Questionnaire

Examen intra #1

MTH1101

Identification de l'étudiant		
Nom:	Prénom:	
Signature:	Matricule:	Groupe:

Sigle et titre du cours	Groupe	Trimestre
MTH1101 – Calcul I	Tous	A2019

Professeurs	Local	Téléphone
Guy Jomphe	A-520.36	5155

Date	Heures	Durée
Dimanche 6 octobre 2019	13h00-15h00	2h00

Calculatrices, cellulaires et agendas électronique sont interdits. Seul un aide-mémoire sur une feuille manuscrite $8\frac{1}{2} \times 11$ non photocopiée est autorisé. Cet examen contient 5 questions sur un total de 12 pages, excluant celle-ci. Vous devez répondre sur le questionnaire et le remettre. Justifiez vos réponses.

Par souci d'équité envers tous les étudiants, le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons (données manquantes, données erronées, etc.), veuillez le justifier (maximum 2 lignes) et passez à la question suivante.

Réservé

1.	/2
2.	/6
3.	/3
4.	/3
5.	/6

Total:	/20

Exercice 1 : [2] points

On considère la suite

$$\left\{\frac{1}{3},\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{27},\ \frac{8}{81},\ \dots\right\}$$

(1 pt) a) Donnez S_n la somme partielle des n premiers nombres de cette suite. Exprimez votre réponse en utilisant le symbole de sommation $\sum$.

Rép : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^i}{3^{i+1}}$

(1 pt) b) Évaluez la somme de tous les termes de la suite.

Rép : $S = 1$

Exercice 2 : [6] points

Soit la fonction

$$f(x) = \ln(1 + x), \qquad \text{où } x > -1.$$

(2 pts) a) Montrez par récurrence (induction mathématique) que la dérivée n ième de f, notée $f^{(n)}(x)$, est

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,(1 + x)^{-n}, \qquad \text{pour } n \geq 1.$$

(2 pts) b) Donnez la série de Taylor $T(x)$ de la fonction $f(x)$ autour de $a = 1$.

Rép : $T(x) = \ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}\frac{(x-1)^n}{n}$

(2 pts) c) On désire approximer f sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ par son polynôme de Taylor $T_n(x)$ de degré n, autour de $a = 1$. Sachant que la série converge dans cet intervalle, donnez le degré minimal n pour que l'erreur d'approximation soit inférieure à $\frac{1}{10}$.

Rép : Le degré minimal de $T_n(x)$ est 1.

Exercice 3 : [3] points

Évaluez $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 e^{-x^2}\,dx$ avec une erreur inférieure à 10^{-2}.

Rép : $\simeq \dfrac{1}{24}$

Exercice 4 : [3] points

Soit $f(x)$ une fonction telle que son développement en série de Taylor $T(x)$ autour de a avec $a > 0$ est donné par

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x-a)^n}{n^2+1}.$$

Trouvez le rayon et l'intervalle de convergence de la série $T(x)$.

Ne pas oublier l'analyse aux bornes, s'il y a lieu.

Rép : $I = -\dfrac{1}{2} + a \leq x \leq \dfrac{1}{2} + a,\ \ R = \frac{1}{2}$

Exercice 5 : [6] points

Pour chacune des sous-questions ci-dessous, veuillez choisir une seule réponse parmi celles proposées et reportez celle-ci dans le tableau à la fin de la question.
Aucune justification n'est demandée pour cette question.

(1 pt) 5.1)

Rappel: Une suite $\{a_n\}$ converge vers la limite L si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier N tel que

$$\text{si } n > N \text{ alors } |a_n - L| < \epsilon \ .$$

Pour un $\epsilon > 0$ donné, quelles valeurs de N permettent de démontrer formellement que la suite

$$a_n = \frac{1}{3+n^2} + 3, \qquad \text{pour } n \geq 1$$

converge vers 3 ?

a) Tout entier N supérieur à $\dfrac{1}{3+\frac{1}{\epsilon^2}}$

b) Tout entier N supérieur à $\dfrac{1}{3-\frac{1}{\epsilon^2}}$

c) Tout entier N supérieur à $\sqrt{\dfrac{1}{\epsilon} - 3}$

d) Tout entier N supérieur à $\sqrt{3 - \dfrac{1}{\epsilon}}$

e) aucune de ces réponses

Rép : c)

(1 pt) 5.2) La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n 9^n$ converge absolument. Considérez les séries

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(-9)^n \qquad \text{et} \qquad T = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n \ .$$

Lequel des énoncés est nécessairement vrai ?

a) S et T convergent

b) S diverge et T converge

c) S converge et T diverge

d) S et T divergent

e) on ne peux rien dire

Rép : a)

(1 pt) 5.3) Si $f(x) = \sin(x^3)$ alors la valeur de $f^{(15)}(0)$ est :

a) $\dfrac{15\,!}{5\,!}$

b) $5\,!$

c) 0

d) $\dfrac{1}{5\,!}$

e) aucune de ces réponses

Rép : *a)*

(1 pt) 5.4) La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{(-3)^n}{n} \right)$$

est

a) convergente

b) absolument convergente

c) divergente

d) de valeur nulle

e) aucune de ces réponses

Rép : *c)*

(1 pt) 5.5) La valeur de x satisfaisant l'équation

$$-3x + \frac{9}{2!}x^2 - \frac{27}{3!}x^3 + \frac{81}{4!}x^4 - \ldots = 2$$

est :

a) $\ln(3)$

b) $-\ln(3)$

c) $-\dfrac{\ln(3)}{3}$

d) $\ln(2)$

e) aucune de ces réponses

Rép : *c)*

(1 pt) 5.6) Soit f une fonction telle que

$$f(2) = 1,\ f'(2) = 5,\ f''(2) = -7,\ f'''(2) = -3$$

et

$$\begin{aligned} -3 \leq &\quad f(x) &\leq 5 \\ 1 \leq &\quad f'(x) &\leq 9 \\ -8 \leq &\quad f''(x) &\leq 2 \\ -3 \leq &\quad f'''(x) &\leq -1 \end{aligned}$$

pour tout $x \in [0,\ 4]$. La meilleure borne sur l'erreur de l'approximation de f par son polynôme de Taylor de degré 2 sur l'intervalle $[0, 4]$ est

a) $|R_2(x)| \leq 1$

b) $|R_2(x)| \leq 2$

c) $|R_2(x)| \leq 3$

d) $|R_2(x)| \leq 4$

e) aucune de ces réponses

Rép : *d*)

Réponses :

Q5.1)	Q5.2)	Q5.3)	Q5.4)	Q5.5)	Q5.6)

Brouillon :