

GLQ3401/GLQ3651 : Deuxième partie
Cours 6 : Introduction à la
géostatistique et variogrammes



**POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL**

UNIVERSITÉ
D'INGÉNIERIE

Objectifs

- Expliquer ce que représente le variogramme et en quoi il permet de mesurer la continuité spatiale des teneurs;
- Expliquer la différence entre variogramme expérimental et théorique et comprendre la nécessité d'un modèle théorique;
- Calculer un variogramme expérimental;
- Ajuster un modèle théorique à un variogramme expérimental;
- Calculer la covariance entre deux points à partir d'un modèle de variogramme;
- Tenir compte dans le calcul du variogramme ou de la covariance d'anisotropies;
- Connaître les principales caractéristiques des modèles de variogramme courants.



Plan du cours

1. Un peu d'histoire
2. Point de vue de la géostatistique
3. Rappels notions statistiques
4. Effet de support et d'information
5. Géostatistique linéaire
 - 5.1 Hypothèse de stationnarité
 - 5.2 Variogramme théorique et expérimental
 - 5.3 Modèles de variogrammes admissibles
 - 5.4 Anisotropies
 - 5.5 Problèmes et stratégies de modélisation



1.0 Un peu d'histoire

- 1930-1950: Théorie des fonctions aléatoires (Kolmogorov, Wiener)
- 1955: Daniel Krige : approche empirique (régression) pour corriger le problème de biais conditionnel observé dans les mines
 - Pourquoi moins que prévu ?
 - Comment prévoir et tenir compte de l'effet support (taille des blocs) ?
- 1960-1970: Matheron (mines), Matern (foresterie), Gandin (météorologie) développent un ensemble d'outils => naissance de la géostatistique linéaire stationnaire. Réponse aux questions de Krige. Matheron donne le nom de «krigeage» à la méthode d'estimation qu'il développe.
- 1970: Polytechnique est la 1ère Université en A. du N. à enseigner la géostatistique (M. David)



1.0 Un peu d'histoire

- 1973: Géostatistique linéaire non stationnaire *
- 1975: Géostatistique non linéaire
- 1977: 1er livre en anglais de géostatistique (M. David)
- 1980: Géostatistique linéaire multivariable *
- 1985: Simulations géostatistiques *
- 1985 : Approche géostatistique des problèmes inverses*
- Aujourd'hui, la géostatistique est appliquée dans une foule de domaines (mines, pétrole, foresterie, agriculture, environnement, hydrogéologie, géotechnique, pêches, biologie, biomédicale...)

* Domaines encore actifs de recherche

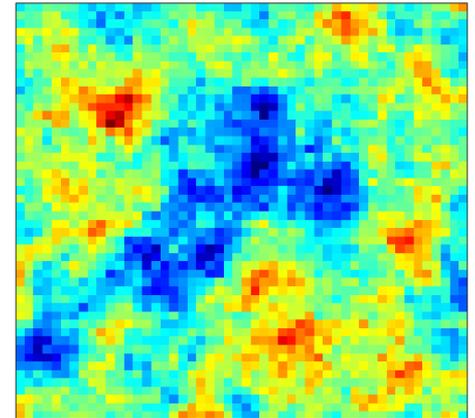
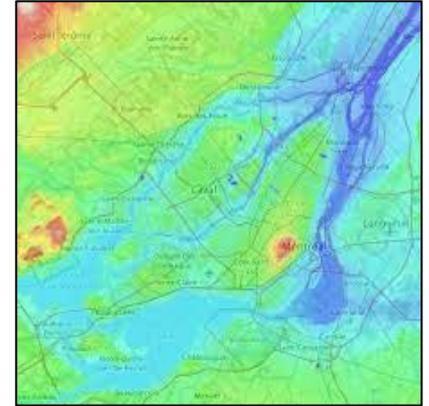
2.0 Point de vue de la géostatistique

Première loi de la géographie

« Tout interagit avec tout, mais deux objets proches ont plus de chances de le faire que deux objets éloignés », **Waldo Tobler**

Aussi vrai en géologie.

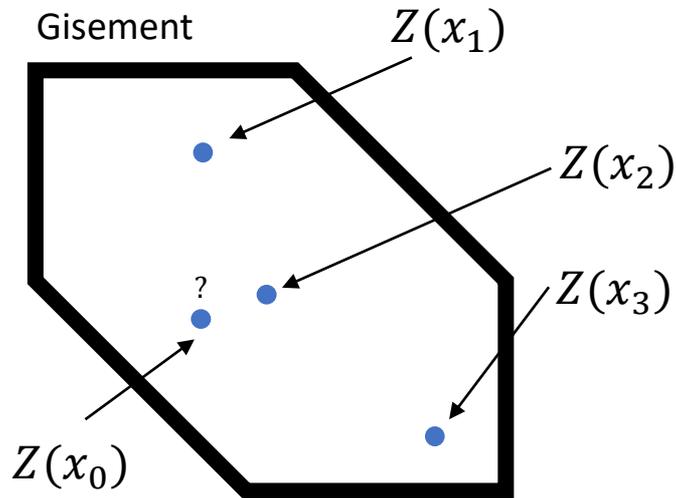
Deux observations situées l'une près de l'autre devraient, en moyenne, se ressembler davantage que deux observations éloignées.



2.0 Point de vue de la géostatistique

Idée fondamentale : La nature n'est pas entièrement "imprévisible". Deux observations situées l'une près de l'autre devraient, en moyenne, se ressembler davantage que deux observations éloignées.

Attaquer le problème d'un point de vue de la géostatistique

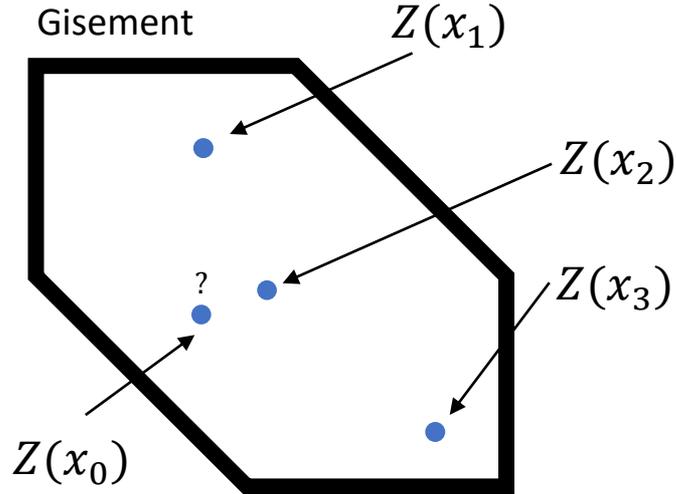


Un gisement est constitué de plusieurs points ('quasi-points')

- Chaque point représente une teneur
- Chaque teneur est une v.a. $Z_i(x_i)$
- L'ensemble des teneurs suit une loi multivariable, de dimension n , le nombre de points.

2.0 Point de vue de la géostatistique

Question : comment estimer $Z(x_0)$?

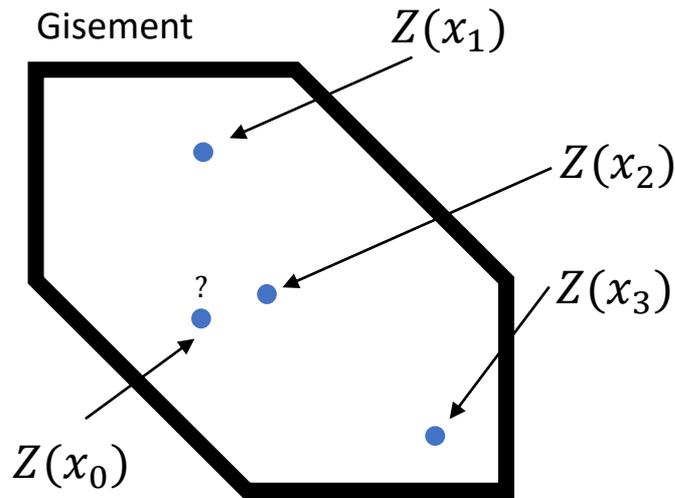


1. Estimer, à partir des données, la loi de densité conjointe
2. Estimer, à partir des données, la loi de densité multivariable
3. Estimer, à partir des données, la loi de densité d'une variable

Impossible, on ne connaît pas $Z(x_0)$ et on a qu'une observation des $Z(x_i), i = 1, \dots, 3$

2.0 Point de vue de la géostatistique

Question : comment estimer $Z(x_0)$?



Recours à des hypothèses \rightarrow les statistiques **ne dépendent pas de x** . Elles **dépendent de la distance h** entre les points.

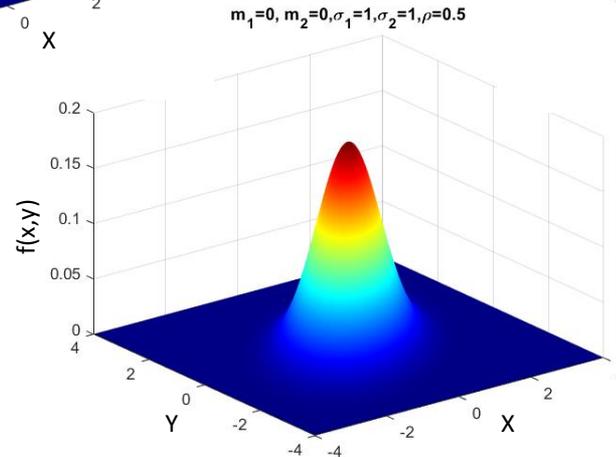
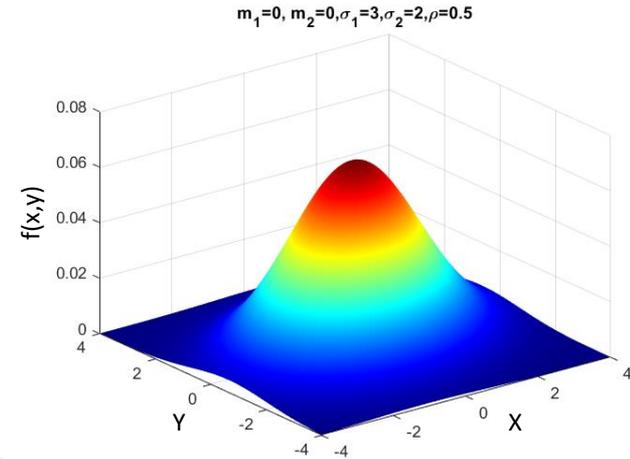
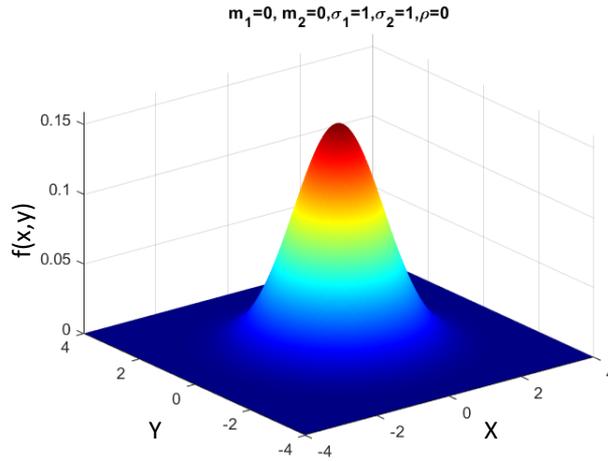
Stationnarité de second ordre

- $E[Z(x)] = m$
- $E[Z(x) - Z(x + h)] = 0$
- $Cov(Z(x), Z(x + h)) = C(h)$
- $\frac{1}{2} Var(Z(x) - Z(x + h)) = \gamma(h)$

* Ces hypothèses supposent une certaine régularité, une certaine homogénéité du gisement étudié. Si on peut reconnaître des zones très différentes géologiquement, on a habituellement intérêt à les traiter séparément.

3.0 Rappel notions statistiques

Deux variables aléatoires (X et Y) : caractérisé par la loi de densité conjointe $f(x,y)$



3.0 Rappel notions statistiques

Deux variables aléatoires (X et Y) : la distribution conjointe de deux v.a peut se résumer par

- La moyenne des deux variables (m_X et m_Y)
- L'écart-type (ou la variance) des deux variables (σ_X et σ_Y)
- La corrélation (ou covariance) entre les deux variables (ρ_{XY})

Covariance : mesure le degré d'association entre deux v.a

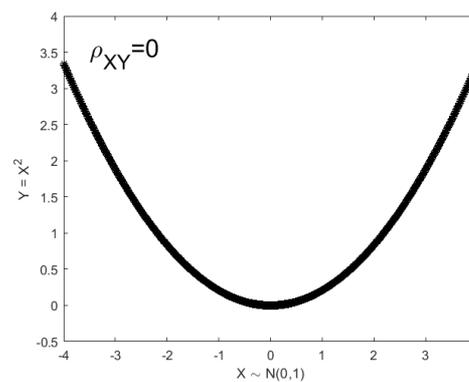
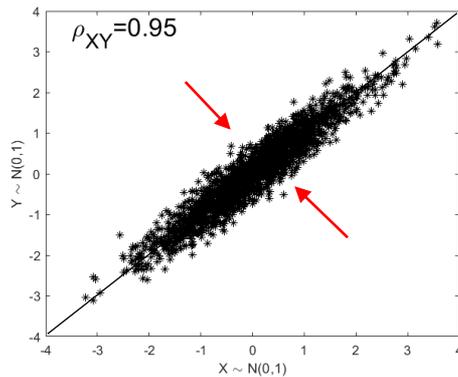
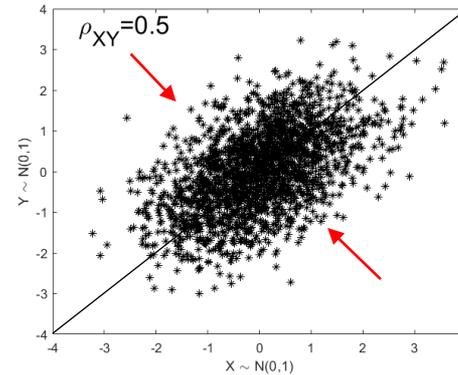
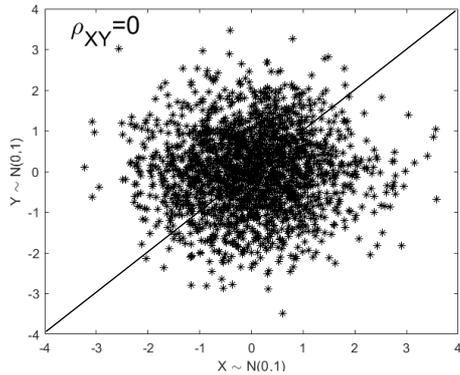
Corrélation (ρ) : covariance entre deux v.a normalisées pour présenter un écart-type de 1

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \in [-1, 1]$$



3.0 Rappel notions statistiques

Deux variables aléatoires (X et Y) : influence de la corrélation sur la distribution bivariable.



3.0 Rappel notions statistiques

Espérance mathématique

Définition :

- $E[X] = \int x f_X(x) dx$
- $E[g(X)] = \int g(x) f_X(x) dx$
- $E[g(X, Y)] = \int g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy$

Variance :

Si $g(X) = (X - m)^2$, alors $E[g(X)] = Var(X)$

Covariance :

Si $g(X, Y) = (X - m_x)(Y - m_y)$, alors $E[g(X, Y)] = Cov(X, Y)$



3.0 Rappel notions statistiques

Espérance mathématique et variance

Généralisation :

$$\text{Var} \left(c \int Z(x) dx \right) = c^2 \int \int \text{Cov}(Z(x), Z(y)) dx dy$$

 Très utile

$$\text{Cov} \left(a \int Z(x) dx, b \int Z(y) dy \right) = ab \int \int \text{Cov}(Z(x), Z(y)) dx dy$$

À noter :

- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$
- $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ si X et Y sont indépendants
- $\text{Cov}(X, Y) = 0$ si X et Y sont indépendants



3.0 Rappel notions statistiques

Espérance mathématique et variance

Propriétés : opérateur linéaire

- $E[cg(X)] = cE[g(X)]$
- $E[g(X) + h(X)] = E[g(X)] + E[h(X)]$
- $E[g(X, Y) + h(X, Y)] = E[g(X, Y)] + E[h(X, Y)]$

En particulier, on obtient :

- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $Var(aX + bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2abCov(X, Y)$

Généralisation :

$$Var\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$



Très utile



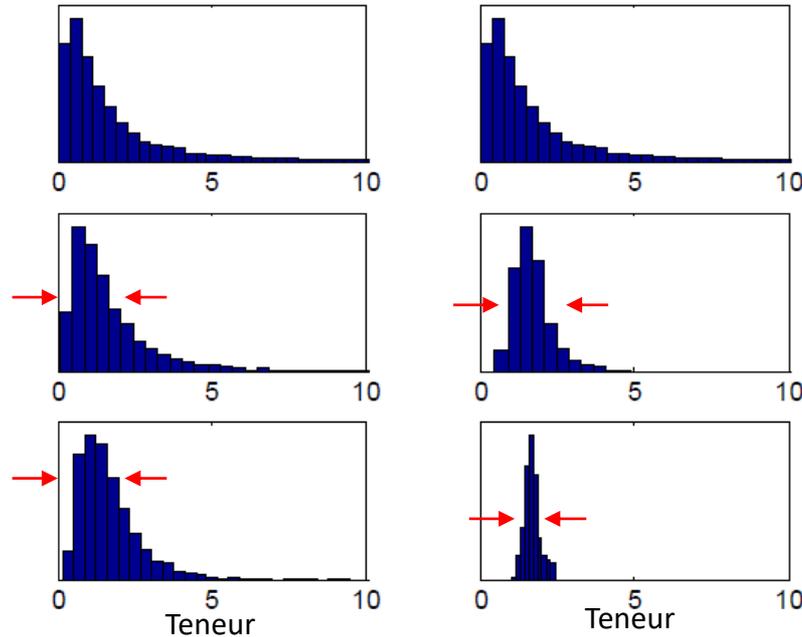
4.0 Effet de support et d'information

Effet de support



Gisement A

Gisement B



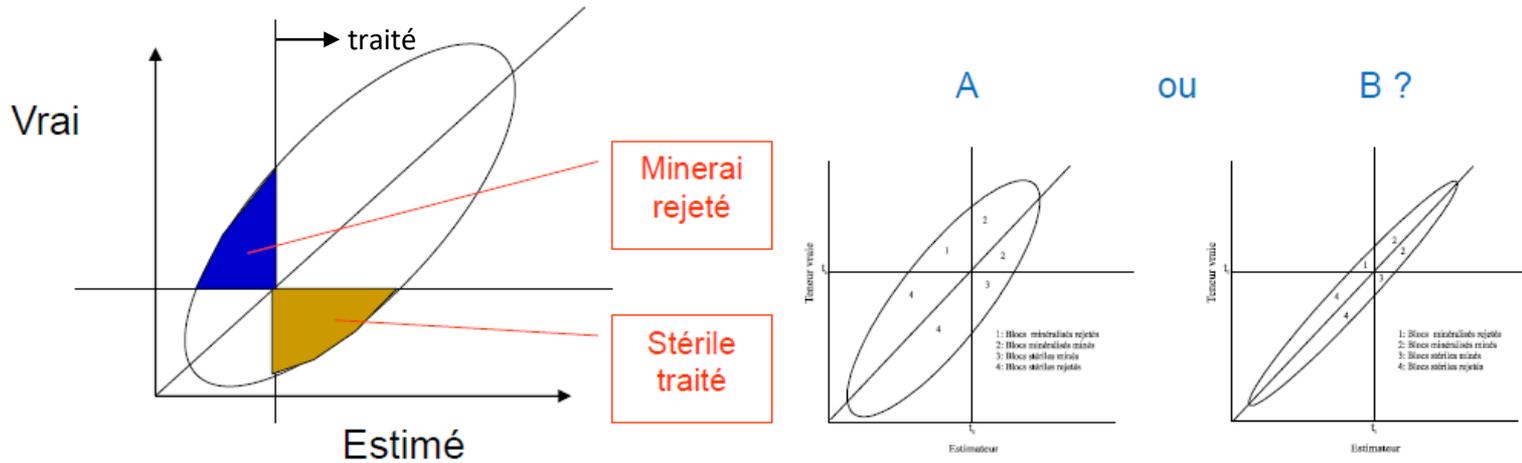
Qu'observe-t-on de particulier ?

Pourquoi ? Explication ?



4.0 Effet de support et d'information

Effet d'information : On mine à partir d'estimations, mais on récolte des valeurs vraies.



Peut-on prévoir les plages d'erreur et les pertes en \$?
Augmenter l'information disponible (\$) pour réduire les pertes ?

* La précision dépend du nombre de données, mais aussi des caractéristiques du gisement.

4.0 Effet de support et d'information

Pour une même quantité de matière extraite :

→ on récupère toujours moins de métal avec de gros blocs qu'avec des petits blocs (**effet support**)

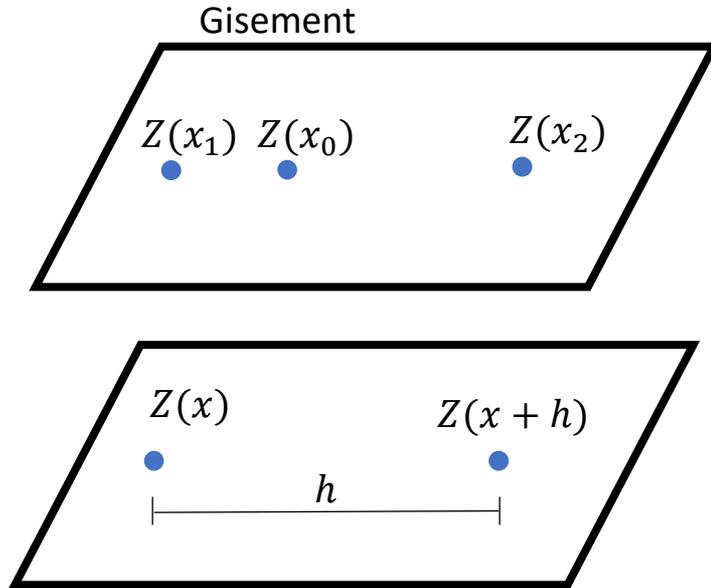
→ on récupère toujours moins de métal avec des estimations qu'avec les vraies valeurs (**effet information**)

La géostatistique permet théoriquement de

- prévoir l'ampleur de ces effets
- Minimiser ces effets
- Prendre des décisions éclairées au vu de ces effets



5.1 Hypothèse de stationnarité



Stationnarité du second ordre

L'espérance mathématique ne dépend pas de la localisation x

- $E[Z(x)] = m$
- $E[Z(x) - Z(x + h)] = 0$

La covariance ne dépend que de h

- $Cov(Z(x), Z(x + h)) = C(h)$, covariogramme
- $\frac{1}{2}Var(Z(x) - Z(x + h)) = \gamma(h)$, variogramme
- $Var [Z(x)] = C(0)$, constante

$\gamma(h) \rightarrow$ fonction la plus utilisée pour caractériser la continuité d'une minéralisation

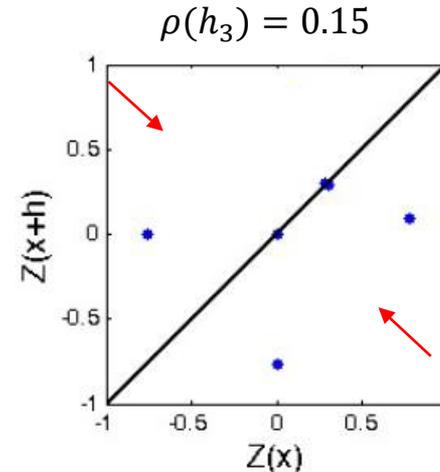
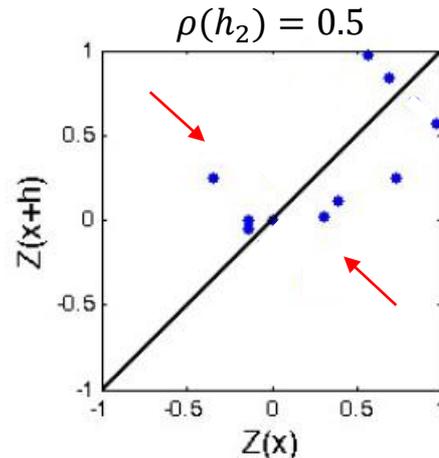
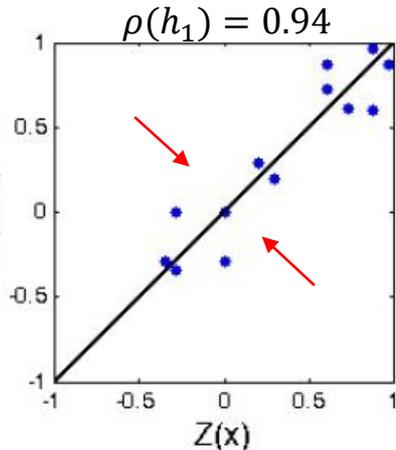
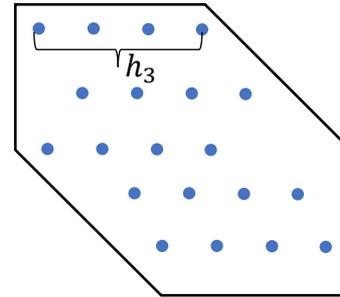
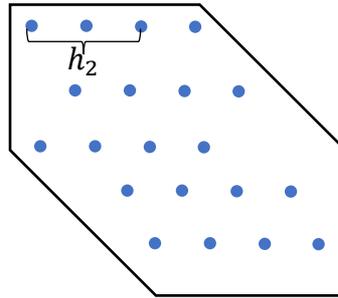
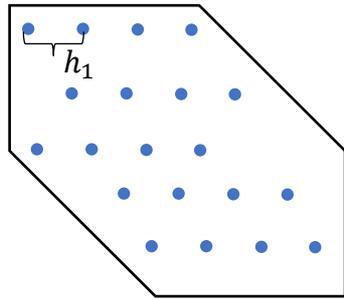


5.1 Hypothèse de stationnarité

Covariance et corrélation

$$C(h) = Cov(Z(x), Z(x+h)) \\ = E[(Z(x) - m)(Z(x+h) - m)]$$

Gisement

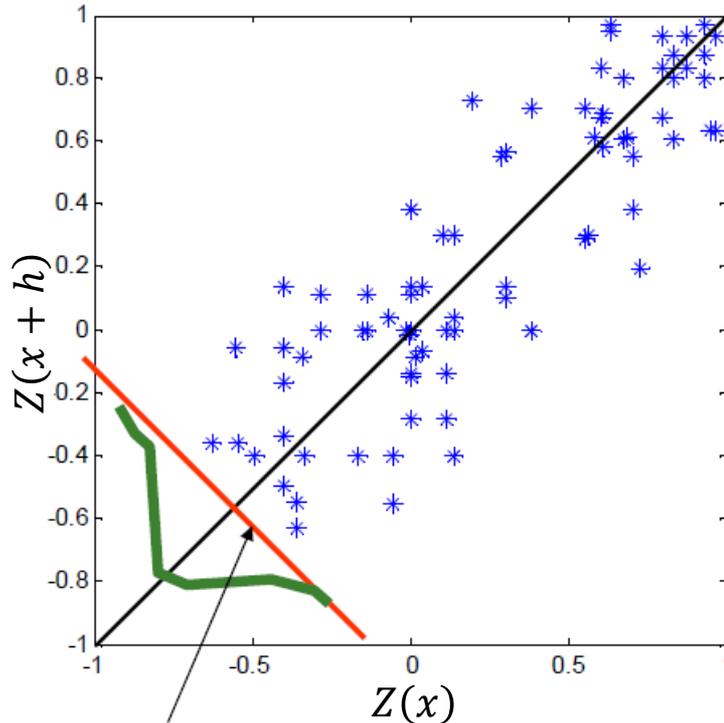


Généralement
si $h \uparrow, C \downarrow, \rho \downarrow$



5.1 Hypothèse de stationnarité

Variogramme



Mesure la dispersion sur cette droite

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{Var}(Z(x) - Z(x+h))$$
$$= \frac{1}{2} E \left[(Z(x) - Z(x+h))^2 \right]$$

Généralement
si $h \uparrow, \gamma \uparrow$

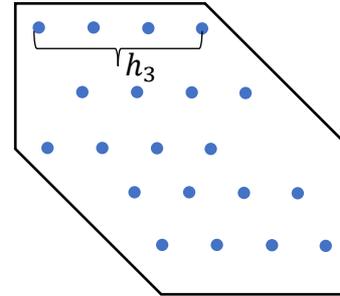
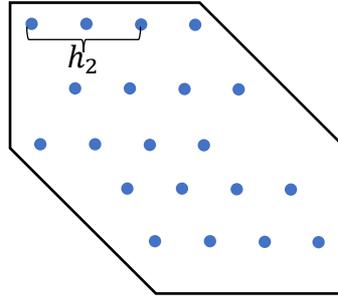
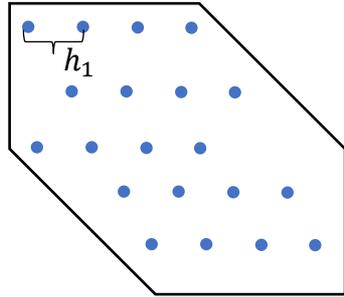


5.1 Hypothèse de stationnarité

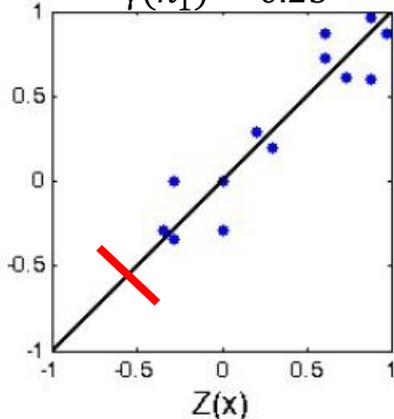
Variogramme

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{Var}(Z(x) - Z(x+h))$$

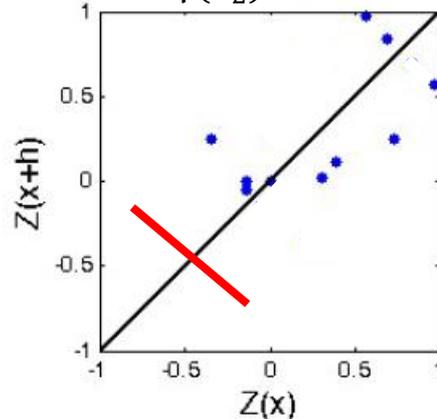
Gisement



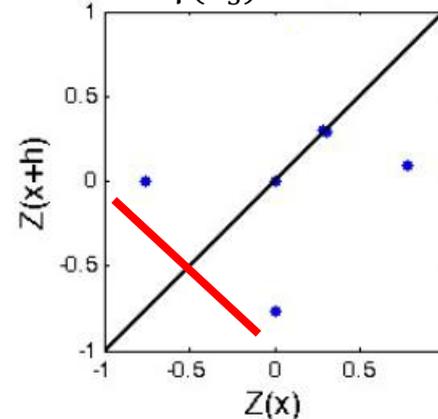
$\gamma(h_1) = 0.25$



$\gamma(h_2) = 0.5$



$\gamma(h_3) = 0.75$



Généralement
si $h \uparrow$, $\gamma \uparrow$



5.2 Variogramme expérimental et théorique

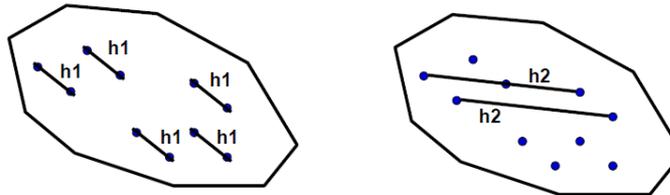
Variogramme expérimental

$$\gamma_e(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (Z(x_i) - Z(x_i + h))^2$$

$N(h)$: nombre de paires de points dans la classe h considérée

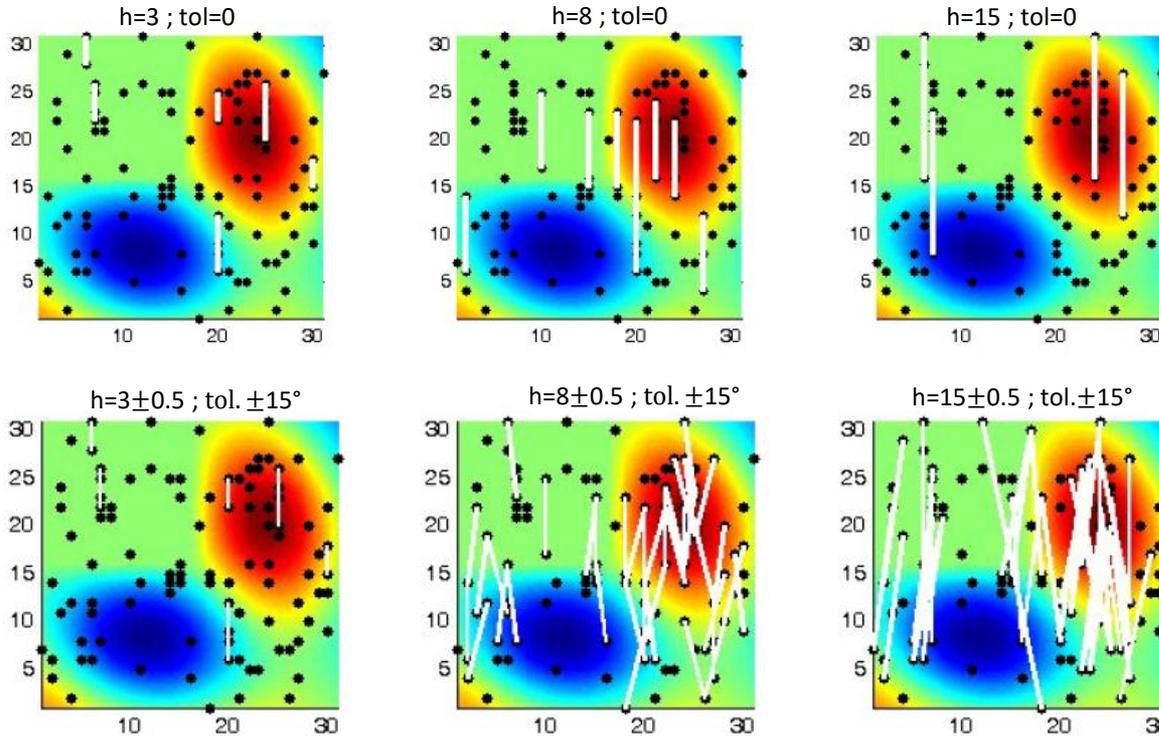
Pour calculer le variogramme expérimental, il faut :

1. Choisir une direction h et une tolérance angulaire
2. Discrétiser h en classes distinctes
3. Répartir les paires de points $(x_i, x_i + h)$ dans les classes



5.2 Variogramme expérimental et théorique

Variogramme expérimental : 2D



5.2 Variogramme expérimental et théorique

Variogramme expérimental

$$\gamma_e(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (Z(x_i) - Z(x_i + h))^2$$

Exemple

1	3	2	4
2	5	3	1
4	7	6	4
3	5	4	2

\vec{h}	$N(\vec{h})$	$\gamma_e(\vec{h})$
$1\vec{i}$		
$2\vec{i}$		
$1\vec{j}$		
$2\vec{j}$		
$1\vec{i}+1\vec{j}$		



5.2 Variogramme expérimental et théorique

Variogramme expérimental

$$\gamma_e(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (Z(x_i) - Z(x_i + h))^2$$

Exemple

1	3	2	4
2	5	3	1
4	7	6	4
3	5	4	2

\vec{h}	$N(\vec{h})$	$\gamma_e(\vec{h})$
$1\vec{i}$	12	2.04
$2\vec{i}$		
$1\vec{j}$		
$2\vec{j}$		
$1\vec{i}+1\vec{j}$		



5.2 Variogramme expérimental et théorique

Exercice en équipe :

1) Apprendre à calculer un variogramme expérimental

$$\gamma_e(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (Z(x_i) - Z(x_i + h))^2$$



5.2 Variogramme expérimental et théorique

Variogramme expérimental

$$\gamma_e(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (Z(x_i) - Z(x_i + h))^2$$

Exemple

1	3	2	4
2	5	3	1
4	7	6	4
3	5	4	2

\vec{h}	$N(\vec{h})$	$\gamma_e(\vec{h})$
$1\vec{i}$	12	2.04
$2\vec{i}$	8	2.63
$1\vec{j}$	12	2.25
$2\vec{j}$	8	2.75
$1\vec{i}+1\vec{j}$	9	3.89



5.2 Variogramme expérimental et théorique

Variogramme expérimental

$$\gamma_e(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (Z(x_i) - Z(x_i + h))^2$$

Exemple : bloc 2x2

1	3	2	4
2	5	3	1
4	7	6	4
3	5	4	2



2.75	3.25	2.5
4.5	5.25	3.5
4.75	5.5	4

\vec{h}	$\gamma_e(\vec{h})$ 1x1	$\gamma_e(\vec{h})$ 2x2
$1\vec{i}$	2.04	0.60
$2\vec{i}$	2.63	0.27
$1\vec{j}$	2.25	0.70
$2\vec{j}$	2.75	1.89
$1\vec{i}+1\vec{j}$	3.89	1.67

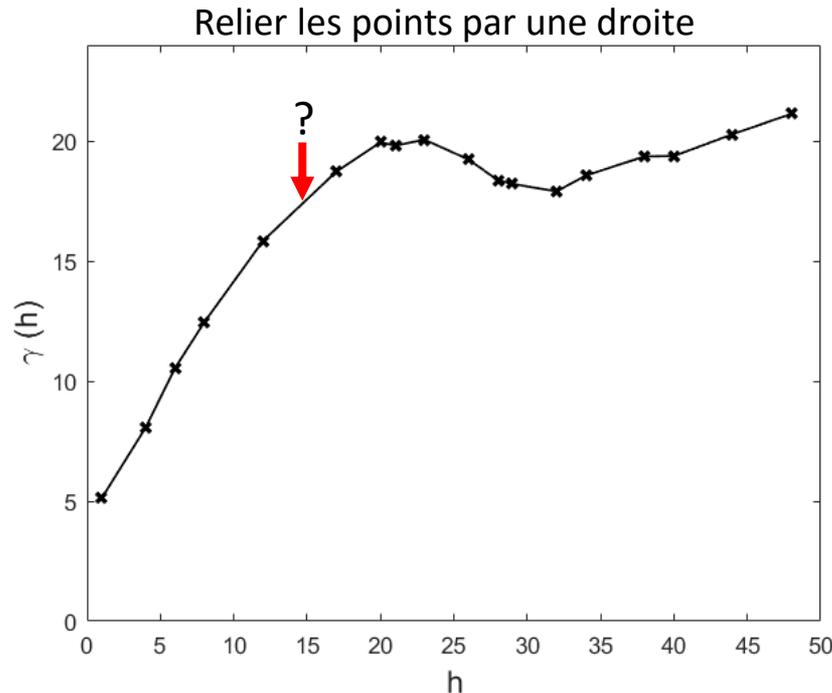
Effet de support : les blocs sont moins variables



5.2 Variogramme expérimental et théorique

Variogramme expérimental

Comment déterminer le variogramme à des distances non observées ?



Une solution si simple,
mais malheureusement
erronée !!!
↓
Vers un modèle théorique



5.2 Variogramme expérimental et théorique

Un modèle théorique est requis afin d'assurer que toutes variances calculées à partir du modèle sont nulles ou positives.

Soit une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i$, il faut démontrer pour $\forall n, \forall \lambda_i$ et $\forall Z_i$ que :

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \text{Cov}(Z_i, Z_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C(h_{i,j}) \geq 0$$

BEURK!!!

FIUU !!

Utilisation de modèles éprouvés

Note 1 : C est nommé la matrice de covariance et elle fournit la covariance entre chaque paire d'éléments. Il suffit de démontrer que C est semi-défini positive pour vérifier l'admissibilité d'un modèle pour toutes les combinaisons linéaires possibles.

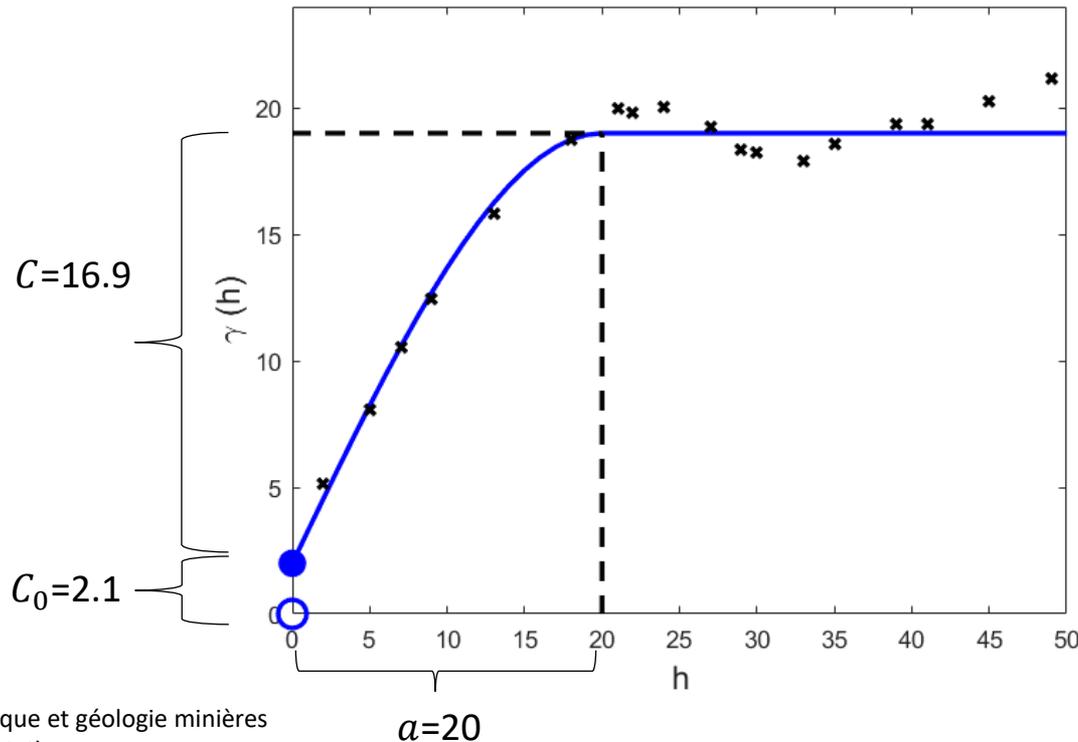
Note 2: La relation est valide seulement si le variogramme présente un palier. Sinon, l'équation à démontrer est légèrement plus complexe. Il faut stipuler que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, et démontrer que $\text{Var}(\sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma(h_{i,j}) \geq 0$.

5.2 Variogramme théorique et expérimental

Variogramme théorique

Il faut utiliser un modèle démontré admissible :

Assurer que toute variance calculée à partir du modèle soit positive



5.2 Variogramme expérimental et théorique

Variogramme théorique

Lorsqu'un variogramme **présente un seuil**, il est défini par :

- **La portée** (a) : distance à partir de laquelle deux points de l'espace ne sont plus liés un à l'autre (covariance nulle, $C(h > a) = 0$). Pour un modèle asymptotique, la covariance tend vers zéro ($C(h > a) \rightarrow 0$).
- **Le palier** ($\sigma^2 = C_0 + \sum_i C_i$): variance de la variable aléatoire $Z(x)$.
- **L'effet de pépité** (C_0): variation à très courte échelle, erreurs de mesure, de localisation, de précision ou d'analyse



5.3 Modèles de variogrammes admissibles

Modèles admissibles :

Nous allons nous intéresser aux modèles les plus communs en génie minier et génie géologique.

- Effet de pépite
- Sphérique
- Exponentielle
- Gaussien
- Puissance



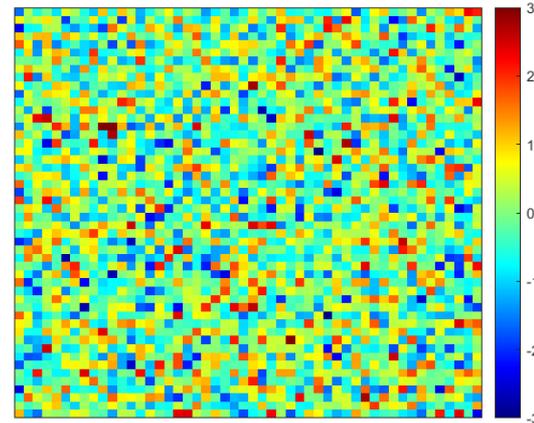
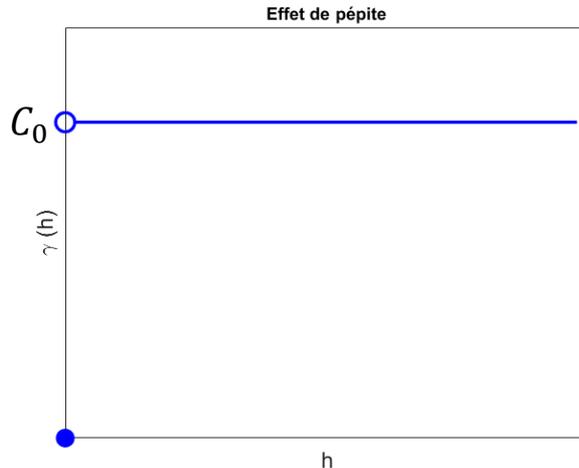
5.3 Modèles de variogrammes admissibles

Modèles communs : Effet de pépité

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0, & \text{si } h = 0 \\ C_0, & \text{si } h > 0 \end{cases}$$

- Erreur de mesure
- Erreurs de localisation
- Erreur d'analyse (Gy)
- Microstructure non identifiable due au manque de données

Presque toujours présent, jamais seul, sinon estimation impossible. Pourquoi ?

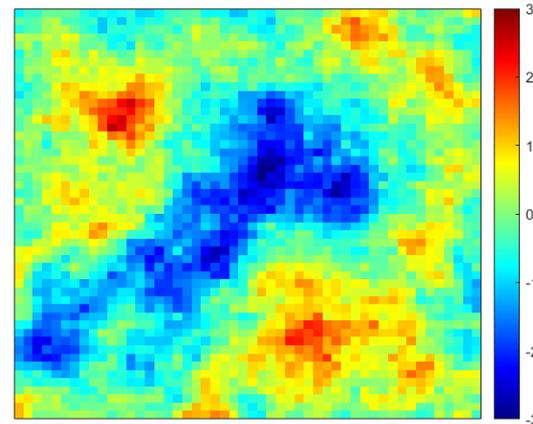
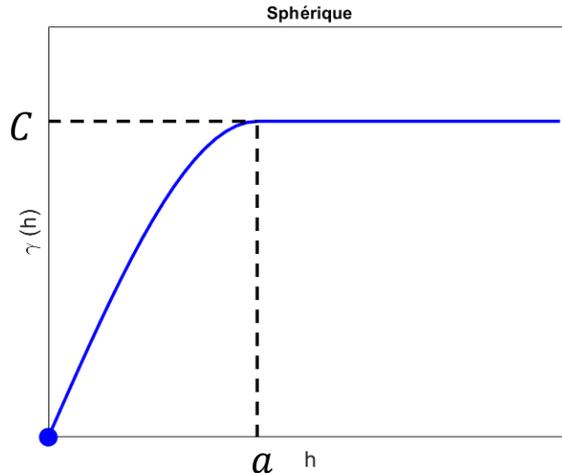


5.3 Modèles de variogrammes admissibles

Modèles communs : sphérique

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & , \text{si } h = 0 \\ C \left(1.5 \frac{h}{a} - 0.5 \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right) & , \text{si } 0 < h < a \\ C & , \text{si } h \geq a \end{cases}$$

- Modèle le plus fréquent
- Teneur, épaisseur, conductivité hydraulique
- Souvent combiné avec un effet de pépite



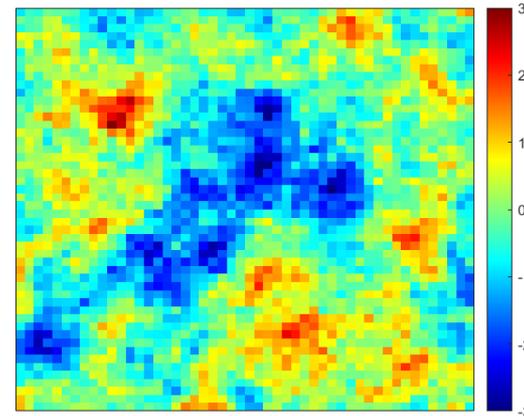
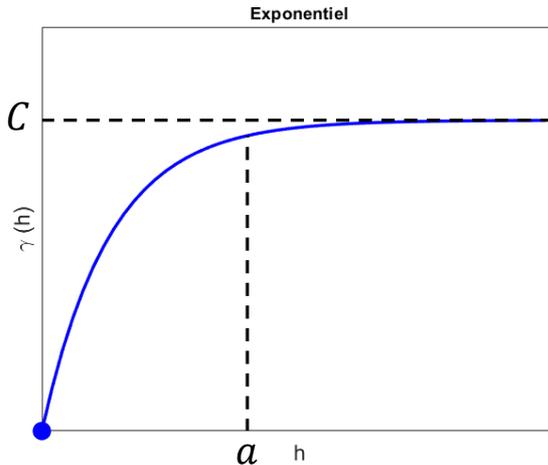
5.3 Modèles de variogrammes admissibles

Modèles communs : exponentielle (modèle asymptotique)

$$\gamma(h) = C \left(1 - \exp\left(-\frac{|h|}{a'}\right) \right) = C \left(1 - \exp\left(-\frac{3|h|}{a}\right) \right)$$

a : portée effective ; $\gamma(h) = 0.95C$
 $a' = a/3$

- Assez commun
- Semblable au sphérique
- Très utilisé pour modéliser les conductivités hydrauliques



5.3 Modèles de variogrammes admissibles

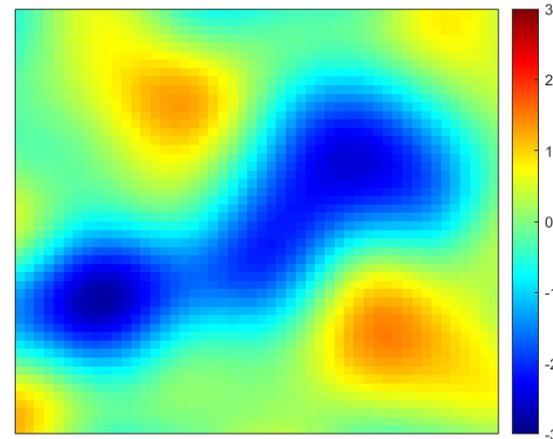
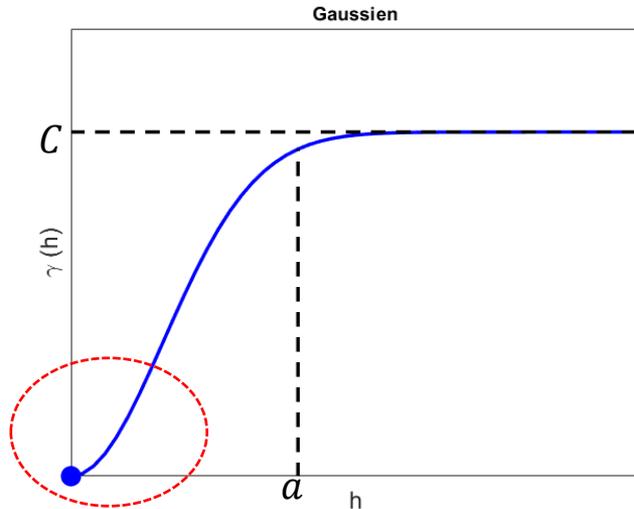
Modèles communs : gaussien (modèle asymptotique)

$$\gamma(h) = C \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{|h|}{a'} \right)^2 \right) \right) = C \left(1 - \exp \left(-3 \left(\frac{|h|}{a} \right)^2 \right) \right)$$

a : portée effective ; $\gamma(h) = 0.95C$

$$a' = a/\sqrt{3}$$

- Peu fréquent en mine
- Variables très continues: p. ex. topographie, gravimétrie, magnétisme, épaisseur...
- Problèmes numériques si absence d'effet de pépite

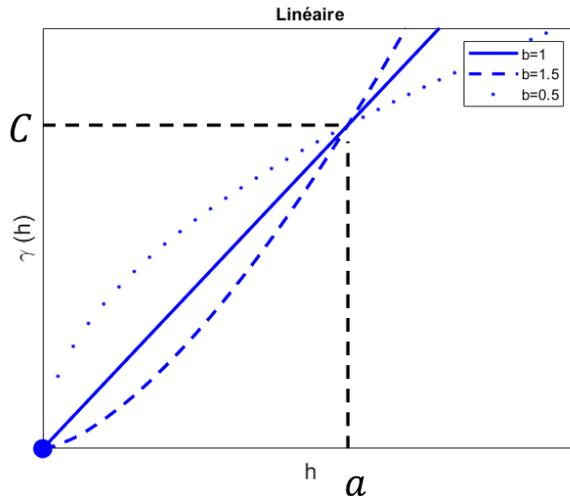


5.3 Modèles de variogrammes admissibles

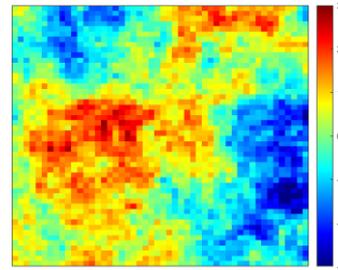
Modèles communs : puissance, modèle sans palier

$$\gamma(h) = C \left(\frac{|h|}{a} \right)^b, |h| > 0, 0 \leq b < 2$$

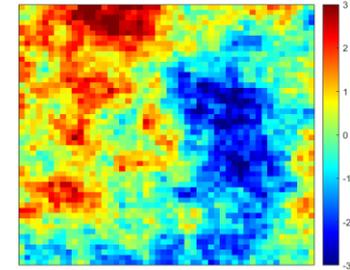
- Moyenne, variance et covariance non définies;
- On observe le phénomène géologique à petite échelle.



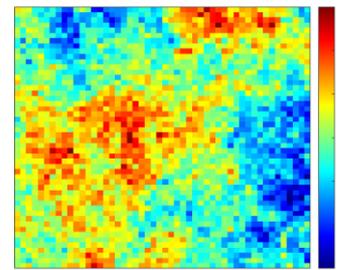
$b = 1.5$



$b = 1$

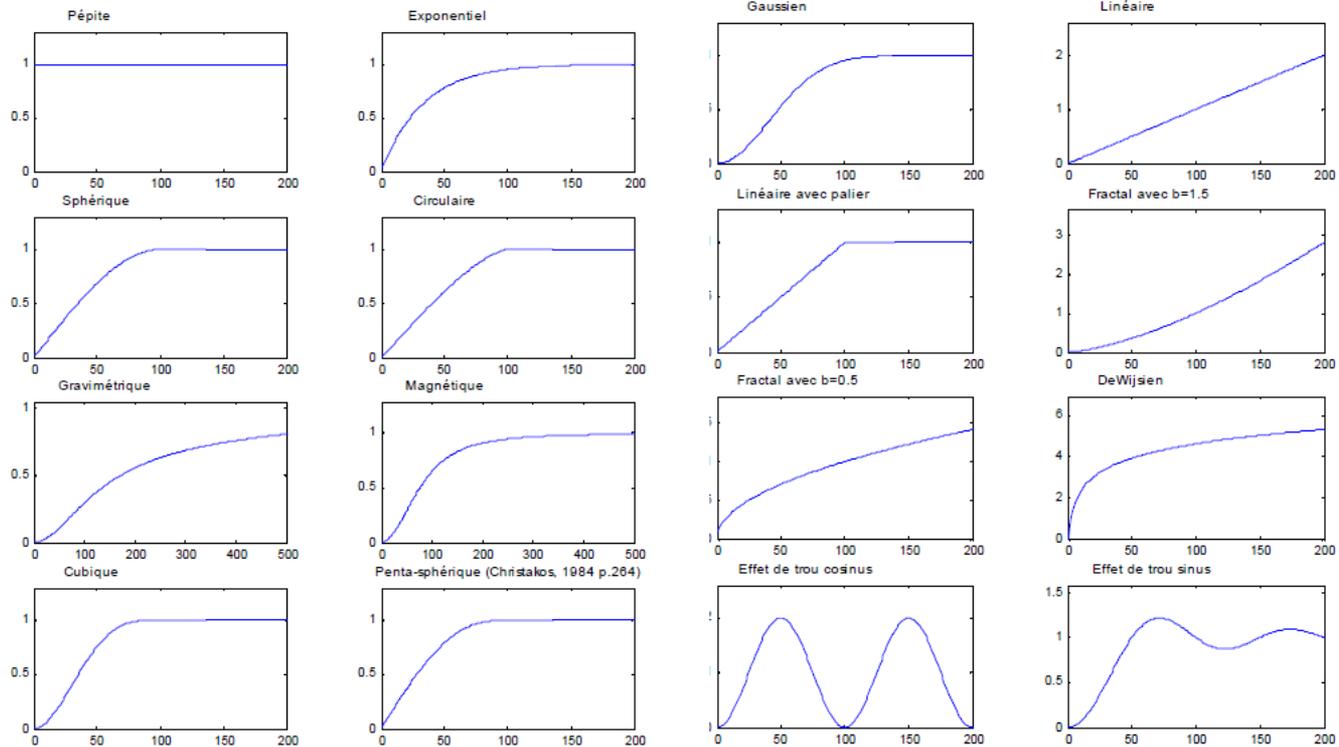


$b = 0.5$



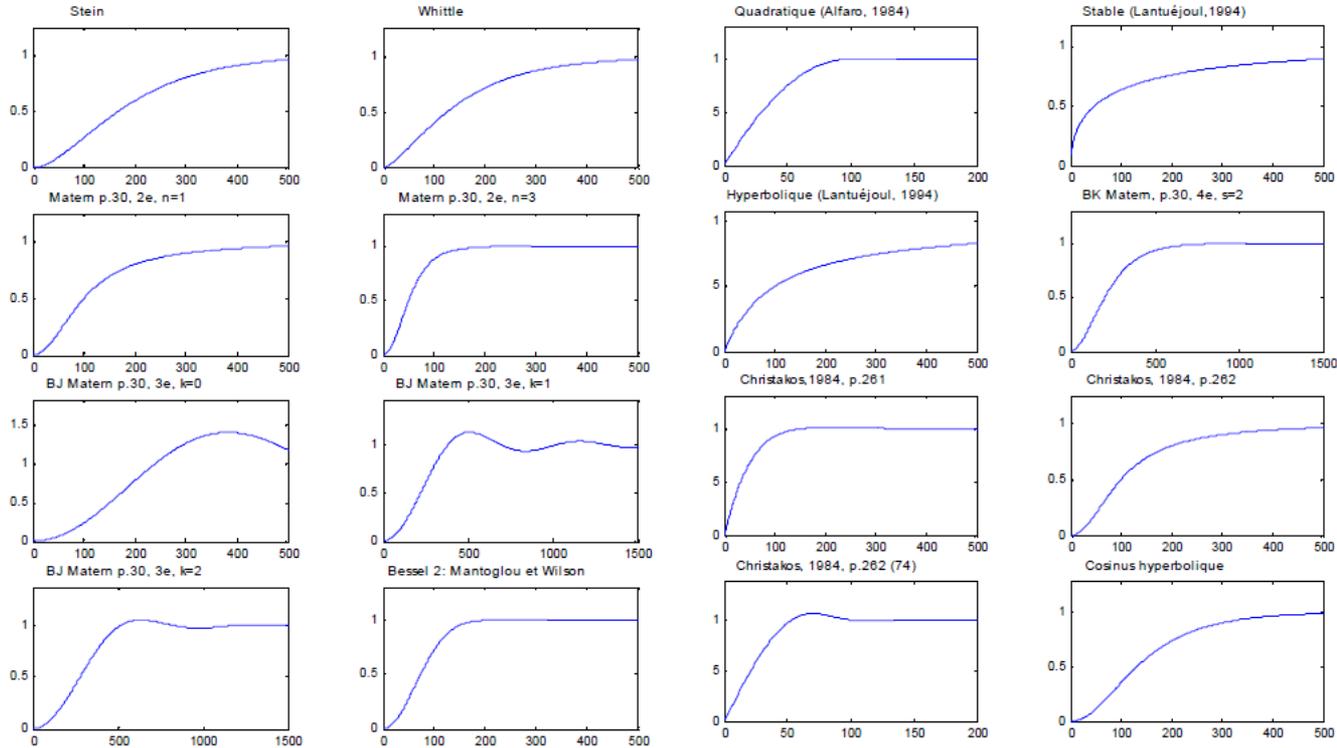
5.3 Modèles de variogrammes admissibles

Il existe plusieurs modèles admissibles. En voici une liste :



5.3 Modèles de variogrammes admissibles

Il existe plusieurs modèles admissibles. Voici une autre liste :



5.3 Modèles de variogrammes admissibles

Construction de modèles admissibles :

- Toute somme (coefficients positifs) de modèles de variogramme est admissible
- Toute somme (coefficients positifs) de modèles de covariance est admissible
- Tout produit (coefficients positifs) de modèles de covariance est admissible
- Chaque modèle peut être isotrope ou anisotrope, les directions d'anisotropie peuvent varier d'un modèle à l'autre
- **IMPORTANT** : Un modèle peut être admissible en 1D et non-admissible en 2D, 3D,...,n-D. Par contre, s'il est admissible en n-D il l'est aussi en (n-1)-D jusqu'à 1D.



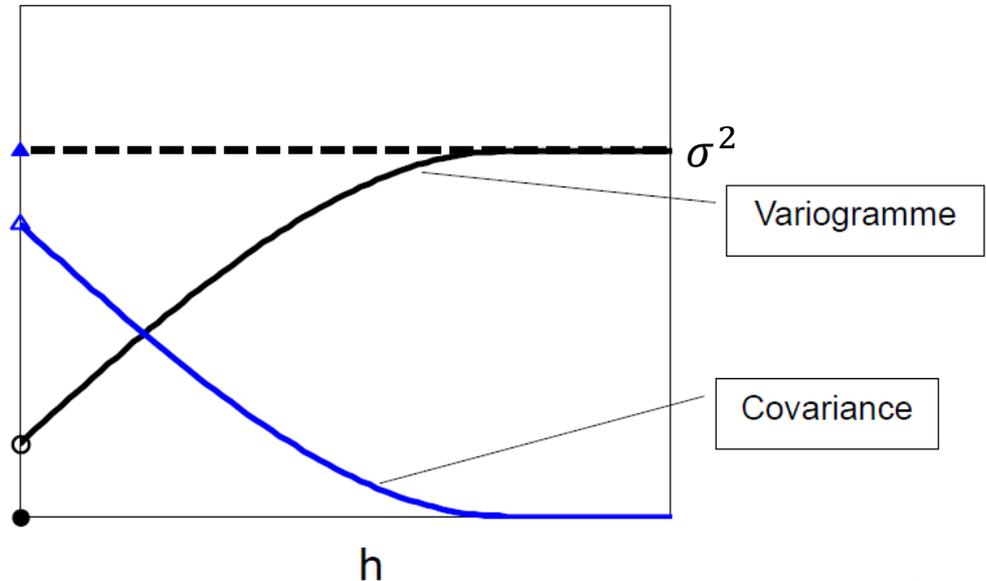
5.3 Modèles de variogrammes admissibles

Variogramme théorique

Liens entre covariance et variogramme

$$\gamma(h) = \sigma^2 - C(h)$$

Uniquement vrai si le variogramme présente un palier, sinon σ^2 n'est pas défini



5.3 Modèles de variogrammes admissibles

Le variogramme est une statistique d'ordre 2

Ce n'est pas suffisant pour caractériser tous les aspects d'une image ou d'un processus

p. ex. on peut créer plusieurs images ayant même m , même variogramme et présentant pourtant des textures très différentes

Aparté:

La géostatistique s'intéresse de plus en plus à des caractérisations plus complètes des champs étudiés (p. ex. les moments définis sur plus de deux points, statistiques d'ordre trois comme l'asymétrie directionnel).



5.3 Modèles de variogrammes admissibles

Exercice en équipe : 2) Utilisation d'un modèle théorique admissible

Pépite

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0, & \text{si } h = 0 \\ C_0, & \text{si } h > 0 \end{cases}$$

Sphérique

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & , \text{si } h = 0 \\ C \left(1.5 \frac{h}{a} - 0.5 \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right) & , \text{si } 0 < h < a \\ C & , \text{si } h \geq a \end{cases}$$

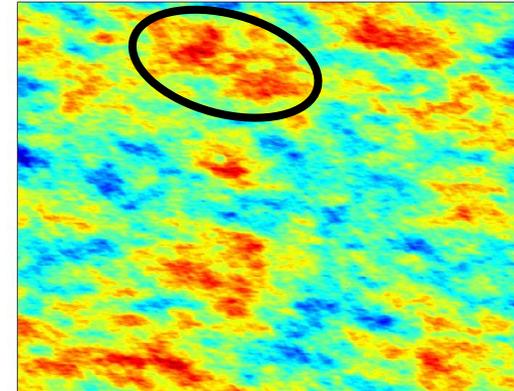
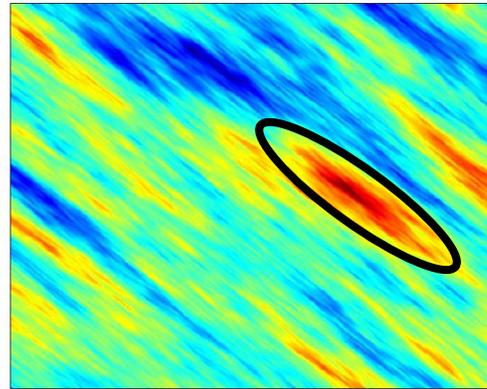
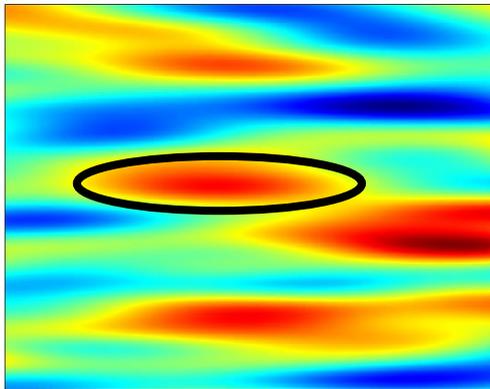
Propriété de la variance

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^n a_i X_i \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j)$$

5.4 Anisotropies

Anisotropies géométriques :

Il n'est pas rare que la continuité spatiale présente des directions préférentielles. Le contexte de formation des zones minéralisées favorise une direction au détriment d'une autre (veines, intrusions, sédimentations ...).



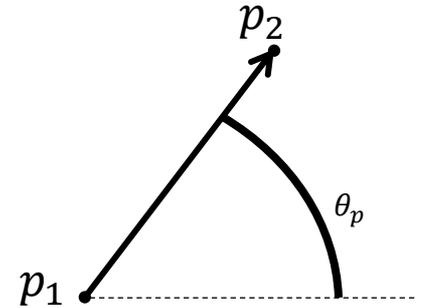
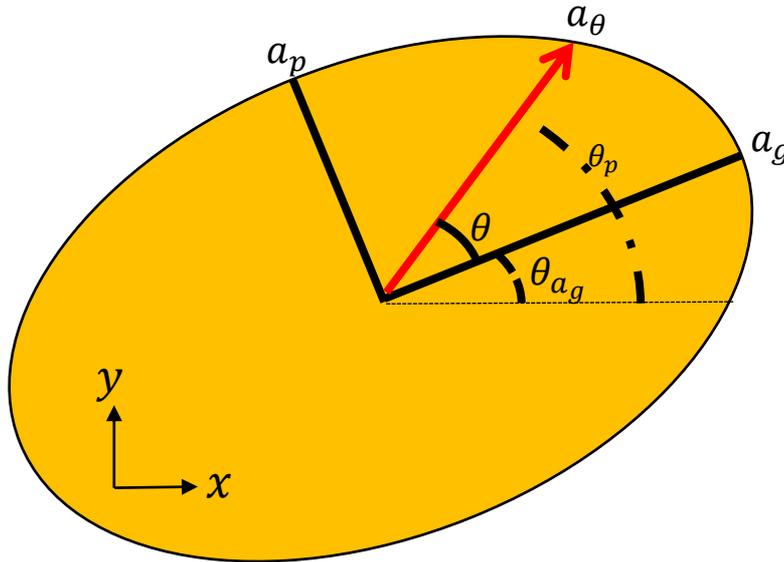
On utilise généralement un ellipsoïde pour caractériser l'anisotropie

5.4 Anisotropies

Anisotropies géométriques

On définit la portée dans une direction $\overrightarrow{p_1 p_2}$ par :

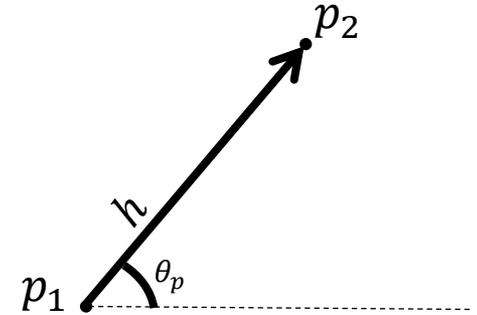
$$a_\theta = \frac{a_g a_p}{\sqrt{a_p^2 \cos^2 \theta + a_g^2 \sin^2 \theta}}$$



5.4 Anisotropies

Anisotropies géométriques : calcul du variogramme pour deux points

1) déterminer la distance (h) et l'angle (θ_p) formé par les points p_1 et p_2 ;

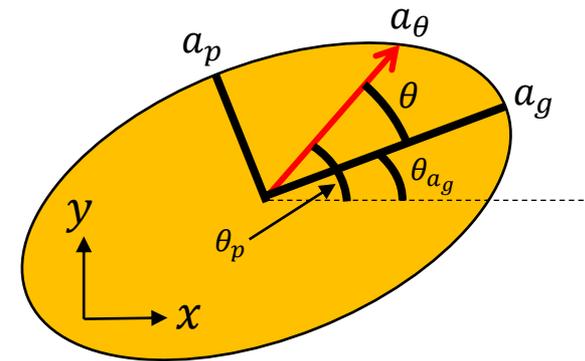


2) Calculer θ soit l'angle formé entre a_g et le vecteur constitué des points p_1 et p_2 ;

3) Calculer a_θ soit la portée effective dans la direction du vecteur formé par p_1 et p_2 ;

$$a_\theta = \frac{a_g a_p}{\sqrt{a_p^2 \cos^2 \theta + a_g^2 \sin^2 \theta}}$$

4) Calculer le variogramme $\gamma(h, a_\theta)$ avec la portée a_θ et la distance h .



5.3 Modèles de variogrammes admissibles

Exercice en équipe :

3) Calcul lié à la présence d'une anisotropie géométrique



5.4 Anisotropies

1- Géométrique : les portées décrivent une ellipse
$$a_{\theta} = \frac{a_g a_p}{\sqrt{a_p^2 \cos^2 \theta + a_g^2 \sin^2 \theta}}$$

Exemple :

Soit un gisement 2D modélisé par un modèle avec anisotropie géométrique. Le modèle est sphérique ($C=17\%^2$) avec effet de pépite ($C_0 = 13\%^2$), portée de 100m dans la direction de grande continuité (30°) et 60m dans la direction de petite continuité (120°). Quelle est la valeur du variogramme entre deux observations situées aux coordonnées $(x_1, y_1)=(10,30)$ et $(x_2, y_2)=(40,20)$

Réponse :
 $23.63\%^2$



5.4 Anisotropies

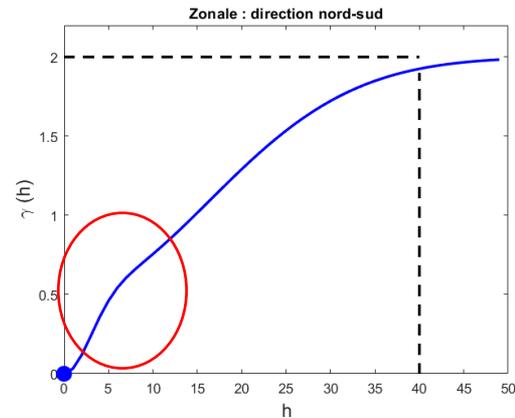
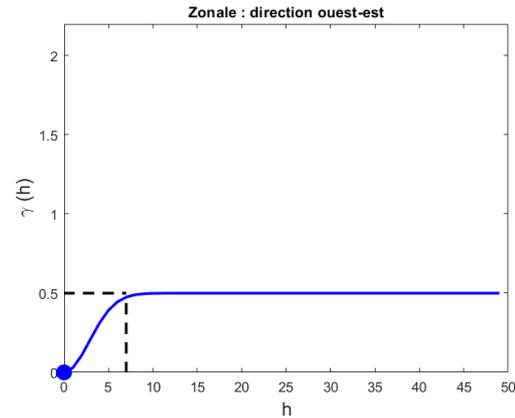
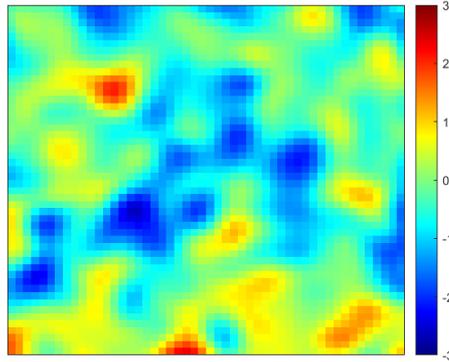
2- Zonale : toute anisotropie qui n'est pas géométrique

→ somme de composantes isotropes et avec anisotropies géométriques

Modèle gaussien isotrope de portée effective $a = 7$

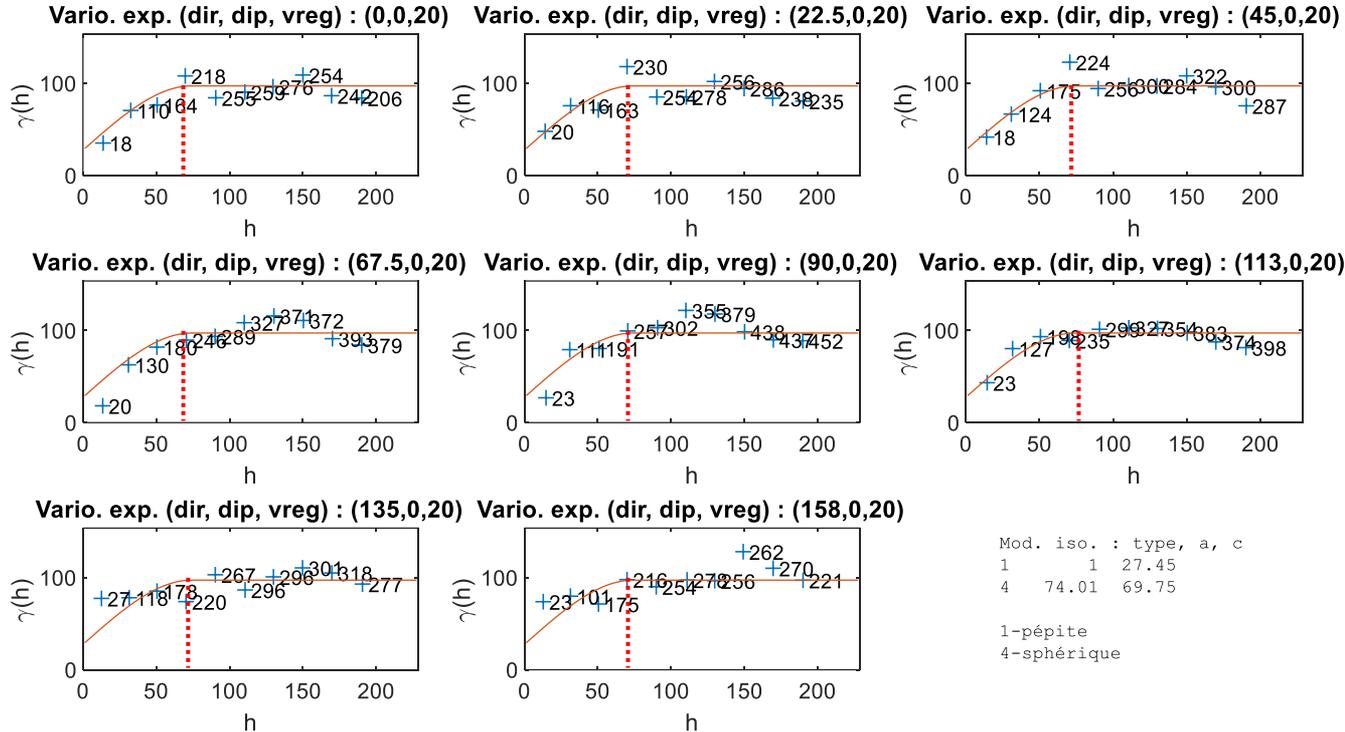
+

Modèle gaussien anisotrope de portée effective $a_p = 40$ et $a_g = \infty$



5.4 Anisotropies

Exemple 1: ajustement d'un variogramme expérimental

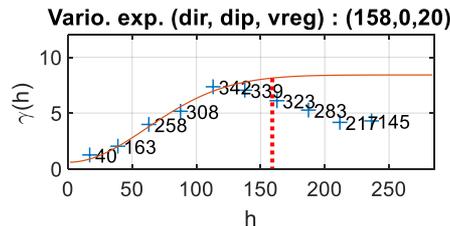
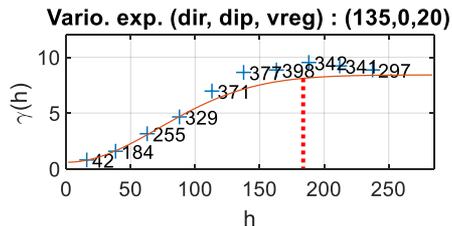
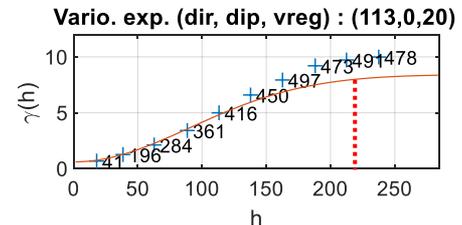
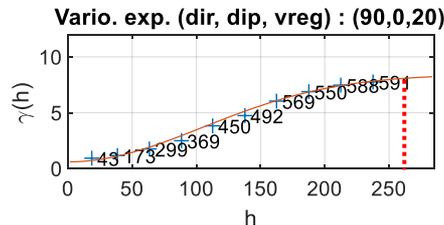
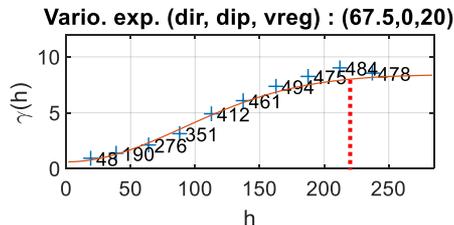
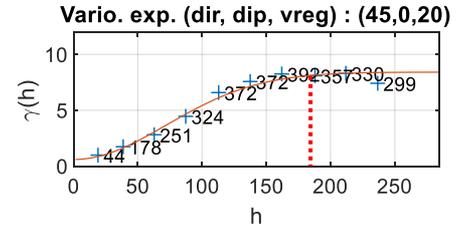
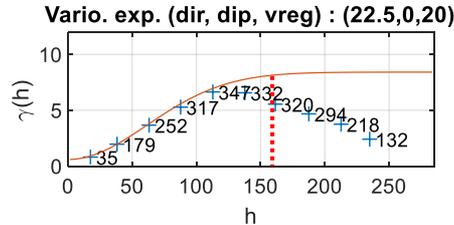
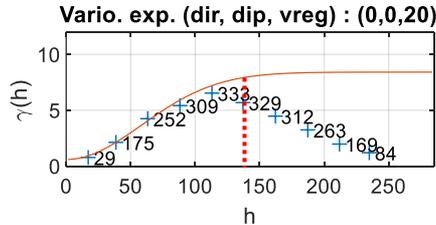


Modèle effet de pépite ($C_0 = 27.45 \%m^2$) et modèle sphérique isotrope ($C = 69.75 \%m^2, a = 74.01$)



5.4 Anisotropies

Exemple 2: ajustement d'un variogramme expérimental



```
Mod. aniso. 2D : type, ax ay, rot (trigo), c
1      1      1  1  0.5959
3  147.9  82.62  0  7.821

1-pépite
3-gaussien
```

Modèle effet de pépite ($C_0=0.6 \text{ m}^2$) et modèle gaussien avec anisotropie géométrique ($C = 7.8 \text{ m}^2, a_g = a_{90} = 256.2 \text{ m}, a_p = a_0 = 143.1 \text{ m}$)



5.3 Modèles de variogrammes admissibles

Exercice en équipe :

- 4) Identification visuelle des modèles de variogramme théorique
- 5) Identification d'un modèle théorique grâce aux indications d'un géologue
- 6) Ajustement d'un modèle théorique à des variogrammes expérimentaux



5.5 Problèmes et stratégies de modélisation

Problèmes

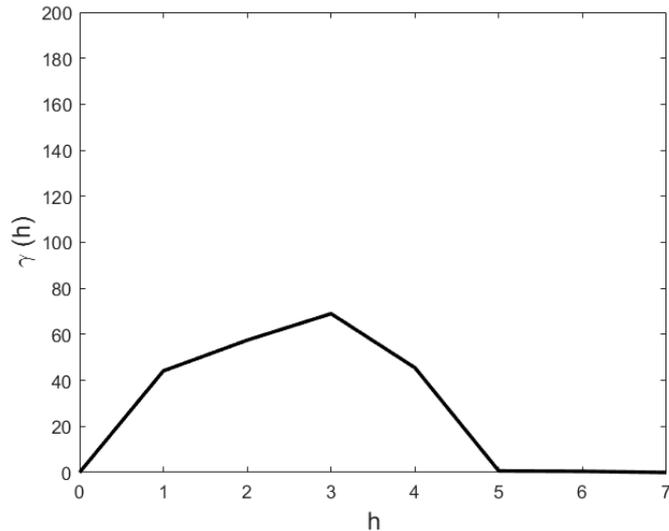
- Présence de données extrêmes
- Différence de variabilité entre deux zones
- Rééchantillonner seulement les teneurs riches
- Erreurs de localisation
- Géologie du gisement
- Détection des anisotropies
- Isotrope versus anisotrope
- Effet de pépite apparent
- Ajustement des directions



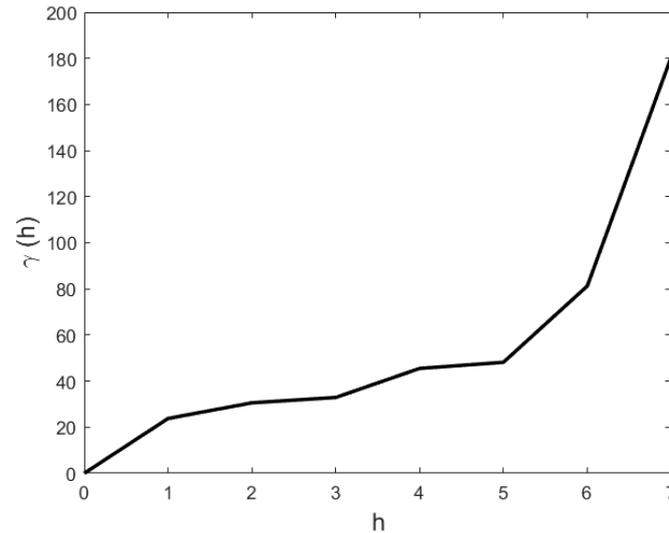
5.5 Problèmes et stratégies de modélisation

Problèmes : présence de données extrêmes

1	2	1	2	20	3	2	1
---	---	---	---	----	---	---	---



20	2	1	2	1	3	2	1
----	---	---	---	---	---	---	---



Solutions possibles :

- Transformer les données pour diminuer l'influence des valeurs extrêmes
- Éliminer la donnée s'il s'agit d'une erreur d'analyse
- Écrêtage (*capping*)

5.5 Problèmes et stratégies de modélisation

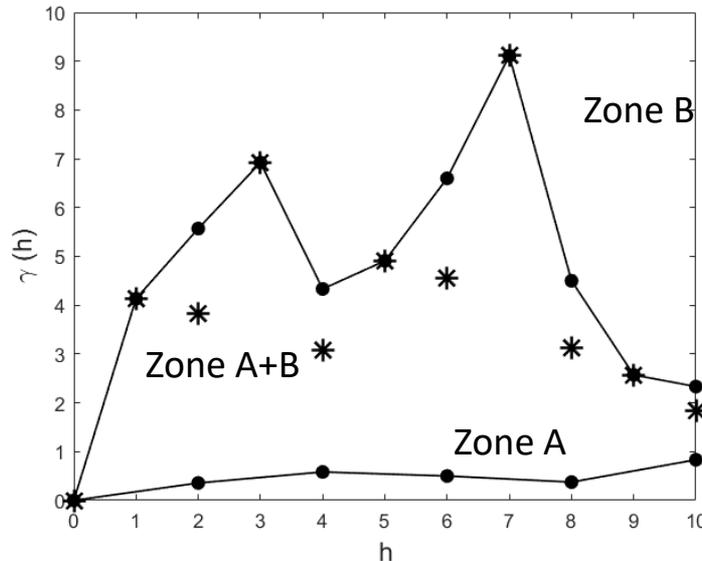
Problèmes : différence de variabilité entre deux zones

Zone A (coordonnées distantes de 2 m)

4	4	5	4	4	5	6	5
---	---	---	---	---	---	---	---

Zone B (coordonnées distantes de 1 m)

8	6	8	10	12	8	10	12	14	10	8	6	12	8	10	10
---	---	---	----	----	---	----	----	----	----	---	---	----	---	----	----



Solutions possibles:

- Séparer en 2 zones si possible, sinon
- Uniformiser l'échantillonnage, i.e. 1 point sur 2 dans la zone B.

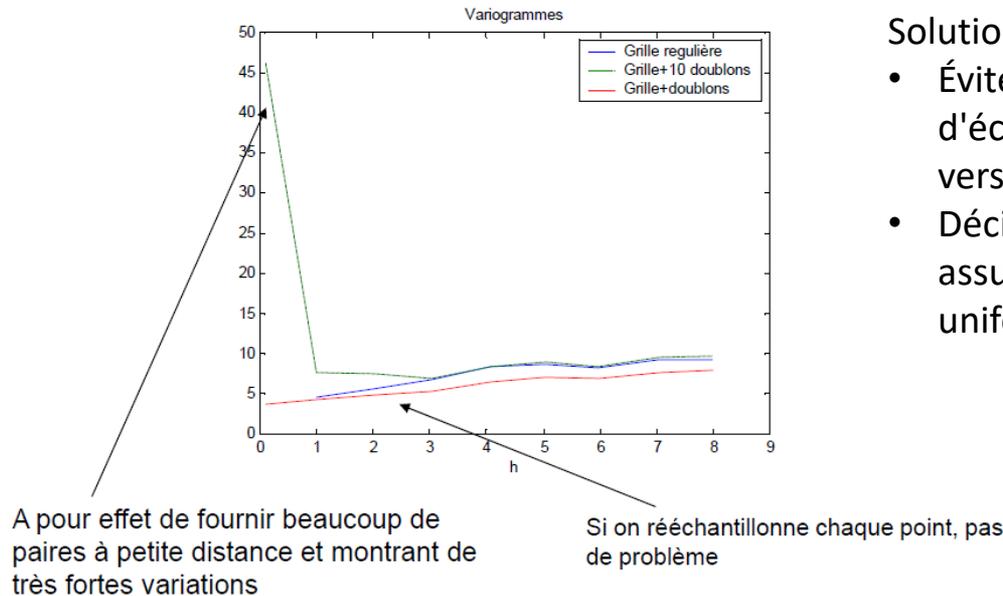


5.5 Problèmes et stratégies de modélisation

Problèmes : rééchantillonner seulement les teneurs riches (doublons)

Très mauvaise idée d'utiliser les données originales et quelques duplicata
→ explosion de l'effet de pépité.

Si on fait des duplicata, soit on en fait partout, soit on les choisit au hasard.



Solutions possibles:

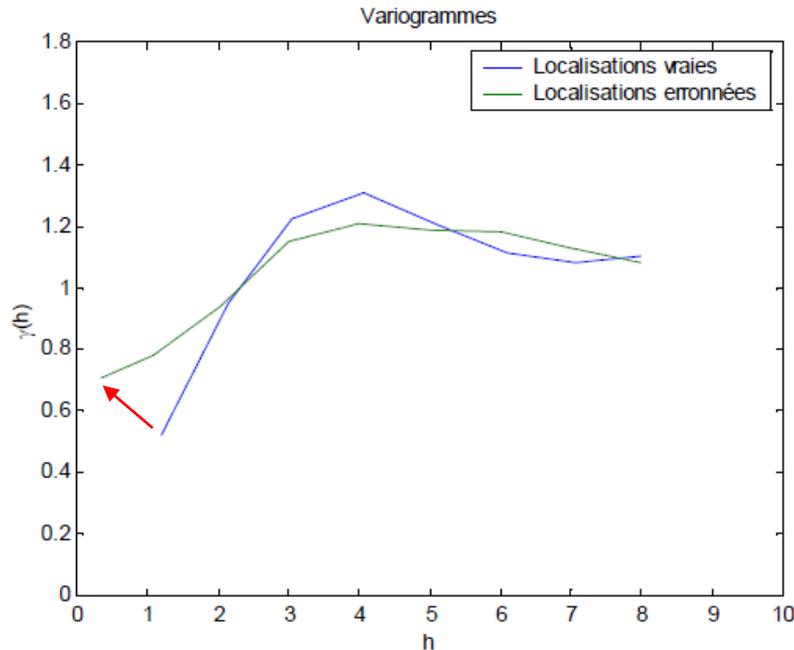
- Éviter les stratégies d'échantillonnage biaisées vers les valeurs fortes
- Décimer l'échantillon pour assurer une couverture uniforme partout

5.5 Problèmes et stratégies de modélisation

Problèmes : erreurs de localisation

Peu induire un effet de pépite non désiré lors de la modélisation

L'arpentage des forages est important pour minimiser cet effet



Solutions possibles:

- Localiser avec soin les données
- Tenir compte des erreurs de localisation lors de l'estimation



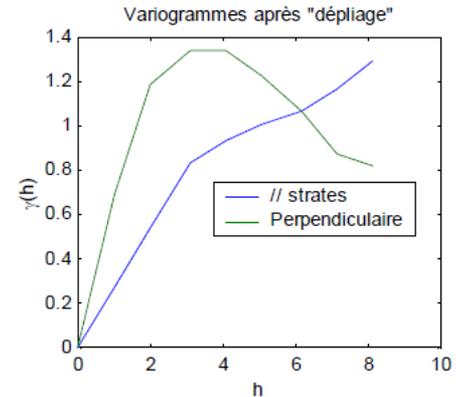
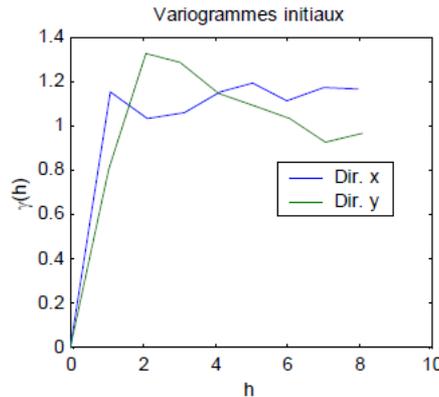
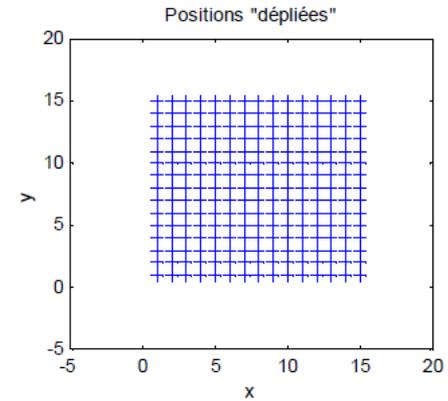
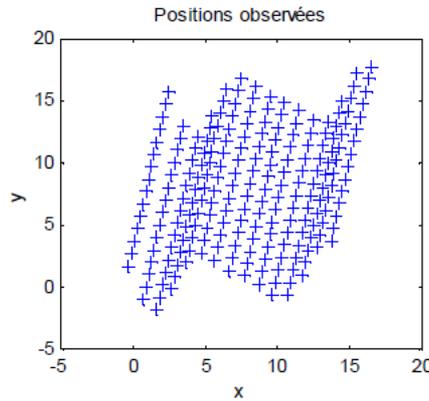
5.5 Problèmes et stratégies de modélisation

Problèmes : géologie du gisement

Souvent les teneurs se mettent en place avant les évènements tectoniques.

Les corrélations spatiales initiales sont déformées dans cet espace déformé.

Dans certains cas **simples**, on peut déplier le tout pour retrouver les corrélations originales.

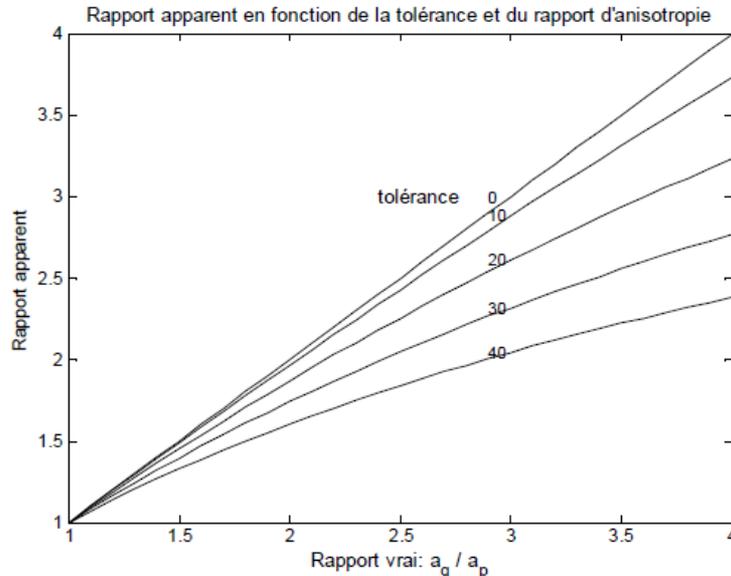


5.5 Problèmes et stratégies de modélisation

Problèmes : détection des anisotropies

- Tolérance maintenue faible : $< 22.5^\circ$, idéalement $0-10^\circ$
- Plus la tolérance augmente et plus :
 - on augmente le nombre de paires de points disponibles
 - les variogrammes deviennent moins directionnels
 - on a une sous-estimation de l'anisotropie

Choix à faire



Solutions possibles:

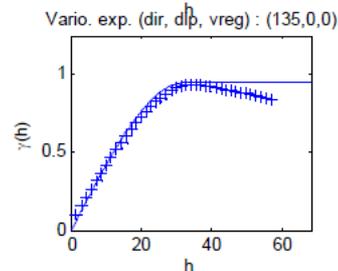
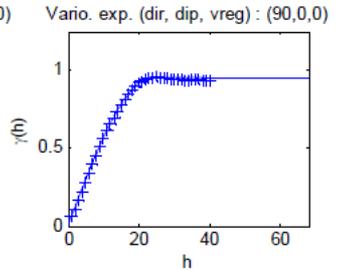
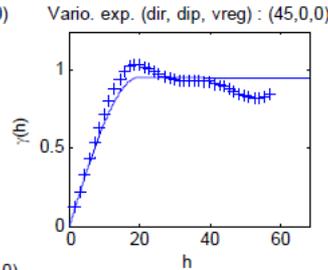
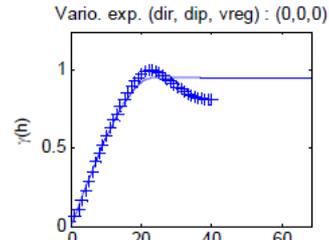
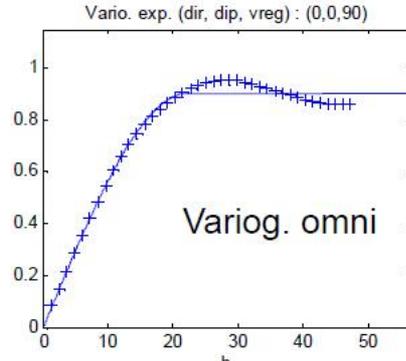
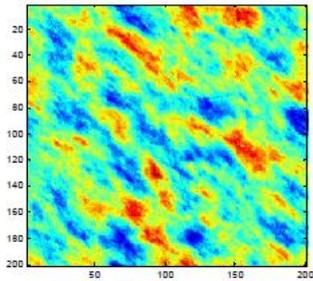
- Discuter avec les spécialistes
Est-ce probable que le gisement présente une anisotropie ?
- Varier la tolérance et observer l'influence sur l'anisotropie



5.5 Problèmes et stratégies de modélisation

Problèmes : isotrope versus anisotrope

Piège : ce n'est pas parce qu'il y a une anisotropie géométrique que le variogramme expérimental omnidirectionnel n'est pas joli

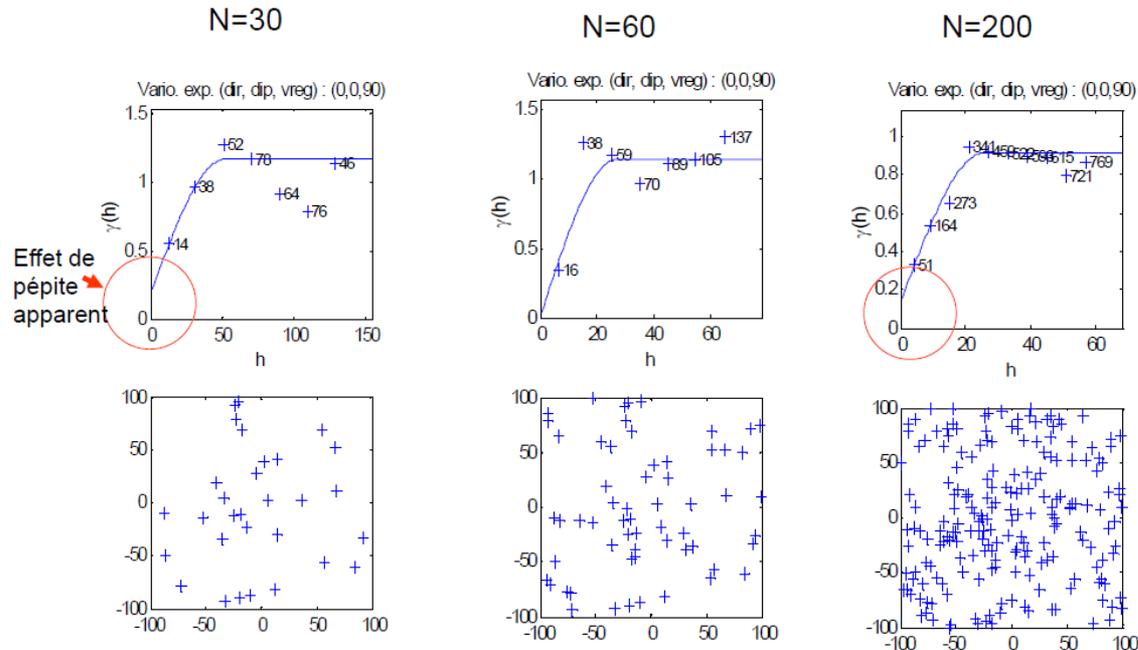


Variog. Directionnels
Modèle sphérique $a_{45}=20$, $a_{135}=35$

5.5 Problèmes et stratégies de modélisation

Problèmes : effet de pépite apparent

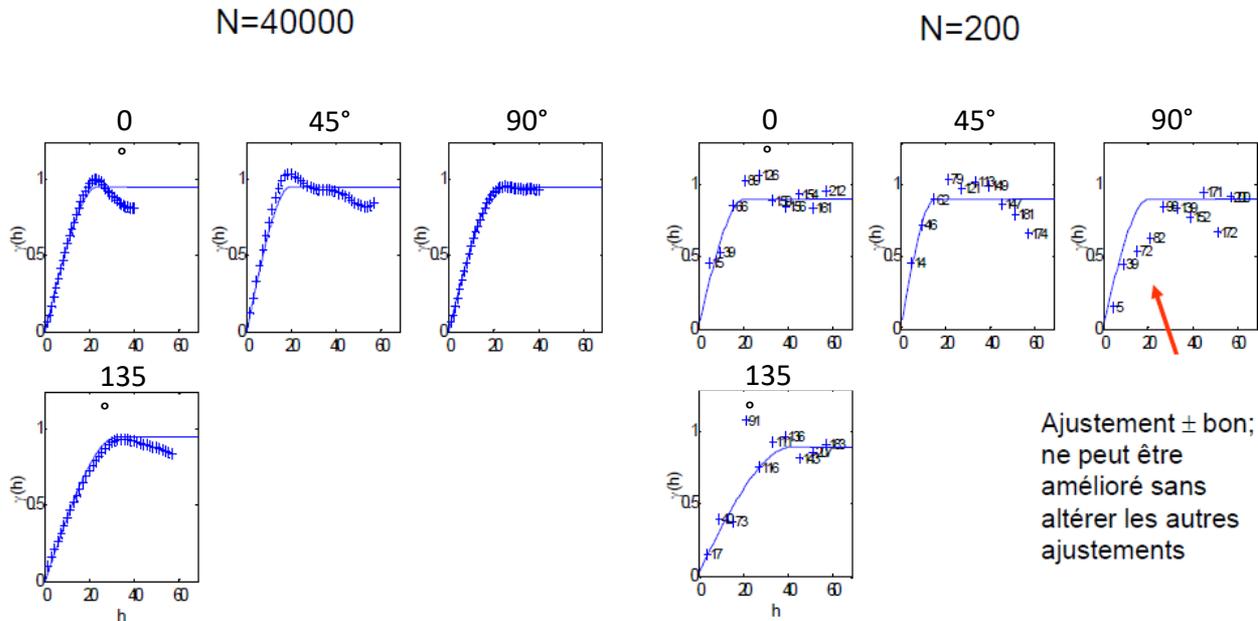
Avec moins de données, parfois on voit un effet de pépite apparent alors qu'en vrai il n'y en a pas.



5.5 Problèmes et stratégies de modélisation

Problèmes : ajustement des directions

Il faut savoir accepter une direction mal ajustée afin d'éviter des comportements encore bien pires ailleurs



Ajustement \pm bon;
ne peut être
amélioré sans
altérer les autres
ajustements



5.5 Problèmes et stratégies de modélisation

Stratégies de modélisation

1. Définition minutieuse du domaine (taille de blocs, frontières, etc.)
2. Examen des données, données extrêmes ?
 - Au besoin sous-échantillonnage des données pour éviter de surreprésenter des zones particulières
3. Déterminer les directions géologiques principales
 - Variogramme omnidirectionnel → modèle isotrope candidat
 - Calculer les variogrammes directionnels (au moins 4 directions) attention aux paramètres de calculs (classes de distance et tolérance)
 - Comparer les variogrammes directionnels au modèle isotrope candidat
 - acceptable → terminé
 - Inacceptable → ajuster un modèle anisotrope (géométrique)
 - anisotrope (géométrique) acceptable → terminé
 - Inacceptable → anisotropie zonale ?

Dans tous les cas, il importe surtout d'ajuster les premiers points du variogramme. Éviter de «surajuster» les données à grande distance.

5.5 Problèmes et stratégies de modélisation

Stratégies de modélisation : remarques concernant le calcul des variogrammes

- Au **minimum 30 paires de points** pour la plupart des classes du variogramme
- Au moins **4 à 6 points avant le palier** afin d'ajuster le modèle
- Limiter les distances **d'ajustement à de petit h** (i.e $h < \frac{h_{max}}{2}$)
 - Éviter les effets de bord
 - Assurer la présence de données impliquant le centre du phénomène
 - Le comportement géologique aux bordures peut différer de celui du centre
- Avoir **un minimum de données observées** sur le terrain
 - >30 pour un variogramme omnidirectionnel
 - >60 pour les variogrammes directionnels



5.5 Problèmes et stratégies de modélisation

Variogramme expérimental : 3D

Meilleures directions pour le calcul → **directions des forages**

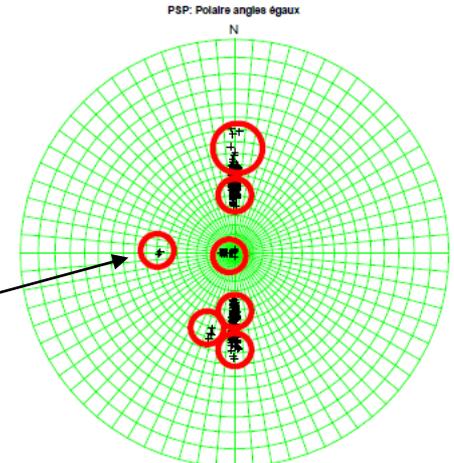
- Permet de bien estimer le variogramme à petite distance
- Erreurs de localisation et de direction ont moins d'impacts sur le variogramme, car les distances intercarottes demeurent inchangées

Problématique:

- Nécessite des forages ayant différentes directions pour pouvoir modéliser l'anisotropie

Utile de représenter les mesures de direction des forages sur un stéréonet

 Direction de calcul et tolérance angulaire



5.5 Problèmes et stratégies de modélisation

Autres outils utiles

- Variogramme des **log(teneurs)** pour identifier les anisotropies possibles, la (les) portée, l'importance approximative de l'effet de pépite;
- Variogramme d'une **transformation des teneurs** (e.g., rang), même chose que les log;
- **Validation croisée** de modèles candidats (krigeage); p. ex. Tester un modèle isotrope vs anisotrope; tester un effet de pépite de 10% vs 30%;...
- Modèle permettant de prédire les **variances des composites de tailles différentes** ?
- Modèle permettant de prédire les **variances des valeurs krigées** ?

