Département de Mathématiques et de Génie Industriel
Polytechnique Montréal

MATHÉMATIQUES DES ÉLÉMENTS FINIS
MTH8207

Automne 2024

Devoir 1	100 points
Distribué le 2024/09/14	À remettre le 2024/09/24

Question 1 (Dérivées au sens des distributions) :

Soit la fonction $f : \Omega = [0, 3] \to \mathbb{R}$ définie telle que $f(x) = 1 - |x - 1|$, si $x \in [0, 2]$, et $f(x) = 0$, si $x \in [2, 3]$. Calculer la dérivée seconde de f (au sens des distributions).

Question 2 (Quadrature de Gauss) :

a) Trouver les points de Gauss $x_{i,g}$ et les poids $\omega_{i,g}$, $i = 1, 2$, tels que la quadrature de Gauss intègre exactement tous les polynômes $p(x)$ de degré trois, i.e.

$$\int_{-1}^{+1} p(x)\,dx = \sum_{i=1}^{2} \omega_{i,g}\, p(x_{i,g}).$$

b) Déterminer le nombre de points de Gauss nécessaires pour intégrer exactement un polynôme de degré n.

Question 3 (Espaces de Hilbert) :

On considère la classe de fonctions $f(x) = x^\alpha$ définies sur $\Omega = (0, 1)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Identifier toutes les valeurs de α pour lesquelles $f \in L^2(\Omega)$.
b) Identifier toutes les valeurs de α pour lesquelles $f \in H^1(\Omega)$.
c) Identifier toutes les valeurs de α pour lesquelles $f \in C(\overline{\Omega})$ (espace des fonctions continues sur l'intervalle fermé $\overline{\Omega} = [0, 1]$).
d) Est-ce que toute fonction continue et polynomiale par morceaux sur $[0, 1]$ appartient-elle nécessairement à $H^1(\Omega)$? Est-ce que les fonctions discontinues et polynomiales par morceaux sont-elles dans $H^1(\Omega)$? dans $L^2(\Omega)$? Justifier vos réponses.
e) Est-ce que la trace de la dérivée seconde de la fonction $f(x) = x^{5/4}$ est définie en $x = 0$? Expliquer.

Question 4 (Théorème de Poincaré) :

Le théorème de Poincaré est un résultat très utile de l'analyse fonctionnelle. Une version simplifiée du théorème s'énonce comme suit:

Soient $\Omega = (0, \ell)$ un domaine ouvert de $\mathbb{R}$ et u une fonction arbitraire de $H^1(\Omega)$ telle que la trace de u en 0 s'annule, i.e. $u(0) = 0$. Alors, il existe une constante C_p strictement positive et indépendante de u telle que:

$$\|u\|_{L^2} \leq C_p \|u'\|_{L^2}.$$

Noter que cette inégalité peut également s'écrire en utilisant la seminorme de H^1 comme

$$\|u\|_{L^2} \leq C_p |u|_{H^1}.$$

Démontrer le théorème ci-dessus et exprimer de manière explicite C_p en fonction de ℓ.

Montrer ensuite que le résultat plus général suivant reste valable, c'est-à-dire qu'il existe une constante C_p strictement positive telle que

$$\|u - \bar{u}\|_{L^2} \leq C_p |u|_{H^1},$$

où $\bar{u}$ représente la moyenne de u sur Ω, i.e.

$$\bar{u} = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell u(x)\, dx.$$

<u>Question 5 (Formulation faible) :</u>

Soit le problème de conditions aux limites suivant :

$$\begin{aligned} -\big(au'\big)' + cu &= x^{-1/4}, & \quad & \forall x \in \Omega = (0,1), \\ u' - 3u &= 4, & & \text{à } x = 0, \\ u &= 5, & & \text{à } x = 1, \end{aligned}$$

où les fonctions $a = a(x)$ et $b = b(x)$ sont données par :

$$\begin{aligned} &a(x) = 1 + x^3, \quad \forall x \in [0,1], \\ &c(x) = 1 + H(x - 1/2), \quad \forall x \in [0,1]. \end{aligned}$$

La fonction H est la fonction de Heaviside, laquelle est définie par :

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Donner une formulation faible associée au problème fort ci-dessus pour laquelle la forme bilinéaire est symétrique et définie positive et telle que l'ensemble des solutions admissibles forme un espace vectoriel.

SOLUTIONS

QUESTION 1 (20 POINTS) :

On cherche d'abord la dérivée première f', laquelle est définie au sens des distributions par :

$$\int_0^3 f'\varphi \; dx = -\int_0^3 f\varphi' dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On a :

$$-\int_0^3 f\varphi' dx = -\int_0^1 x\varphi' dx - \int_1^2 \big(2-x\big)\varphi' dx.$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$-\int_0^1 x\varphi' dx = \int_0^1 \big(+1\big)\varphi \, dx - x\varphi(x)\big|_{0^+}^{1^-} = \int_0^1 \big(+1\big)\varphi \, dx - \varphi(1^-),$$
$$-\int_1^2 \big(2-x\big)\varphi' dx = \int_1^2 \big(-1\big)\varphi \, dx - \big(2-x\big)\varphi(x)\big|_{1^+}^{2^-} = \int_1^2 \big(-1\big)\varphi \; dx + \varphi(1^+).$$

Puisque $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi(1^+) - \varphi(1^-) = 0$ et donc :

$$\int_0^3 f'\varphi dx = \int_0^1 \big(+1\big)\varphi \; dx + \int_1^2 \big(-1\big)\varphi \, dx,$$

soit :

$$\int_0^1 \big(f'-1\big)\varphi \, dx + \int_1^2 \big(f'+1\big)\varphi \, dx + \int_2^3 f'\varphi \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En utilisant le lemme fondamental du calcul variationnel, la dérivée première de f au sens des distributions est alors donnée par :

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} +1, & \forall x \in (0,1) \\ -1, & \forall x \in (1,2) \\ \;\;\,0, & \forall x \in (2,3) \end{cases}}$$

On procède de la même manière pour la dérivée seconde, c'est-à-dire que l'on cherche $f'' = g'$, où $g = f'$, telle que :

$$\int_0^3 g'\varphi \, dx = -\int_0^3 g\varphi' dx = -\int_0^1 \big(+1\big)\varphi' dx - \int_1^2 \big(-1\big)\varphi' dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En intégrant à nouveau par parties, on a :

$$-\int_0^3 g\varphi' dx = -\varphi(x)\big|_{0^+}^{1^-} + \varphi(x)\big|_{1^+}^{2^-} = \varphi(0^+) - \varphi(1^-) - \varphi(1^+) + \varphi(2^-) = -2\varphi(1) + \varphi(2),$$

puisque φ s'annule en $x = 0$ et est continue à $x = 1$ et à $x = 2$. Il s'ensuit que :

$$\int_0^3 g'\varphi \, dx = -2\varphi(1) + \varphi(2) = \int_0^3 -2\delta(x-1)\varphi \, dx + \int_0^3 \delta(x-2)\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

c'est-à-dire,

$$\int_0^3 \big(g' + 2\delta(x-1) - \delta(x-2)\big)\varphi \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Le lemme fondamental du calcul variationnel permet de conclure que :

$$\boxed{f''(x) = g'(x) = -2\delta(x-1) + \delta(x-2), \quad \forall x \in \Omega}$$

QUESTION 2 (15 POINTS) :

a) Il suffit de considérer les fonctions $q(x) = 1$, x, x^2 et x^3, et de calculer (x_1, ω_1) et (x_2, ω_2) tels que :

$$\int_{-1}^{+1} q(x)dx = \omega_1 q(x_1) + \omega_2 q(x_2),$$

pour l'ensemble de ces fonctions. On obtient donc le système d'équations nonlinéaires :

$$\begin{cases} 2 = \omega_1 + \omega_2 \\ 0 = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 \\ \dfrac{2}{3} = \omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 \\ 0 = \omega_1 x_1^3 + \omega_2 x_2^3 \end{cases}$$

La solution de ce système est donnée par :

$$x_2 = -x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \omega_2 = \omega_1 = 1,$$

soit :

$$\boxed{\begin{array}{l} (x_1, \omega_1) = \left(-1/\sqrt{3}, 1\right) \\ (x_2, \omega_2) = \left(+1/\sqrt{3}, 1\right) \end{array}}$$

b) L'exercice ci-dessus nous apprend que k points de Gauss permettent d'intégrer exactement des polynômes de degré $n = 2k - 1$. Pour intégrer exactement un polynôme de degré n, le nombre minimal de points de Gauss k à utiliser vaut :

$$\boxed{k = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ impair} \\ \dfrac{n+2}{2}, & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}}$$

QUESTION 3 (20 POINTS) :

Soit $f(x) = x^\alpha$ sur $\Omega = (0, 1)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Il suffit de calculer la norme L^2 de f et d'observer que celle-ci prend une valeur finie pour $\alpha > -1/2$. Donc $f \in L^2(\Omega)$ pour $\alpha > -1/2$.
b) De même, $f \in H^1(\Omega)$ pour $\alpha > 1/2$ et $\alpha = 0$.
c) $f \in C(\overline{\Omega})$ pour $\alpha \geq 0$.
d) Soit $f(x)$ une fonction continue et polynomiale par morceaux sur $\Omega = [0, 1]$. D'après b), une fonction polynomiale sur un sous-intervalle K de Ω appartient à $H^1(K)$. La continuité de $f(x)$ sur Ω assure que $f \in H^1(\Omega)$ globalement.
Soit $f(x)$ une fonction discontinue et polynomiale par morceaux sur $\Omega = [0, 1]$. La fonction $f(x)$ ne peut être dans $H^1(\Omega)$ car discontinue. D'après a), on sait que toute fonction polynomiale sur un sous-intervalle K de Ω est dans $L^2(K)$. Le fait que $f(x)$ soit discontinue à l'interface des sous-intervalles ne l'empêche pas d'être dans $L^2(\Omega)$ globalement.

e) La dérivée seconde de la fonction $f(x) = x^{5/4}$ est donnée par $f''(x) = 5/16x^{-3/4}$. Puisque l'exposant de la dérivée seconde est $\alpha = -3/4$, on en conclut que f'' n'appartient pas à $L^2(\Omega)$. On ne peut donc définir la trace de f'' à $x = 0$. Noter cependant que la fonction est bien définie à $x = 1$.

Question 4 (20 points) :

Soit $u \in H^1(\Omega)$ telle que $u(0) = 0$. On a alors par Cauchy-Schwarz :

$$u(x) = u(x) - u(0) = \int_0^x u'(\xi)d\xi \leq \sqrt{\int_0^x d\xi}\sqrt{\int_0^x (u'(\xi))^2 d\xi} \leq \sqrt{x}|u|_{H^1}, \qquad \forall x \in (0,\ell).$$

Il s'ensuit que :

$$\|u\|_{L^2}^2 = \int_0^\ell u^2 dx \leq |u|_{H^1}^2 \int_0^\ell x dx = \frac{\ell^2}{2}|u|_{H^1}^2.$$

On a donc :

$$\|u\|_{L^2} \leq C_p |u|_{H^1}, \qquad \text{avec } C_p = \frac{\ell}{\sqrt{2}}.$$

On observe que la constante C_p ne dépend que de la taille ℓ du domaine.

On conclut du théorème de Poincaré que la norme L^2 d'une fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que $u(0) = 0$ est contrôlée par la norme L^2 de sa dérivée.

Comme u est supposée dans $H^1(\Omega)$, on sait que u est nécessairement dans $C(\overline{\Omega})$ et on peut conclure que $u - \bar{u}$ s'annule en point x_0 de Ω. On applique alors le théorème de Poincaré dans $(0, x_0)$ et (x_0, ℓ), soit :

$$\begin{aligned}
\|u - \bar{u}\|_{L^2(0,x_0)} &\leq \frac{x_0}{\sqrt{2}}|u - \bar{u}|_{H^1(0,x_0)} \leq \frac{x_0}{\sqrt{2}}|u|_{H^1(0,x_0)} \leq \frac{x_0}{\sqrt{2}}|u|_{H^1(\Omega)}, \\
\|u - \bar{u}\|_{L^2(x_0,\ell)} &\leq \frac{\ell - x_0}{\sqrt{2}}|u - \bar{u}|_{H^1(x_0,\ell)} \leq \frac{\ell - x_0}{\sqrt{2}}|u|_{H^1(x_0,\ell)} \leq \frac{\ell - x_0}{\sqrt{2}}|u|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

et, par conséquent :

$$\|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u - \bar{u}\|_{L^2(0,x_0)}^2 + \|u - \bar{u}\|_{L^2(x_0,\ell)}^2 \leq \frac{1}{2}\big(x_0^2 + (\ell - x_0)^2\big)|u|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Comme $x_0^2 + (\ell - x_0)^2 = \ell^2 - 2x_0(\ell - x_0) \leq \ell^2$, on obtient alors :

$$\boxed{\|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\ell}{\sqrt{2}}|u|_{H^1(\Omega)}}$$

Question 5 (25 points) :

On multiplie l'équation différentielle par une fonction v suffisamment régulière et on intègre sur le domaine Ω :

$$\int_0^1 -\big(a(x)u'\big)'v + c(x)uv\,dx = \int_0^1 x^{-1/4}v\,dx.$$

Après intégration par parties du premier terme, on a :

$$\int_0^1 a(x)u'v' + c(x)uv\,dx - a(1)u'(1)v(1) + a(0)u'(0)v(0) = \int_0^1 x^{-1/4}v\,dx.$$

On observe que $a(1) = 2$ et $a(0) = 1$. On applique alors la condition de Robin $u'(0) = 4 + 3u(0)$ en $x = 0$. Comme la condition à la limite en $x = 1$ est une condition de Dirichlet, on choisit les fonctions test telles que $v(1) = 0$. On obtient alors :

$$\int_0^1 a(x)u'v' + c(x)uv\,dx + 3u(0)v(0) = \int_0^1 x^{-1/4}v\,dx - 4v(0).$$

On remarque que les intégrales et les valeurs de u et v sont toutes bien définies en prenant u et v dans $H^1(\Omega)$. En effet, les fonctions $a(x)$ et $c(x)$ vérifient $a(x) \leq 2$ et $c(x) \leq 2$ pour tout $x \in \Omega$. D'autre part, on observe que la fonction $x^{-1/4}$ est dans $L^2(\Omega)$. Finalement, si on choisit u et v dans $H^1(\Omega)$, les traces de u et v en $x = 0$ prennent toutes deux des valeurs finies. De plus, les fonctions admissibles u doivent satisfaire la condition de Dirichlet $u(1) = 5$ et les fonctions test $v(1) = 0$. On introduit alors la forme bilinéaire $B(\cdot,\cdot)$ et forme linéaire $F(\cdot)$ telles que :

$$\begin{aligned}
B(u,v) &= \int_0^1 \big(1+x^3\big)u'v' + \big(1+H(x-1/2)\big)uv\,dx + 3u(0)v(0),\\
F(v) &= \int_0^1 x^{-1/4}v\,dx - 4v(0).
\end{aligned}$$

On constate que la forme bilinéaire est symétrique comme demandée, c'est-à-dire que $B(u,v) = B(v,u)$, $\forall u,v \in H^1(\Omega)$. De plus, elle est définie positive, puisque, du fait que $a(x) \geq 1$ et $c(x) \geq 1$ pour tout $x \in \Omega$, on obtient :

$$\begin{aligned}
B(u,u) &= \int_0^1 \big(1+x^3\big)(u')^2 + \big(1+H(x-1/2)\big)u^2\,dx + 3(u(0))^2\\
&\geq \int_0^1 \big(1+x^3\big)(u')^2 + \big(1+H(x-1/2)\big)u^2\,dx\\
&\geq \int_0^1 (u')^2 + u^2\,dx = \|u\|_{H^1}^2.
\end{aligned}$$

La formulation faible du problème est donc donnée par :

$$\boxed{\text{Trouver } u \in U \text{ telle que : } \quad B(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V}$$

où

$$\begin{aligned}
U &= \{u \in H^1(\Omega) : u(1) = 5\},\\
V &= \{v \in H^1(\Omega) : v(1) = 0\}.
\end{aligned}$$

On observe que l'ensemble U n'est pas un espace vectoriel. On introduit une fonction de relèvement $\bar{u} \in U$, par exemple $\bar{u} = 5x$, et considère $w = u - \bar{u} \in V$, où u est solution du problème ci-dessus. La formulation faible du problème s'écrit alors :

$$\boxed{\text{Trouver } w \in V \text{ telle que : } \quad B(w,v) = L(v) \equiv F(v) - B(\bar{u},v), \quad \forall v \in V}$$

<u>Remarque :</u> comme $x^{-1/4} \in L^2(\Omega)$ d'après la question 3a et que $x^{-1/4} \notin H^1(\Omega)$ d'après la question 3b, on en déduit que $u \in H^2(\Omega)$ mais $u \notin H^3(\Omega)$.