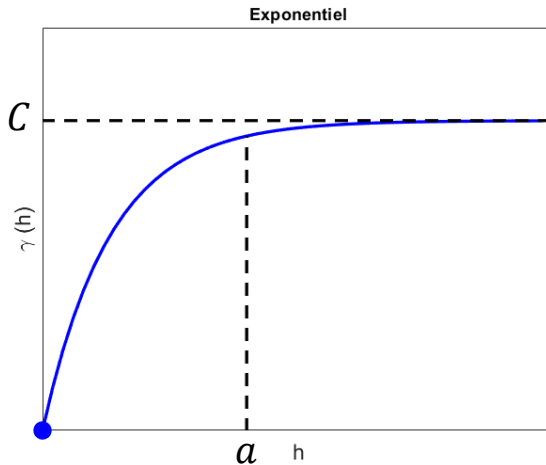
Modèles de variogrammes admissibles

Modèles communs : exponentielle (modèle asymptotique)

$$\gamma(h) = C \left(1 - \exp\left(-\frac{|h|}{a'}\right) \right) = C \left(1 - \exp\left(-\frac{3|h|}{a}\right) \right)$$

a : portée effective ; $\gamma(h) = 0.95C$
 $a' = a/3$

- Assez commun
- Semblable au sphérique
- Très utilisé pour modéliser les conductivités hydrauliques



Modèles de variogrammes admissibles

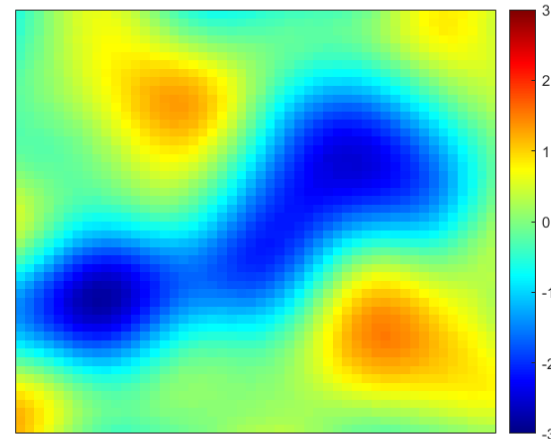
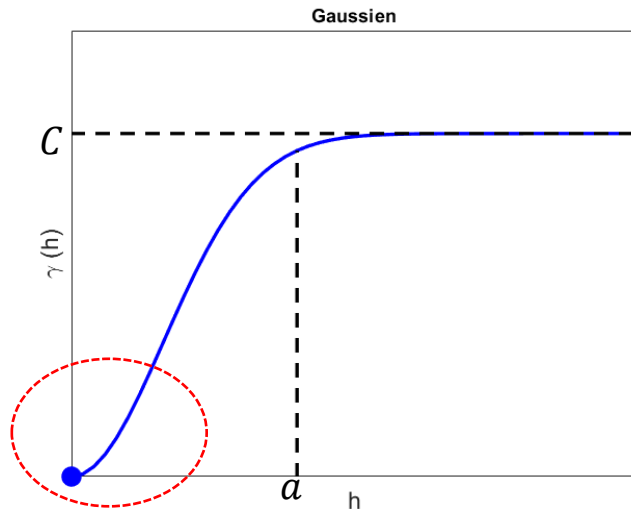
Modèles communs : gaussien (modèle asymptotique)

$$\gamma(h) = C \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{|h|}{a'} \right)^2 \right) \right) = C \left(1 - \exp \left(-3 \left(\frac{|h|}{a} \right)^2 \right) \right)$$

a : portée effective ; $\gamma(h) = 0.95C$

$$a' = a/\sqrt{3}$$

- Peu fréquent en mine
- Variables très continues: p. ex. topographie, gravimétrie, magnétisme, épaisseur...
- Problèmes numériques si absence d'effet de pépite

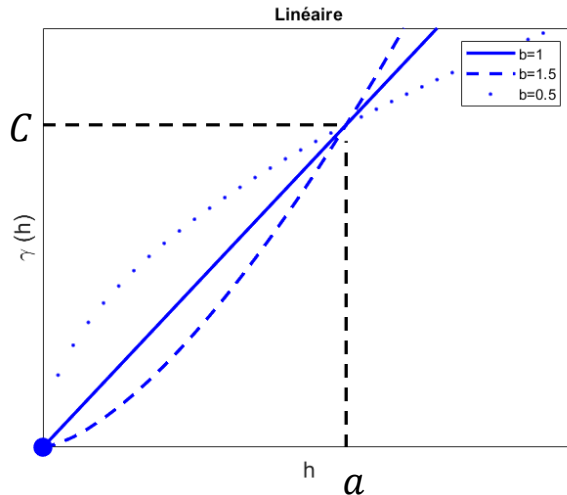


Modèles de variogrammes admissibles

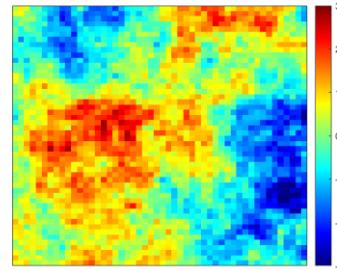
Modèles communs : puissance, modèle sans palier

$$\gamma(h) = C \left(\frac{|h|}{a} \right)^b, |h| > 0, 0 \leq b < 2$$

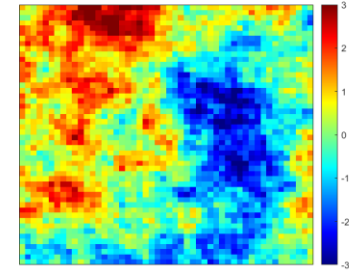
- Moyenne, variance et covariance non définies;
- On observe le phénomène géologique à petite échelle.



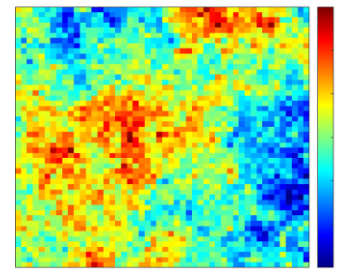
$b = 1.5$



$b = 1$



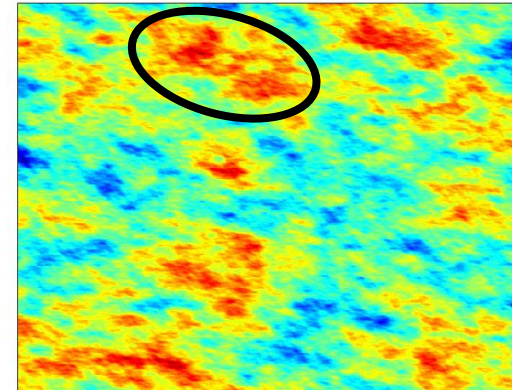
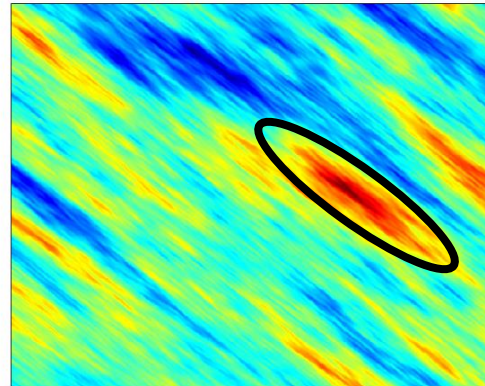
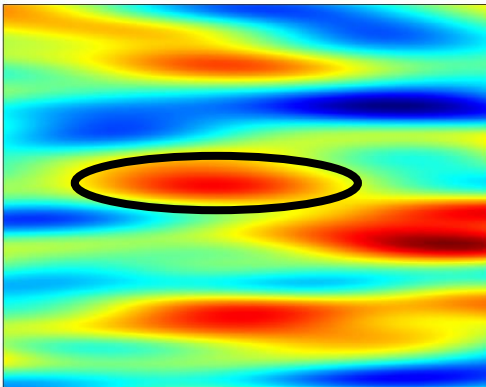
$b = 0.5$



Anisotropies

Anisotropies géométriques :

Il n'est pas rare que la continuité spatiale présente des directions préférentielles. Le contexte de formation des zones minéralisées favorise une direction au détriment d'une autre (veines, intrusions, sédimentations ...).



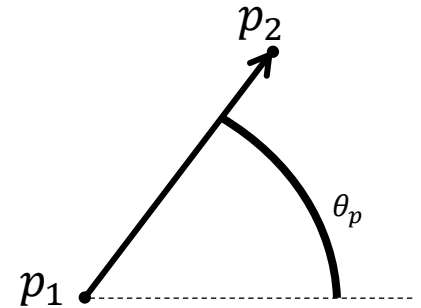
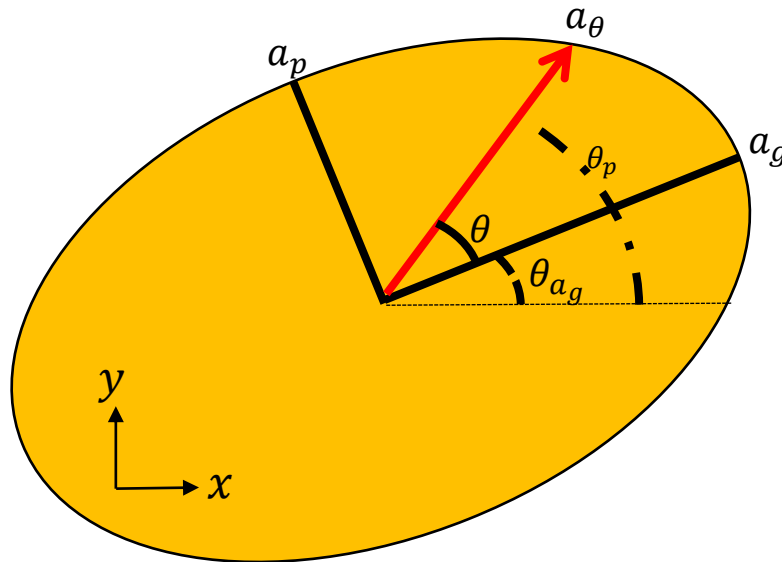
On utilise généralement un ellipsoïde pour caractériser l'anisotropie

Anisotropies

Anisotropies géométriques

On définit la portée dans une direction $\overline{p_1 p_2}$ par :

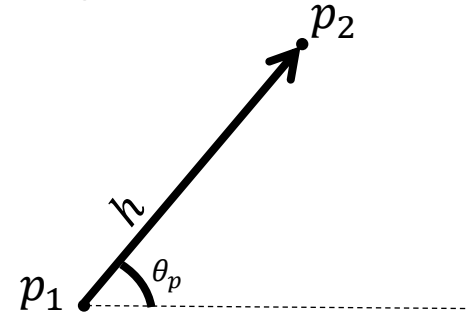
$$a_\theta = \frac{a_g a_p}{\sqrt{a_p^2 \cos^2 \theta + a_g^2 \sin^2 \theta}}$$



Anisotropies

Anisotropies géométriques : calcul du variogramme pour deux points

1) déterminer la distance (h) et l'angle (θ_p) formé par les points p_1 et p_2 ;

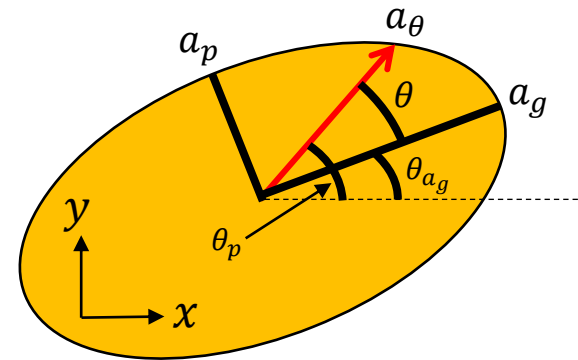


2) Calculer θ soit l'angle formé entre a_g et le vecteur constitué des points p_1 et p_2 ;

3) Calculer a_θ soit la portée effective dans la direction du vecteur formé par p_1 et p_2 ;

$$a_\theta = \frac{a_g a_p}{\sqrt{a_p^2 \cos^2 \theta + a_g^2 \sin^2 \theta}}$$

4) Calculer le variogramme $\gamma(h, a_\theta)$ avec la portée a_θ et la distance h .



GLQ3401/GLQ3651 : Deuxième partie

Cours 7 : Variance de bloc et variance de dispersion



**POLYTECHNIQUE
MONTREAL**

UNIVERSITÉ
D'INGÉNIERIE

Objectifs

- Comprendre les notions de variance de bloc et de variance de dispersion et décrire le lien avec le variogramme et la continuité spatiale qu'il exprime;
- Calculer les variances de bloc et variances de dispersion avec les abaques ;
- Effectuer la sélection de la meilleure alternative pour homogénéiser le minerai ;
- Recommander un sens de déplacement d'une pelle dans une mine pour minimiser la variabilité au concentrateur ;
- Prévoir l'impact sur la variabilité au concentrateur d'exploiter simultanément différentes portions du gisement.

Plan du cours

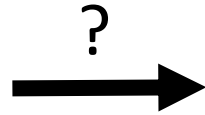
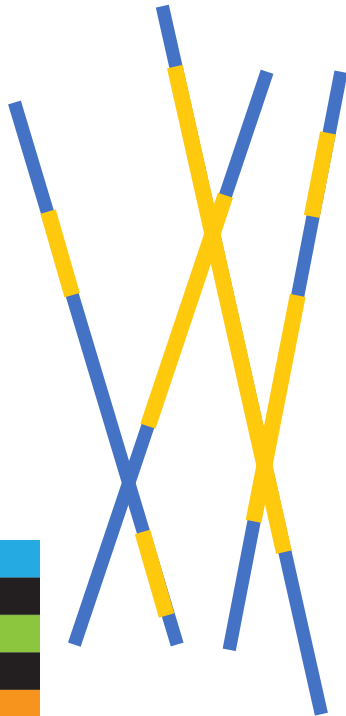
1. Effet de support
2. Variance de bloc et propriétés
3. Abaques
4. Variance de dispersion et propriétés
5. Effet de pépite et variance de dispersion
6. Exemples
7. Homogénéité du minerai
8. Règle simple et influence du modèle
9. Covariance et variogramme de blocs

1. Effet de support

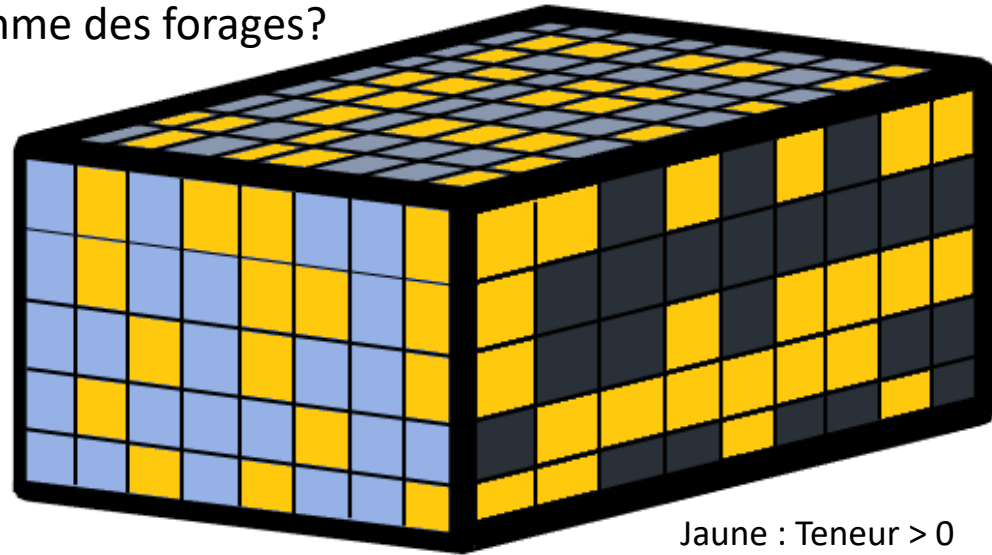
Transformation des données quasi ponctuelles (forages) en modèle de bloc :

- Taille des blocs ?
- Changement sur le variogramme ?
- Impact sur l'estimation ?
- Prédire l'influence de la transformation à partir du variogramme des forages ?

Forages



Gisement



Jaune : Teneur > 0
Bleu : Teneur = 0

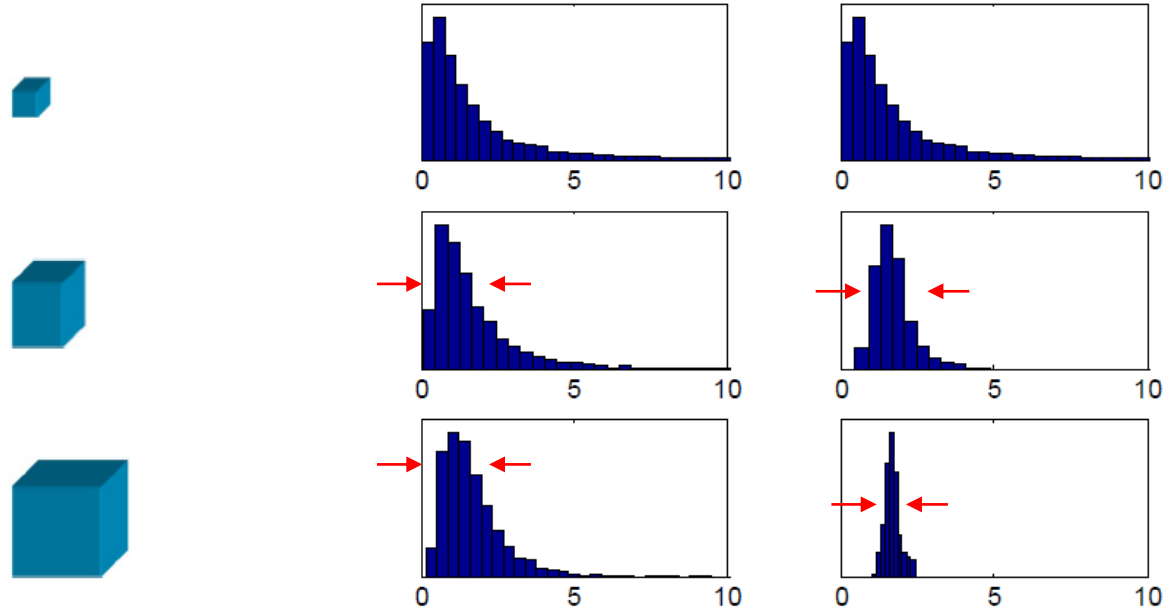
1. Effet de support

Transformation des données quasi ponctuelles (forages) en modèle de bloc :

- Les teneurs de blocs représentent la **moyenne des données ponctuelles** à l'intérieur du bloc;
- La taille du bloc ne doit pas être **trop petite, ni trop grande**;
- La taille du bloc doit **correspondre à la méthode d'extraction** choisie par la mine et non nuire à celle-ci. Discuter avec les ingénieurs et les scientifiques;
- Les **décisions importantes de la mine sont en lien avec la taille des blocs** (p. ex. la séquence de minage, la zone d'extraction, l'optimisation de la fosse, l'efficacité du traitement au concentrateur ...).

1. Effet de support

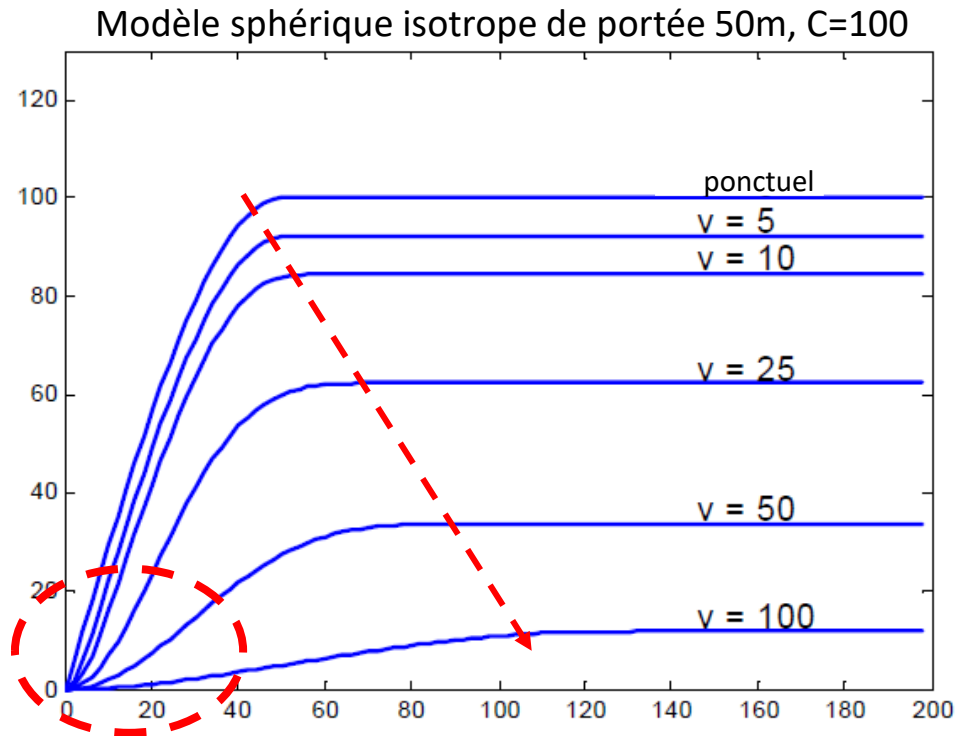
Impact sur les teneurs :



Est-ce que le variogramme permet de prédire l'évolution des histogrammes des teneurs de blocs des deux gisements en fonction de la taille ?

1. Effet de support

Problématique : Lorsque l'on change de support (v), le variogramme théorique est modifié.



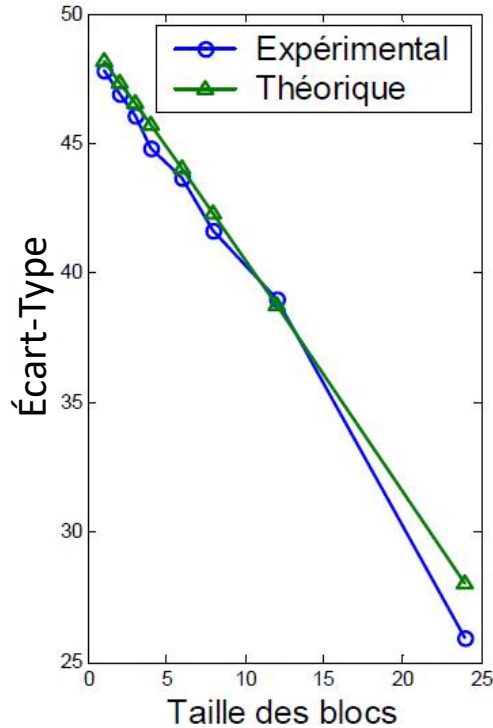
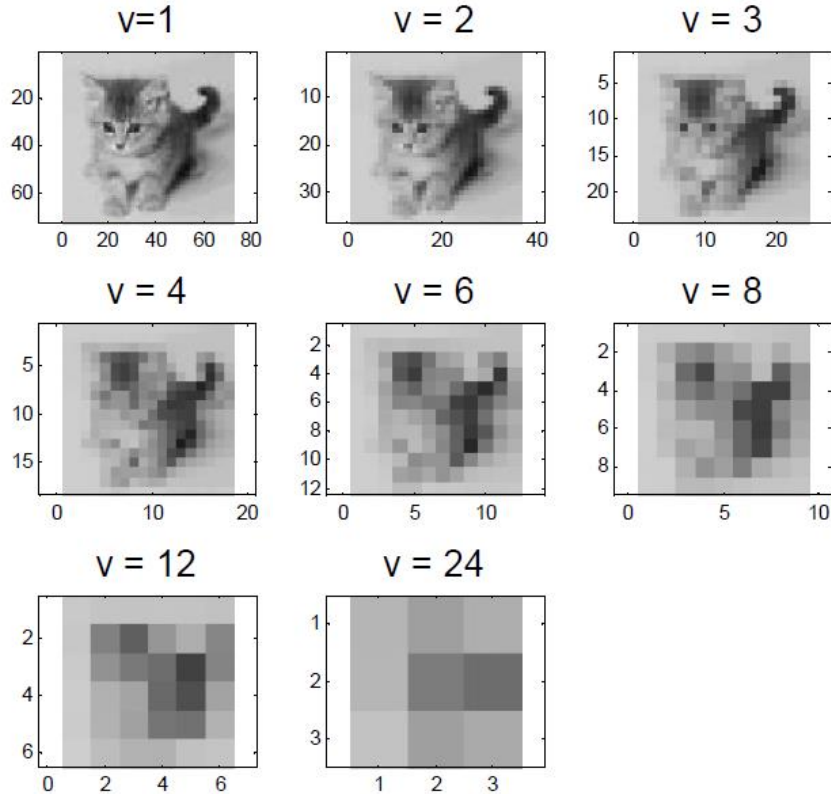
Que remarque-t-on lorsque l'on augmente le support ?

- Le modèle change
- Le palier diminue
- La portée augmente

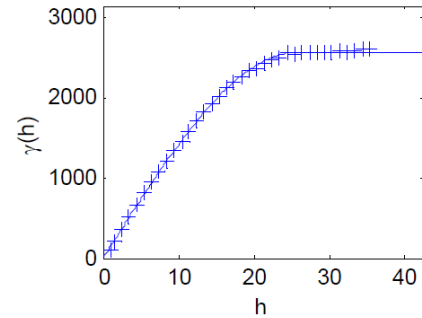
Le variogramme de blocs est plus lisse à l'origine que le variogramme ponctuel

1. Effet de support

Variance de bloc expérimentale et théorique :

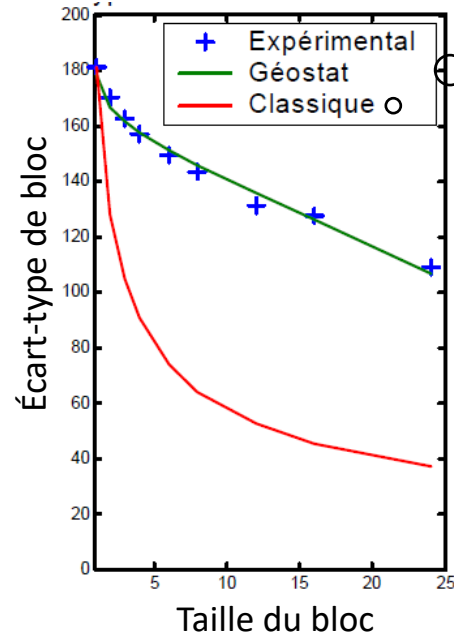
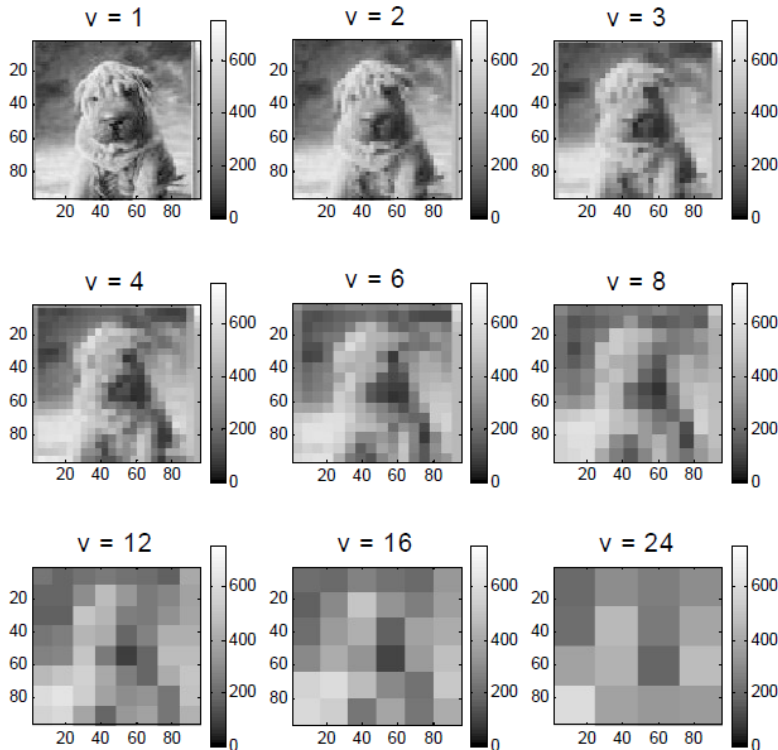


Modèle sphérique; $a=23$



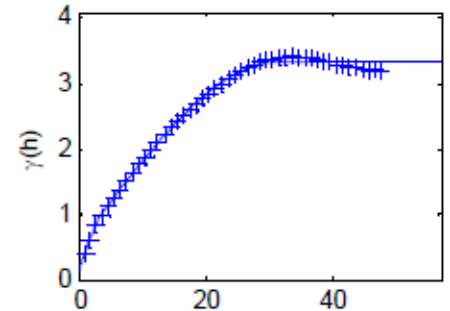
1. Effet de support

Variance de bloc expérimentale et théorique :



On néglige les covariances spatiales

Modèle exponentiel; $a \approx 26$

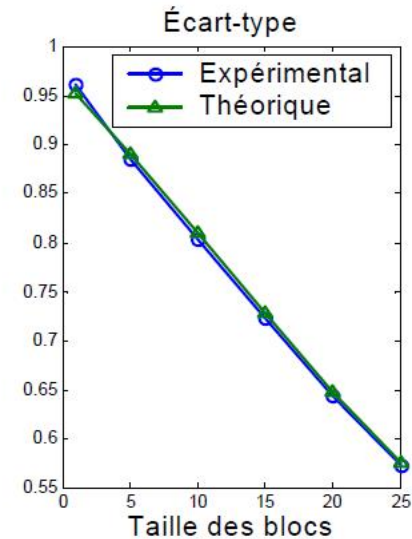
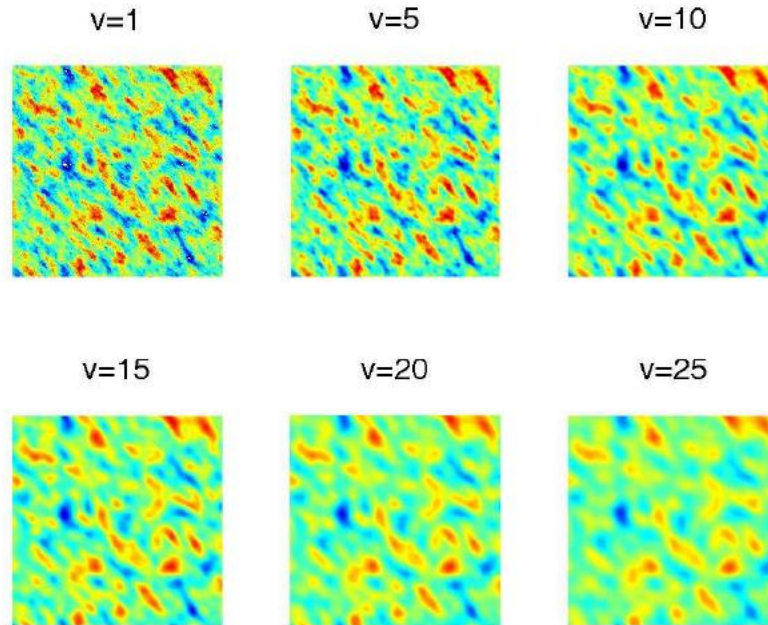


1. Effet de support

Variance de bloc expérimentale et théorique :

Exemple plus représentatif d'un gisement réel

Modèle sphérique; $a_{45}=20$, $a_{135}=40$, $C=1$



1. Effet de support

Variance de bloc expérimentale et théorique :

Le **variogramme ponctuel** suffit à prédire avec une bonne précision les variances des blocs de n'importe quelle taille sans jamais à connaître la teneur de ces blocs

2. Variance de bloc et propriétés

Définitions :

Teneur d'un bloc : $Z_v(x) = \frac{1}{v} \int_v Z(y) dy$ \longrightarrow Moyenne des points
contenue dans le bloc v

Variance de bloc : $Var(Z_v(x)) = \sigma_v^2 = E[(Z_v(x) - m_Z)^2]$

$$= \frac{1}{v^2} \int_v \int_v Cov(Z(y_1), Z(y_2)) dy_1 dy_2$$

$$= \bar{C}(v, v) \longrightarrow$$

Moyenne des covariances. La
moyenne est prise sur toutes les
paires formées de deux points
dans v

- Dépend que du bloc v et de la covariance
- Ne dépend pas de la localisation particulière du bloc dans l'espace

➤ **C'est stationnaire**

2. Variance de bloc et propriétés

Comment obtenir $\bar{C}(v, v)$ et $\bar{\gamma}(v, v)$?

- 1D : analytique ou numérique
- 2D : abaques ou numérique
- 3D : abaques ou numérique

Numériquement : p. ex. GEOMIN

- Le fichier est valide pour un bloc orienté dans les directions de l'anisotropie ;
- Les modèles sphérique, exponentiel et gaussien sont disponibles ;
- Valide en 1D,2D,3D. Poser les longueurs nulles si 1D ou 2D ;
- Approximatif. La discrétisation du bloc n'est pas assez fine ;
- Transformation linéaire vers la cas isotrope plus simple à calculer ;
- Les dimensions du bloc sont divisées par les portées de l'anisotropie.

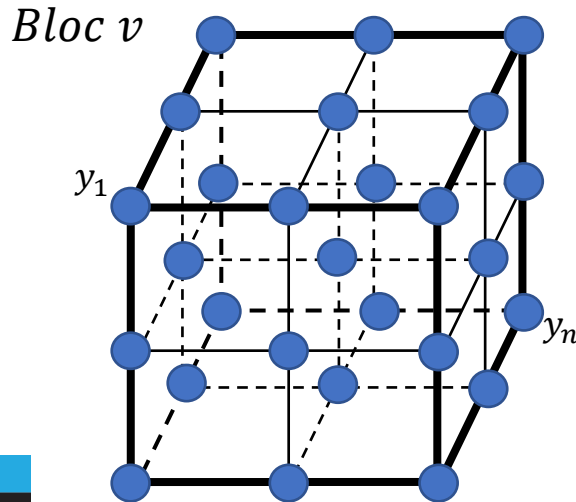
2. Variance de bloc et propriétés

Approximation numérique par ordinateur : ●●○

Méthode la plus utilisée de nos jours

Idée : discrétiser en n points le bloc v .

Ici $n = 3 \times 3 \times 3 = 27$ points.



$$\text{Var}(Z_v) = \frac{1}{v^2} \int_v \int_v \text{Cov}(Z(y_1), Z(y_2)) dy_1 dy_2$$

Approcher l'intégrale par une somme finie de paires de points

$$\text{Var}(Z_v) \approx \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(\underbrace{\|y_i - y_j\|}_{\text{Distance entre les deux points}})$$

Distance entre les deux points

$$\text{Cov}(\|y_i - y_j\|) = \sigma^2 - \gamma(\|y_i - y_j\|)$$

2. Variance de bloc et propriétés

Propriétés :

Si le variogramme ponctuel présente un palier, alors la variance de bloc existe.

1. $\sigma_v^2 = \bar{C}(v, v) = \sigma^2 - \bar{\gamma}(v, v)$
2. Si $v \rightarrow 0$, alors, $\sigma_v^2 \rightarrow \sigma^2$
3. Si $v \rightarrow \infty$ alors, $\sigma_v^2 \rightarrow 0$
4. Si $v \uparrow$, alors, $\sigma_v^2 \downarrow$

Généralement, c'est vrai pour les modèles vus au cours

$\bar{\gamma}(v, v)$: Moyenne du variogramme ponctuel. La moyenne est prise sur toutes les paires formées avec les deux points dans v .
 σ^2 : Palier du variogramme ponctuel.

3. Abaques

Analytiquement : 1D, modèle sphérique :

$$\text{Si } L < a \longrightarrow \bar{C}(L, L) = \sigma^2 \left(1 - 0.5 \frac{L}{a} + 0.05 \left(\frac{L}{a} \right)^3 \right)$$

Sinon utiliser un abaque ou
une approche numérique

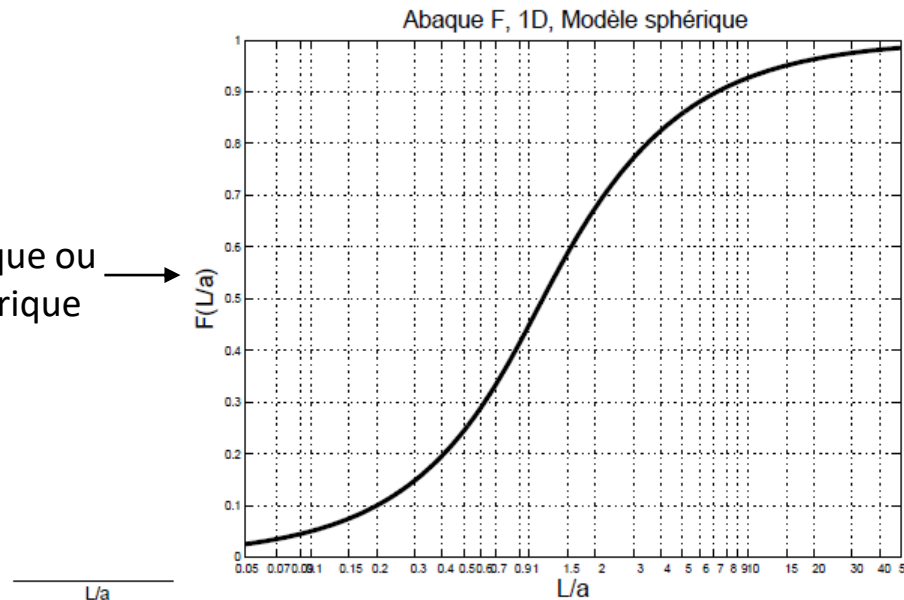


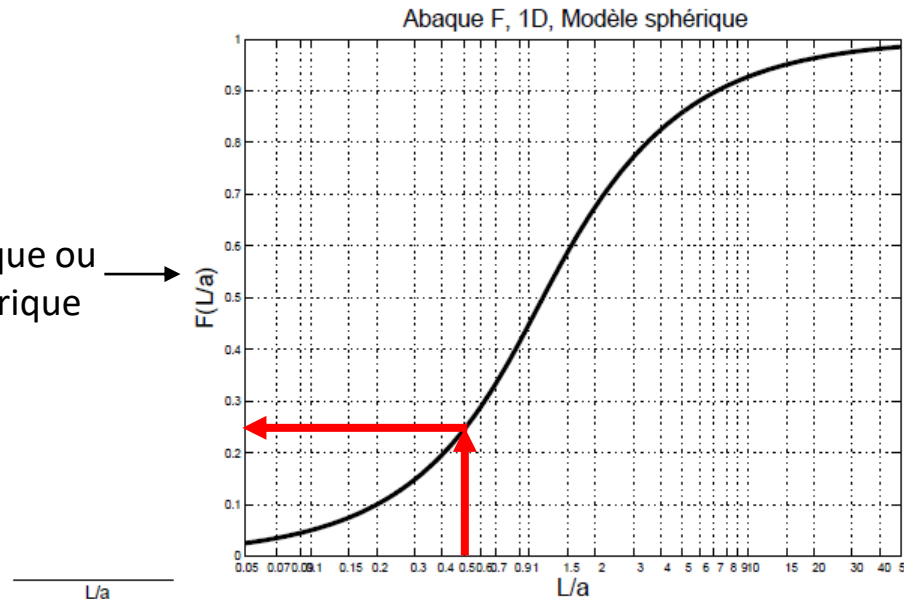
Fig. 1. Variance d'un point dans un segment, variogramme sphérique de palier C=1;
 $F(L/a) = D^2(\bullet|L) = \bar{\gamma}(L, L) = 1 - \bar{C}(L, L)$

3. Abaques

Analytiquement : 1D, modèle sphérique :

$$\text{Si } L < a \longrightarrow \bar{C}(L, L) = \sigma^2 \left(1 - 0.5 \frac{L}{a} + 0.05 \left(\frac{L}{a} \right)^3 \right)$$

Sinon utiliser un abaque ou une approche numérique



Si $L = 10$ et $a = 20$

$$\text{Donc, } \frac{L}{a} = \frac{10}{20} = 0.5$$

Avec lecture graphique,

$$F\left(\frac{L}{a}\right) = 0.243$$

$$\begin{aligned} \bar{C}(L, L) &= \sigma^2 \left(1 - F\left(\frac{L}{a}\right) \right) \\ &= \sigma^2 (1 - 0.243) \\ &= 0.757 \sigma^2 \end{aligned}$$

Fig. 1. Variance d'un point dans un segment, variogramme sphérique de palier $C=1$;
 $F(L/a) = D^2(\bullet|L) = \bar{\gamma}(L, L) = 1 - \bar{C}(L, L)$

3. Abaques

Abaques : 2D, modèle sphérique :

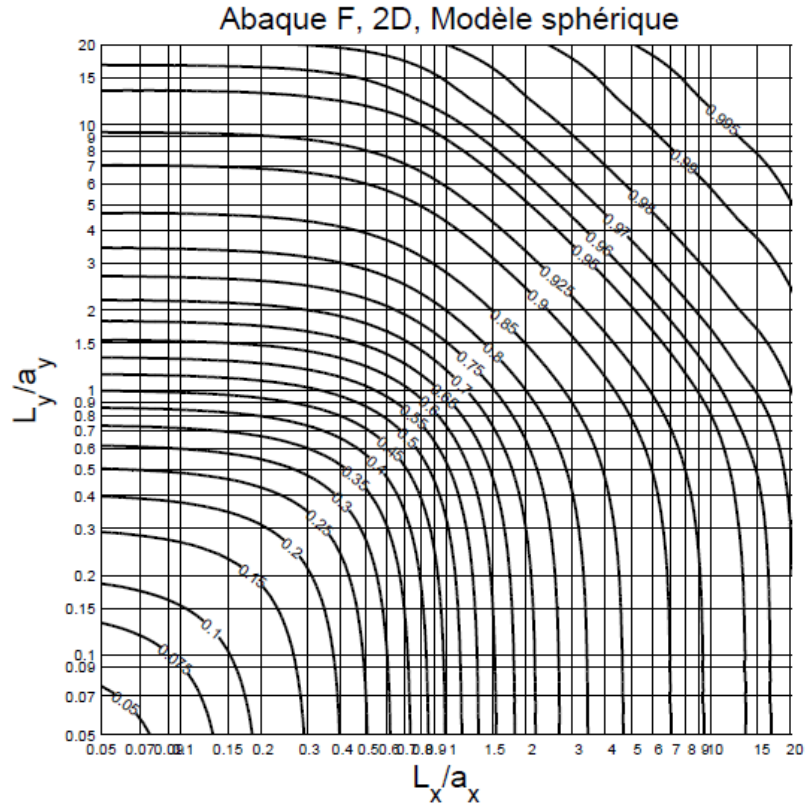
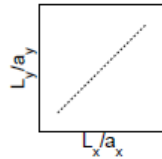
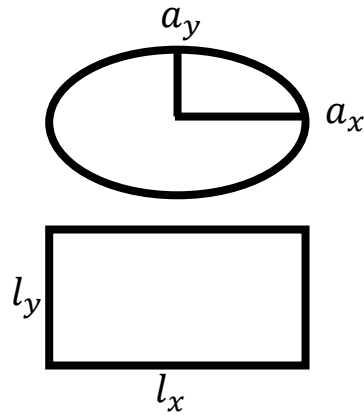


Fig. 2. Variance d'un point dans un rectangle, variogramme sphérique de palier $C=1$; $F(L_x/a_x, L_y/a_y) = D^2(\bullet|v) = \bar{\gamma}(v, v) = (1 - \bar{C}(v, v))$

3. Abaques

Exemple ensemble :

Modèle sphérique,

$$C = 8\%^2$$

$$a_x = 20m ; a_y = 40m$$

Q1) Déterminez la variance du bloc v (5m x 5m)

$$\frac{L_x}{a_x} = \frac{5}{20} = 0.25 \quad \frac{L_y}{a_y} = \frac{5}{40} = 0.125$$

$$F\left(\frac{L_x}{a_x}, \frac{L_y}{a_y}\right) = F(0.25, 0.125) \approx 0.15$$

$$Var(Z_v) = C \left(1 - F\left(\frac{L_x}{a_x}, \frac{L_y}{a_y}\right)\right)$$

$$Var(Z_v) = 8\%^2 \times (1 - 0.15) = 6.8\%^2$$

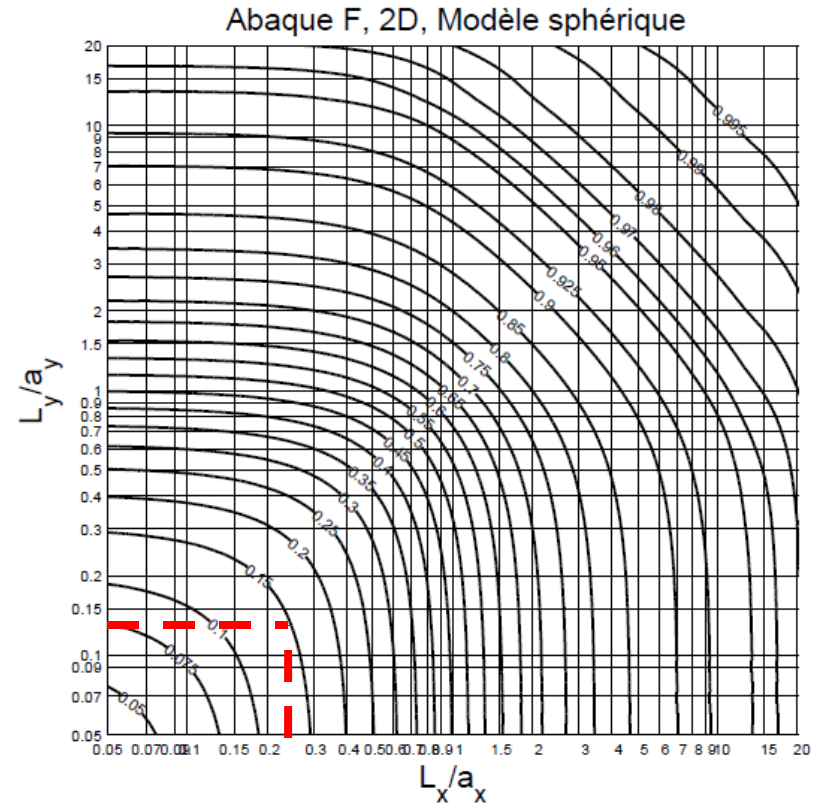
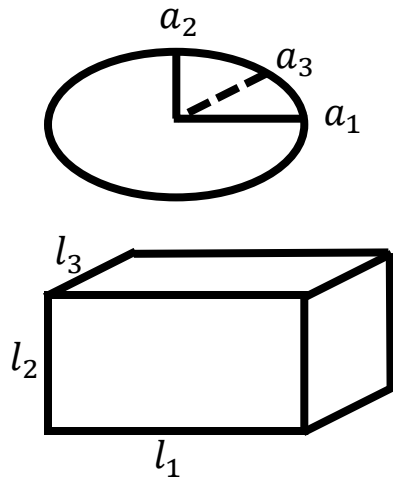


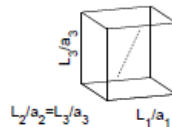
Fig. 2. Variance d'un point dans un rectangle, variogramme sphérique de $C=1$; $F(L_x/a_x, L_y/a_y) = D^2(\bullet|v) = \bar{\gamma}(v, v) = (1 - \bar{C}(v, v))$

3. Abaques

Abaques : 3D, modèle sphérique :



$$\frac{l_2}{a_2} = \frac{l_3}{a_3}$$



Abaque F, 3D, Modèle sphérique

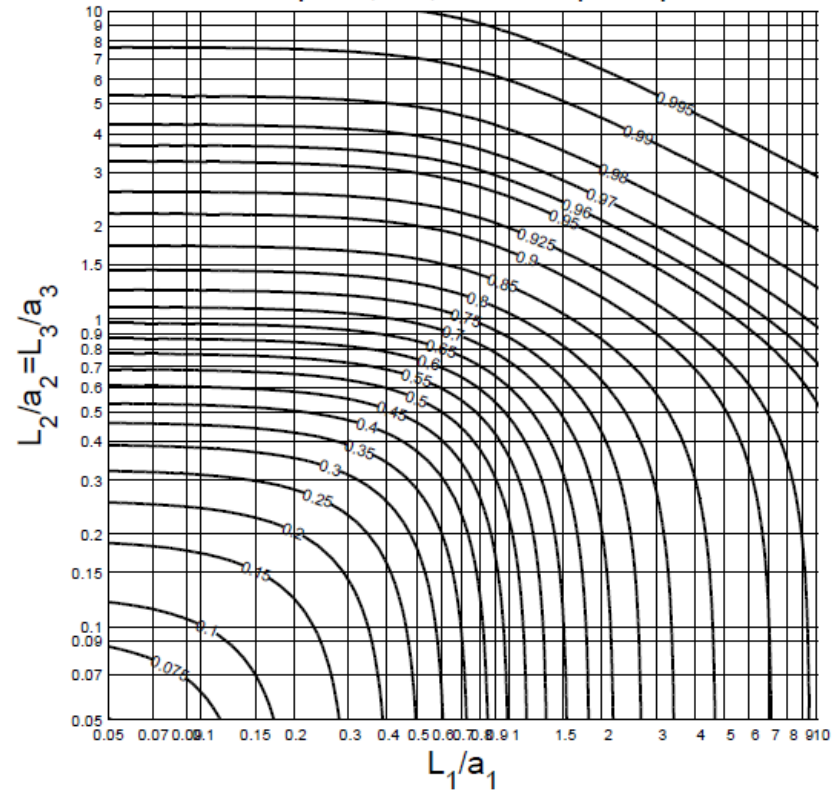


Fig. 3. Variance d'un point dans un bloc section carrée, variogramme sphérique de palier $C=1$; $F(L_1/a_1, L_2/a_2 = L_3/a_3, L_3/a_3) = D^2(\bullet|v) = \bar{\gamma}(v, v) = (1 - \bar{C}(v, v))$

Exercices en équipe :

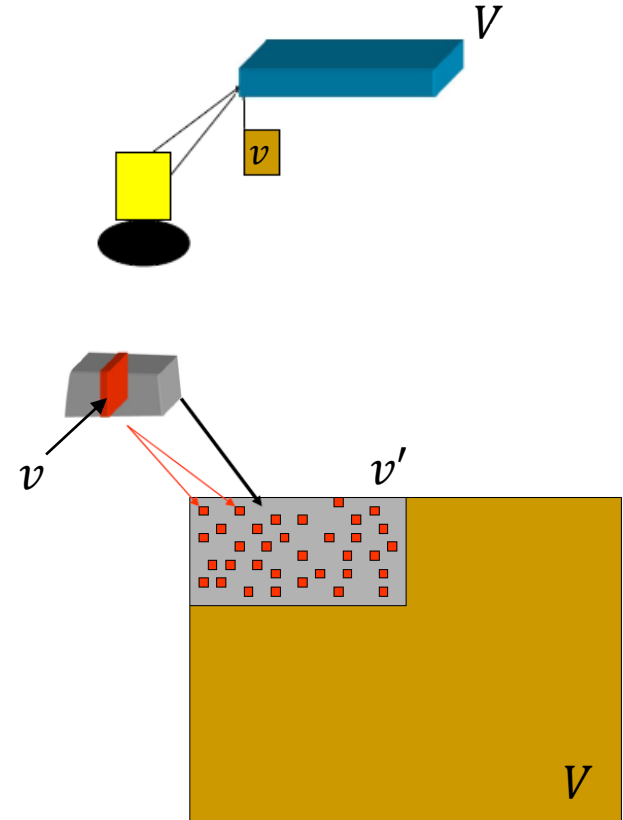
1) Variance de blocs

4. Variance de dispersion et propriétés

Questionnement :

Jusqu'à quel point la teneur d'un petit bloc diffère de celle d'un grand bloc ?

- La variabilité de la teneur obtenue par un camion (v) au cours de la journée d'exploitation (V)
- La variabilité de la teneur obtenue par journée d'exploitation (v) d'une pile d'homogénéisation (v') au cours d'un mois (V)



4. Variance de dispersion et propriétés

Définitions :

Variance de bloc : décrit la variabilité des teneurs de blocs dans la population sans spécifier de limite

- Définie seulement si le variogramme ponctuel présente un palier

Variance de dispersion : décrit la variabilité des teneurs de blocs (v) dans un domaine fini (V)

- Permet de comparer l'efficacité entre divers scénarios

4. Variance de dispersion et propriétés

Définitions :

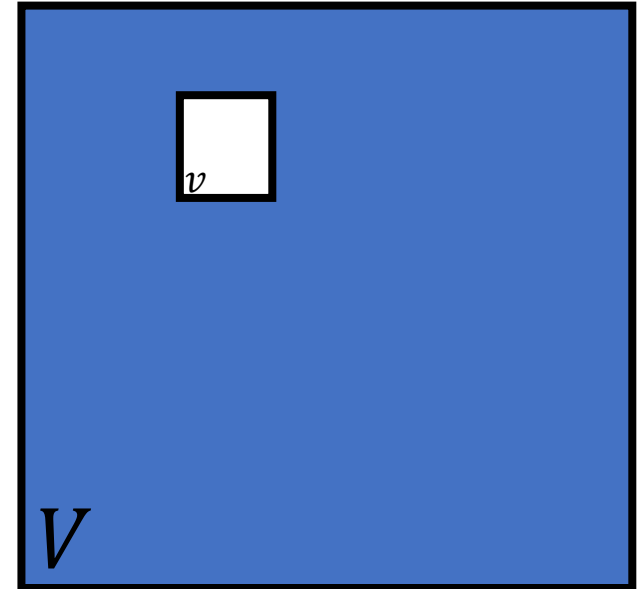
$$D^2(v|V) = E \left[\frac{1}{V} \int_V (Z(v(x)) - Z_V)^2 dx \right] = \sigma_v^2 - \sigma_V^2$$

Démonstration par approche discrète :

$$Z(V) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z(v_i)$$

$$s_{v_i|V}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z(v_i) - Z(V))^2$$

$$D^2(v|V) = E \left[s_{v_i|V}^2 \right]$$



4. Variance de dispersion et propriétés

Relations :

$$D^2(v|V) = \sigma_v^2 - \sigma_V^2$$

$$D^2(v|V) = \bar{C}(v, v) - \bar{C}(V, V)$$

$$D^2(v|V) = \bar{\gamma}(V, V) - \bar{\gamma}(v, v)$$

→ Contrairement à la variance de bloc,
la variance de dispersion est définie même si le
variogramme ne montre pas de palier

4. Variance de dispersion et propriétés

Propriétés :

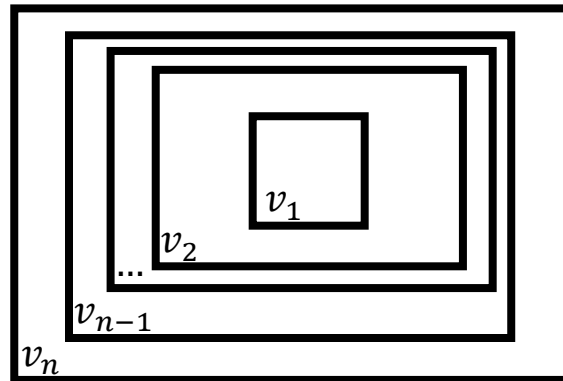
1. Si $v \rightarrow 0$ alors, $D^2(v|V) \rightarrow \bar{\gamma}(V, V)$
2. Si $v \rightarrow V$ alors, $D^2(v|V) \rightarrow 0$
3. Si $V \rightarrow \infty$ alors, $D^2(v|V) \rightarrow \sigma_v^2$

4. Variance de dispersion et propriétés

Règle d'additivité :

Soit une série de volumes imbriqués les uns dans les autres tels que $v_1 < v_2 < \dots < v_{n-1} < v_n$, alors:

$$D^2(v_1|v_n) = D^2(v_1|v_2) + D^2(v_2|v_3) + \dots + D^2(v_{n-1}|v_n)$$



5. Effet de pépite et variance de dispersion

Ce qui arrive avec l'effet de pépite :

Cas 1 : On suppose le variogramme ponctuel connu

1. Microstructure → l'effet de pépite est entièrement filtré par le passage point-bloc
2. Erreur de mesure, de localisation, d'analyse → ne fait pas partie du phénomène étudié

L'effet de pépite **n'intervient pas** dans les calculs de variance de bloc et de variance de dispersion.

En grande majorité, on considère les données comme quasi ponctuelles

5. Effet de pépité et variance de dispersion

Ce qui arrive avec l'effet de pépité :

Cas 2 : On suppose le variogramme défini sur un support non ponctuel

1. Microstructure → l'effet de pépité est inversement proportionnel au rapport des volumes
2. Erreur de mesure, de localisation, d'analyse → ne fait pas partie du phénomène étudié

$$v_1 < v_2; C_{0,v_2} = C_{0,v_1} \frac{v_1}{v_2}$$

Valide seulement
si on se trouve
dans le cas 2.1

v_1 : carottes de forage
 v_2 : bloc

6. Exemples

Exemple 2D :

Modèle sphérique,

$$C_0 = 3\%{}^2; C_1 = 8\%{}^2$$

$$a_x = 20m ; a_y = 40m$$

Q1) Déterminez la variance du bloc v (5m x 5m)

Q2) Déterminez la variance du bloc V (100m x 40m)

Q3) Déterminez la variance de dispersion $D^2(v|V)$

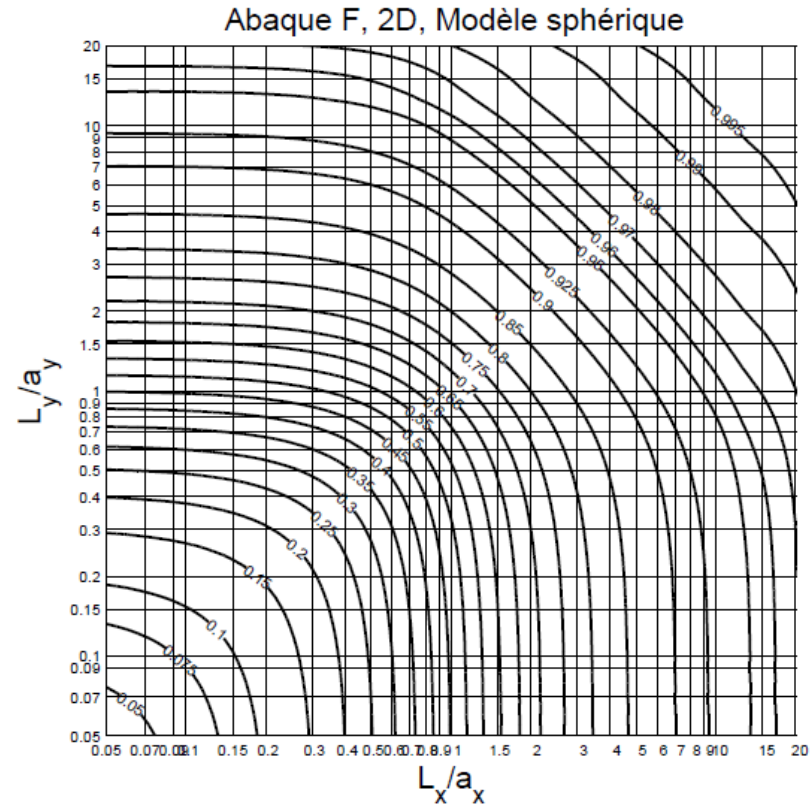
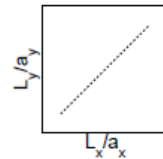


Fig. 2. Variance d'un point dans un rectangle, variogramme sphérique de palier $C=1$; $F(L_x/a_x, L_y/a_y) = D^2(\bullet|v) = \bar{\gamma}(v, v) = (1 - \bar{C}(v, v))$

6. Exemples

Exemple 2D :

Modèle sphérique,

$$C_0 = 3\%{}^2; C_1 = 8\%{}^2$$

$$a_x = 20m ; a_y = 40m$$

Q1) Déterminez la variance du bloc v (5m x 5m)

$$Var(Z_v) = 8\%{}^2 \times (1 - 0.15) = 6.8\%{}^2$$

Q2) Déterminez la variance du bloc V (100m x 40m)

$$Var(Z_V) = 8\%{}^2 \times (1 - 0.91) = 0.72\%{}^2$$

Q3) Déterminez la variance de dispersion $D^2(v|V)$

$$\begin{aligned} D^2(v|V) &= Var(Z_v) - Var(Z_V) \\ &= 6.8\%{}^2 - 0.72\%{}^2 \\ &= 6.08\%{}^2 \end{aligned}$$

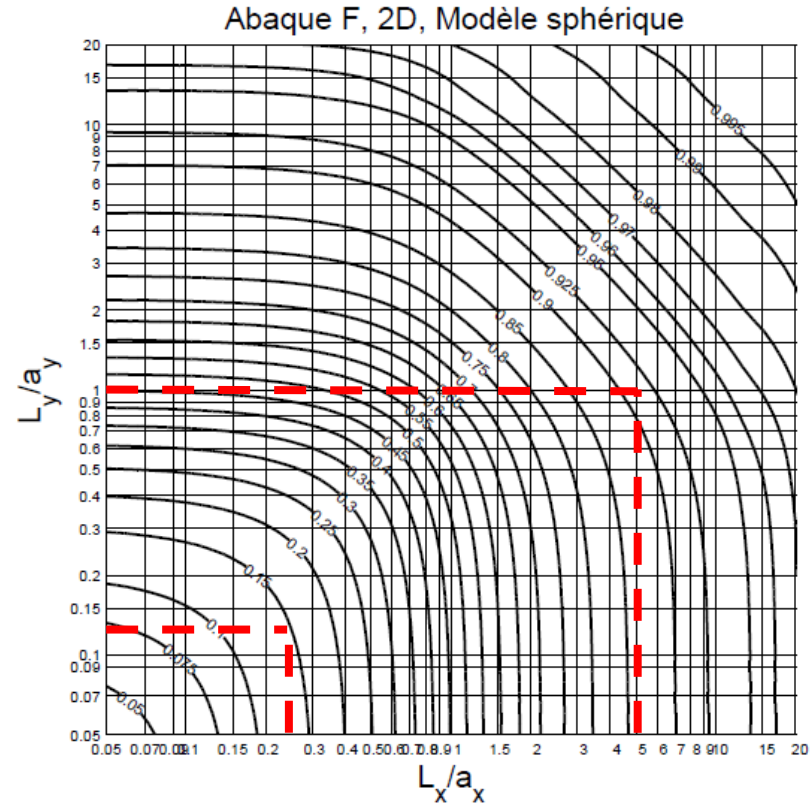
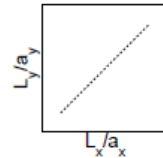


Fig. 2. Variance d'un point dans un rectangle, variogramme sphérique de palier $C=1$; $F(L_x/a_x, L_y/a_y) = D^2(\bullet|v) = \bar{\gamma}(v, v) = (1 - \bar{C}(v, v))$

Exercices en équipe :

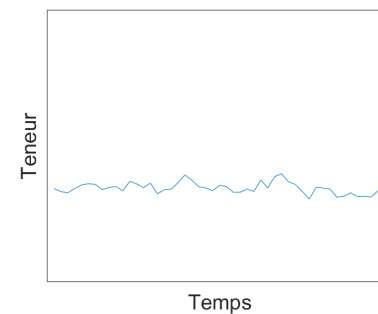
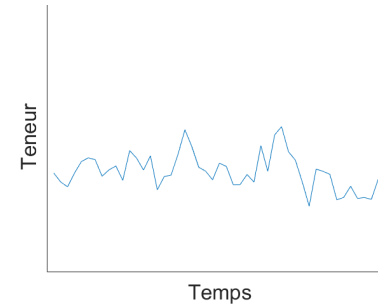
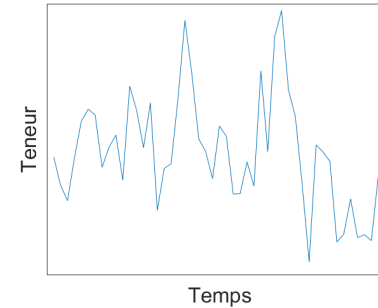
2) Variance de dispersion

$$D^2(v|V) = \sigma_v^2 - \sigma_V^2$$

7. Homogénéité du minerai

Concevoir le design d'une exploitation :

- Stabiliser la fluctuation de la teneur à travers le temps;
- Éviter de constamment adapter le procédé au concentrateur selon la teneur;
- Augmenter le rendement du concentrateur;
- Sauver du temps et de l'argent.

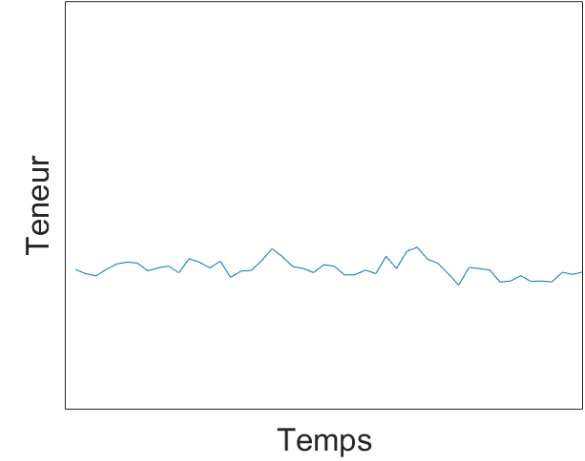
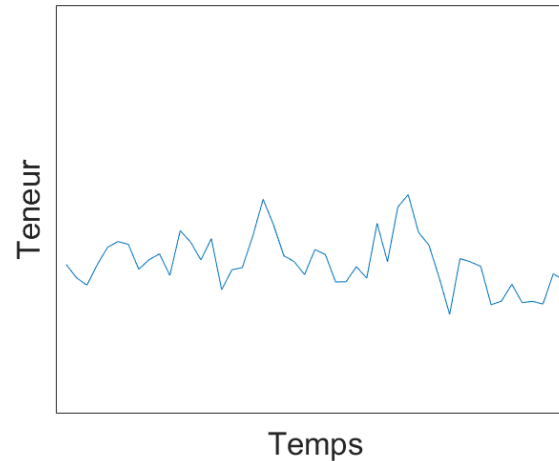
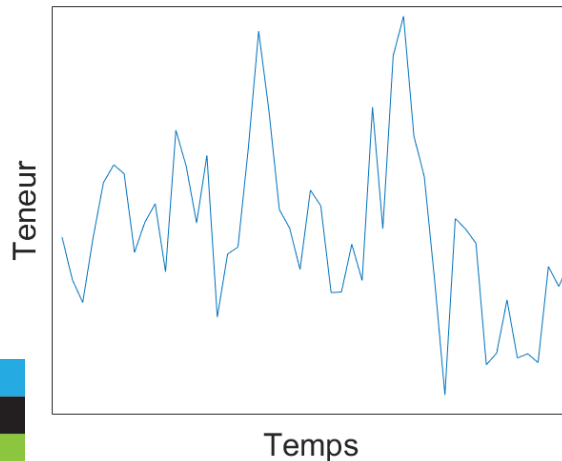


7. Homogénéité du minerai

Concevoir le design d'une exploitation :

Comment déterminer les variations des teneurs à travers le temps d'exploitation ?

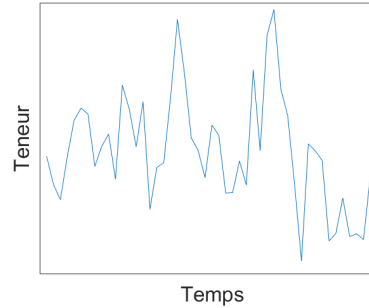
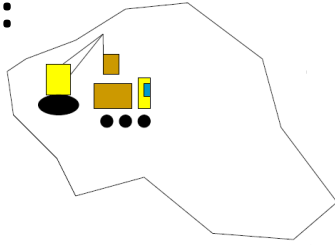
Comment déterminer le meilleur scénario ?



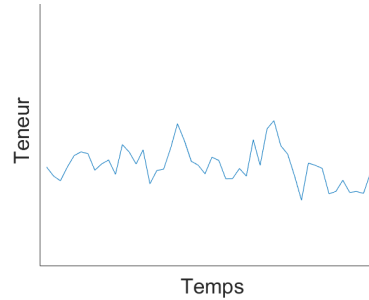
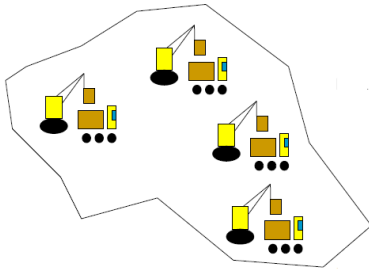
7. Homogénéité du minerai

Divers scénarios:

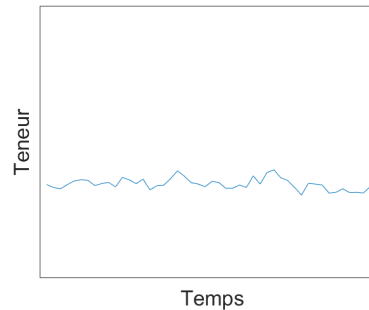
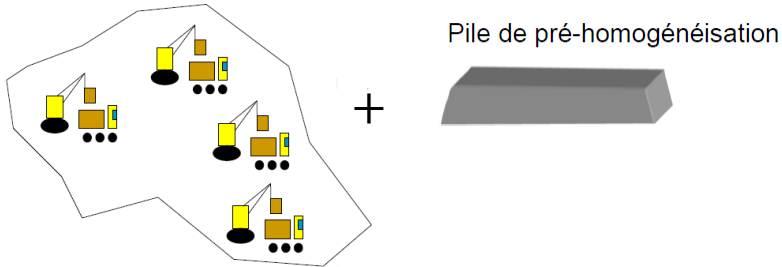
1)



2)



3)



Variogramme



Variance de dispersion



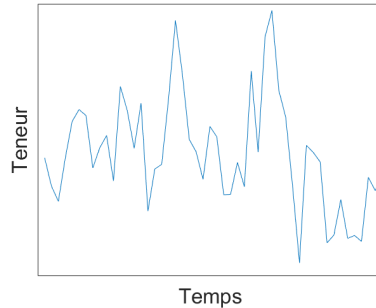
Prévoir les courbes



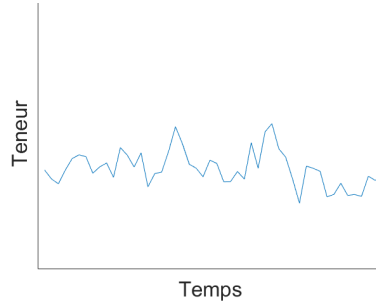
Design de l'exploitation

7. Homogénéité du minerai

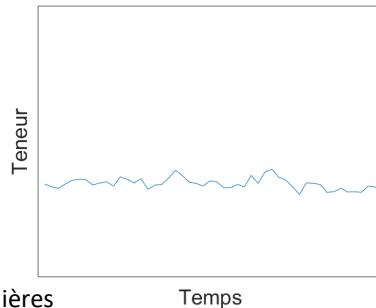
Divers scénarios:



Teneurs fluctues → mauvais ajustement
→ taux de récupération inférieur →
pertes de métal et d'argent.



Prélever le minerai de plusieurs endroits
différents → teneur moins variable →
meilleur rendement



Piles de pré-homogénéisation →
teneur peu variable → un excellent
rendement

7. Homogénéité du minerai

Concevoir le design d'une exploitation : Exemple

Objectif :

- Minimiser les fluctuations de la teneur quotidienne sur 1 mois d'exploitation d'un bloc de 90Kt ($120 \times 50 \times 5$).

Supposons :

1. Une production quotidienne de 3 Kt, un volume de 1000 m^3 ($20 \times 10 \times 5$)
2. L'homogénéité de la teneur est cruciale pour le concentrateur
3. Des ajustements quotidiens au procédé
4. Exploitation d'un banc de 5 m
5. Variogramme connu, sphérique ($a_x = a_y = 50 \text{ m}$, $C = 5\%^2$)

7. Homogénéité du minerai

Concevoir le design d'une exploitation : Exemple

Quatre scénarios étudiés :

1. Une pelle
2. Deux pelles indépendantes
3. Pile d'homogénéisation de 15 Kt ($50 \times 20 \times 5$)
4. Pile d'homogénéisation de 90 Kt ($120 \times 50 \times 5$)

7. Homogénéité du minerai

Exercices ensemble et en équipe : 3) Homogénéisation

7. Homogénéité du minerai

Concevoir le design d'une exploitation : Q1

Q1) L'utilisation d'une pelle mécanique de 3 Kt, (20 × 10 × 5) permet quelle homogénéité ?

Qu'est-ce que l'on cherche à calculer :

La variance de dispersion

Qu'elle est la taille des blocs :

$$v = 20 \times 10 \times 5 \text{ (3Kt)}$$
$$V = 120 \times 50 \times 5 \text{ (90Kt)}$$

Calculez :

$$\begin{aligned} D^2(v|V) &= \text{Var}(v) - \text{Var}(V) \\ &= 5\%^2 \times (\text{F}(120/50, 50/50) - \text{F}(20/50, 10/50)) \\ &= 5\%^2 \times (0.83 - 0.24) = 2.95\%^2 \end{aligned}$$

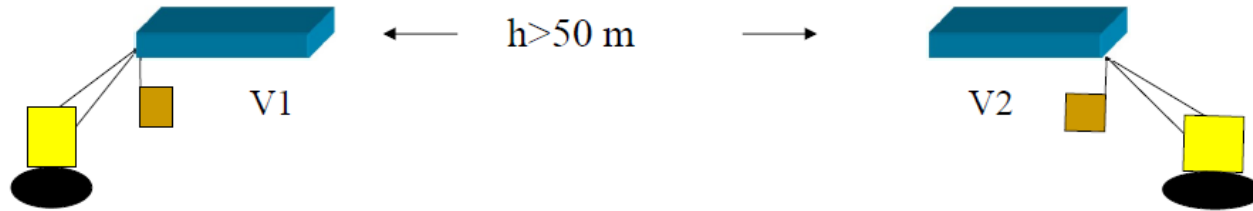


$$a_x = a_y = 50 \text{ m}, C = 5\%^2$$

7. Homogénéité du minerai

Concevoir le design d'une exploitation : Q2

Q2) L'utilisation de deux pelles mécaniques (chacune 1.5 Kt, 20 × 10 × 5) distante de 60m, permet quelle homogénéité ?



On suppose :

$$v_1 = v_2 = 10 \times 10 \times 5 \text{ (1.5Kt)}$$

$$V_1 = V_2 = 60 \times 50 \times 5 \text{ (45Kt)}$$

Qu'elle est l'expression de la teneur du bloc quotidien v et de la teneur du bloc mensuelle V ?

$$Z(v) = \frac{1}{2}(Z(v_1) + Z(v_2))$$

$$Z(V) = \frac{1}{2}(Z(V_1) + Z(V_2))$$

7. Homogénéité du minerai

Concevoir le design d'une exploitation : Q2 (suite)

On suppose

$$v_1 = v_2 = 10 \times 10 \times 5 \text{ (1.5Kt)}$$

$$V_1 = V_2 = 60 \times 50 \times 5 \text{ (45Kt)}$$

$$Z(v) = \frac{1}{2} (Z(v_1) + Z(v_2))$$

$$Z(V) = \frac{1}{2} (Z(V_1) + Z(V_2))$$

Qu'elle est l'expression de la variance du bloc quotidien v et de la variance du bloc mensuelle V ? (Indice: ils ont la même expression)

$$\text{Var}(Z(v)) = \text{Var}\left(\frac{1}{2} (Z(v_1) + Z(v_2))\right) = \frac{1}{4} (\text{Var}(Z(v_1)) + \text{Var}(Z(v_2)) + 2\text{Cov}(Z(v_1), Z(v_2)))$$

Qu'implique le positionnement des pelles (distant de 60m) sur les covariances des blocs échantillonnées par les pelles ?

$$\text{Cov}(Z(v_1), Z(v_2)) = 0$$

7. Homogénéité du minerai

Concevoir le design d'une exploitation : Q2 (suite)

On suppose

$$v_1 = v_2 = 10 \times 10 \times 5 \text{ (1.5Kt)}$$

$$V_1 = V_2 = 60 \times 50 \times 5 \text{ (45Kt)}$$

$$Z(v) = \frac{1}{2}(Z(v_1) + Z(v_2))$$

$$Z(V) = \frac{1}{2}(Z(V_1) + Z(V_2))$$

Qu'implique le positionnement des pelles (distant de 60m) sur les variances des blocs échantillonnées par les deux pelles ?

$$\text{Var}(Z(v_1)) = \text{Var}(Z(v_2))$$

$$\text{Donc } \text{Var}(Z(v)) = \frac{\text{Var}(Z(v_1))}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Calculez } D^2(v|V) &= \text{Var}(Z(v)) - \text{Var}(Z(V)) = \frac{\text{Var}(Z(v_1))}{2} - \frac{\text{Var}(Z(V_1))}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(5\%^2 \times (F(60/50, 50/50) - F(10/50, 10/50)) \right) \\ &= \frac{1}{2} (5\%^2 \times (0.70 - 0.16)) = 1.35\%^2 \end{aligned}$$

7. Homogénéité du minerai

Concevoir le design d'une exploitation : Q3

Q3) Une pile d'homogénéisation de capacité de 15 Kt, (50 × 20 × 5) permet quelle homogénéité ?

Quoi faire avec la pile d'homogénéisation dans l'évaluation de la dispersion ?

Règle d'additivité. Étape intermédiaire

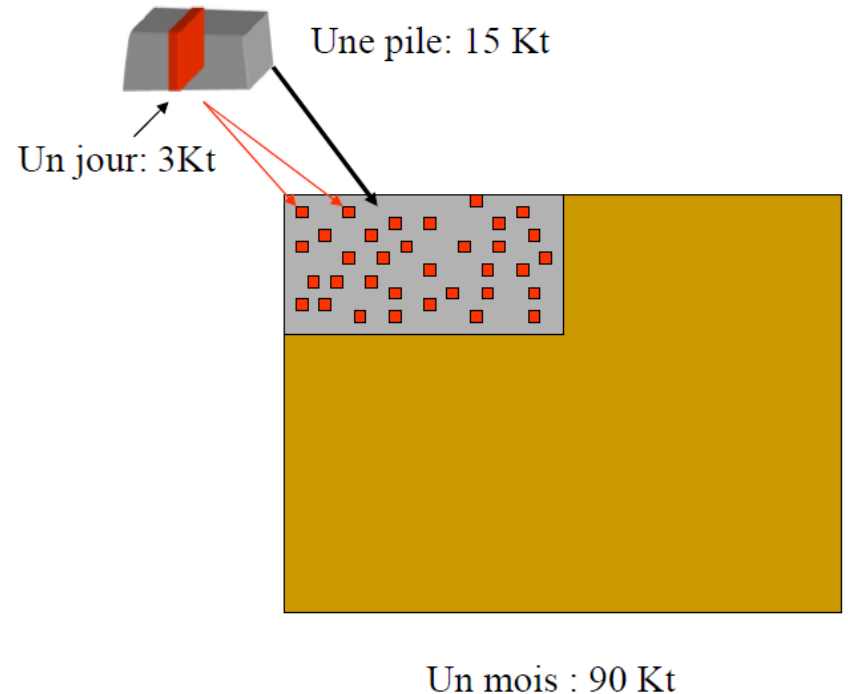
Qu'elle est l'expression de la dispersion pour cette stratégie ?

$$D^2(v|V) = D^2(v|v_{homo}) + D^2(v_{homo}|V)$$

$$v = 20 \times 10 \times 5$$

$$v_{homo} = 50 \times 20 \times 5$$

$$V = 120 \times 50 \times 5$$



7. Homogénéité du minerai

Concevoir le design d'une exploitation : Q3

Q3) Une pile d'homogénéisation de capacité de 15 Kt, (50 × 20 × 5) permet quelle homogénéité ?

À quoi sert une pile d'homogénéisation ?

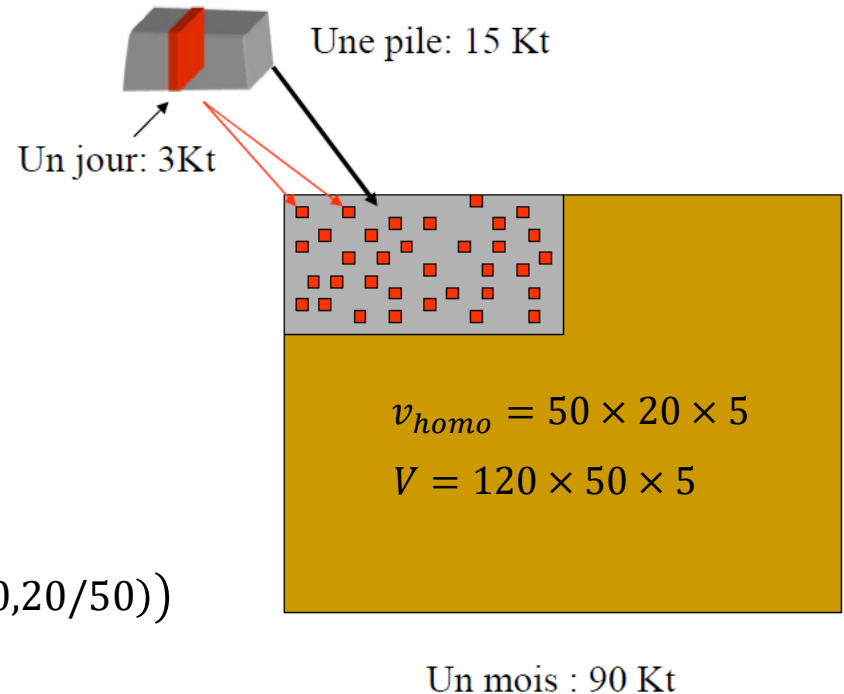
Homogénéiser les teneurs

Alors, que vaut $D^2(v|v_{homo})$?

$$D^2(v|v_{homo}) \approx 0$$

Ainsi, calculez $D^2(v|V) = D^2(v_{homo}|V)$

$$\begin{aligned} D^2(v|V) &= 5\%^2 \times (F(120/50, 50/50) - F(50/50, 20/50)) \\ &= 5\%^2 \times (0.83 - 0.52) = 1.55\%^2 \end{aligned}$$



7. Homogénéité du minerai

Concevoir le design d'une exploitation : Q4

Q4) Une pile d'homogénéisation de capacité de 90 Kt, (120 × 50 × 5) permet quelle homogénéité ?

$$v_{homo} = 120 \times 50 \times 5$$

$$V = 120 \times 50 \times 5$$

$$\begin{aligned} D^2(v|V) &= 5\%^2 \times (F(120/50, 50/50) - F(120/50, 50/50)) \\ &= 5\%^2 \times (0.83 - 0.83) = 0\%^2 \end{aligned}$$

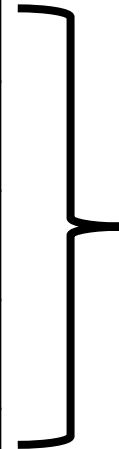
En réalité, $D^2(v|V) \approx 0\%^2$

pourquoi ?

7. Homogénéité du minerai

Concevoir le design d'une exploitation : analyse des résultats

Méthode	$D^2(v V)$
1 pelle	2.95
2 pelles	1.35
Pile de 15 Kt	1.55
Pile de 90 Kt	≈ 0



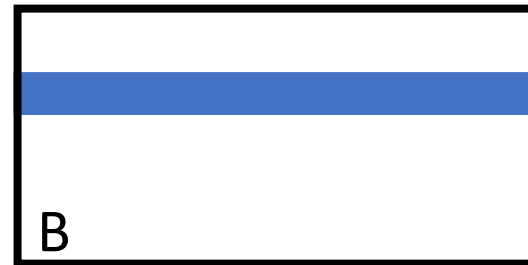
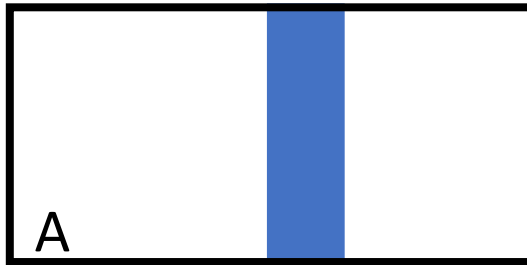
Que peut-on en conclure ?

8. Règle simple et influence du modèle

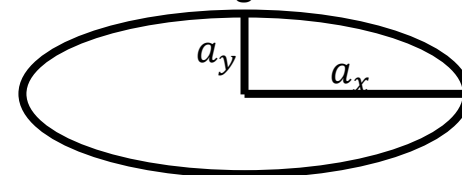
Importance de la variabilité

Pour avoir une teneur d'un volume unitaire (v) la plus homogène possible sur une période de temps T (génération d'un volume V), il faut opérer de façon à inclure le plus de variations possibles à l'intérieur du volume unitaire v .

Quel direction de chargement (bande bleue) produira des teneurs des camions les plus semblables ?

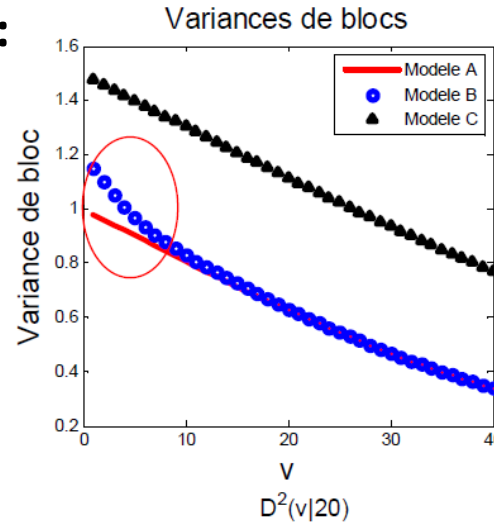
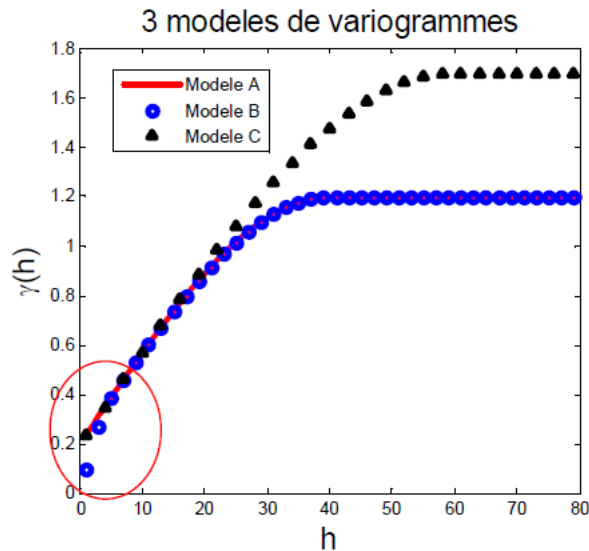


Variogramme

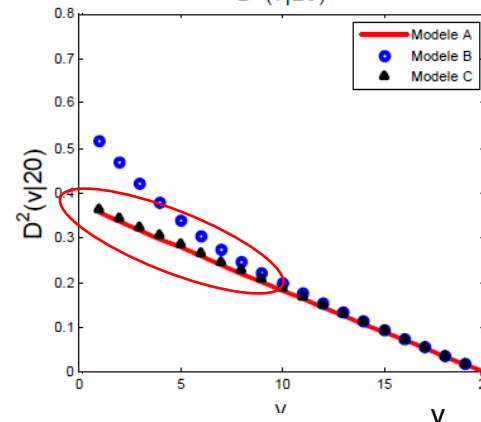


8. Règle simple et influence du modèle

Influence du modèle de variogramme :



La différence de palier a un impact important sur la variance de bloc.



La différence de palier et de portée n'a pas d'impact sur la variance de dispersion.

9. Covariance et variogramme de blocs

Covariance et variogramme de blocs

- Variance de blocs $\rightarrow Cov(Z_V(x), Z_V(x))$
- Covariance de blocs $\rightarrow Cov(Z_V(x), Z_V(x + h))$
- Variogramme de blocs $\rightarrow \frac{1}{2} Var(Z_V(x) - Z_V(x + h))$

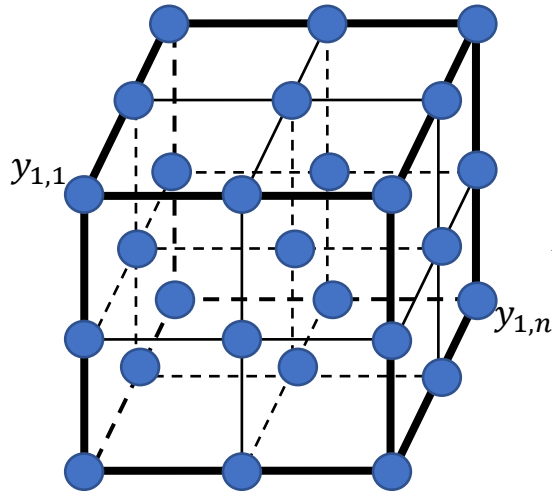
→ se calculent tous à partir du variogramme ponctuel

- Le variogramme de blocs est plus lisse à l'origine que le variogramme ponctuel
- Son palier est la variance de blocs

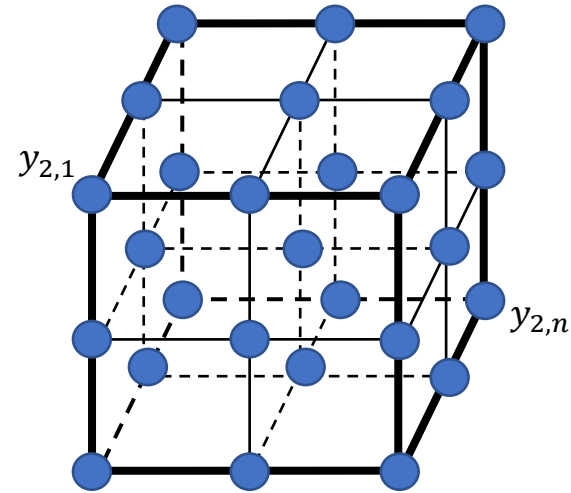
9. Covariance et variogramme de blocs

Numériquement : Approximation par un bloc v_1 et v_2 tous deux discrétisés en n points

Bloc v_1



Bloc v_2



Blocs distant de h

$$C_v(h) = \text{Cov}(Z_v(x), Z_v(x+h)) \approx \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(\|y_{1,i} - y_{2,j}\|)$$

$$\gamma_v(h) = \frac{1}{2} \text{var}(Z_v(x) - Z_v(x+h)) \approx \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma(\|y_{1,i} - y_{2,j}\|) - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma(\|y_{1,i} - y_{1,j}\|)$$