MTH8207 – Mathématiques des éléments finis

Serge Prudhomme

Professeur
Département de mathématiques
Polytechnique Montréal

Cours 5

Sommaire du cours #5

- Exemple de problème fort en 2D/3D.
- Formulation faible du problème.
- Méthode de Galerkine.
- Espaces éléments finis (cas des éléments simplexes linéaires de Lagrange).
- Assemblage.
- Transformation T_e de l'élément de référence vers les éléments du maillage.
- Calcul des intégrales.
- Quelques éléments finis en 2D :
  - Éléments finis simplexes de Lagrange (P1,P2).
  - Élément fini de Crouzeix-Raviart.
  - Éléments finis tensoriels/quadrangulaires de Lagrange (Q1,Q2).
  - Éléments finis tensoriels/quadrangulaires hiérarchiques.

Opérateur Nabla (∇) et Δ

Définition de l'opérateur ∇ :

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}$$

Soit u une fonction scalaire :

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \\ \partial_z u \end{bmatrix} = \text{grad } u$$

Soit ϕ une fonction vectorielle ($\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$) :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \partial_x \phi_1 + \partial_y \phi_2 + \partial_z \phi_3 = \text{div } \boldsymbol{\phi}$$

Définition du Laplacien Δ :

$$\nabla \cdot \nabla u = \text{div (grad } u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$$

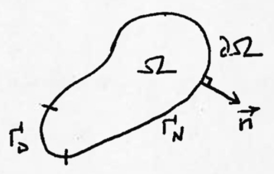
Problème fort en 2D/3D

Problème fort :

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, de frontière $\partial\Omega = \overline{\Gamma_d \cup \Gamma_n}$.
On cherche $u = u(x) \in C^2(\Omega)$ telle que :

$$\boxed{\begin{aligned} -\nabla \cdot (k\nabla u) + \alpha \cdot \nabla u + cu = f, &\quad \forall x \in \Omega \\ u = u_d, &\quad \forall x \in \Gamma_D \\ n \cdot (k\nabla u) + \beta u = g, &\quad \forall x \in \Gamma_N \end{aligned}}$$

$k = k(x)$: fonction tensorielle d'ordre 2 (matrice)
$\alpha = \alpha(x)$: fonction vectorielle définie sur Ω
$c = c(x)$, $f = f(x)$: fonctions scalaires sur Ω
$u_d = u_d(x)$: fonction scalaire définie sur Γ_d
$\beta = \beta(x)$, $g = g(x)$: fonctions scalaires sur Γ_n
$n = n(x)$: vecteur normal à $\partial\Omega$



Problème fort en 2D/3D

Terme “diffusif” en 2D ($\nabla \cdot (k\nabla u)$) :

$$k\nabla u = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}u_x + k_{12}u_y \\ k_{21}u_x + k_{22}u_y \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\nabla \cdot (k\nabla u) = (k_{11}u_x + k_{12}u_y)_x + (k_{21}u_x + k_{22}u_y)_y}$$

Cas isotrope ($k_{11} = k_{22} = k = k(x, y)$ et $k_{12} = k_{21} = 0$) :

$$k\nabla u = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_x \\ ku_y \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\nabla \cdot (k\nabla u) = (ku_x)_x + (ku_y)_y}$$

Note : Si $k = constante$, $\nabla \cdot (k\nabla u) = k\nabla \cdot \nabla u = k\Delta u$.

Terme convectif en 2D ($\alpha \cdot \nabla u$) :

$$\alpha \cdot \nabla u = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \alpha_1 u_x + \alpha_2 u_y$$

Formulation faible

$$\boxed{\text{Trouver } u \in U \text{ telle que : } \quad B(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V}$$

1) On multiplie l'équation par une fonction v arbitraire suffisamment lisse et on intègre sur Ω :

$$\int_\Omega -\big[\nabla \cdot (k\nabla u)\big] v + \big[\alpha \cdot \nabla u\big] v + cuv \, dx = \int_\Omega fv \, dx$$

2) On fait une “intégration par partie” du premier terme dans l'intégrale. Soit ϕ une fonction vectorielle et v une fonction scalaire :

$$\nabla \cdot (\phi v) = (\nabla \cdot \phi) v + \phi \cdot \nabla v$$
$$\Rightarrow -(\nabla \cdot \phi) v = -\nabla \cdot (\phi v) + \phi \cdot \nabla v$$

En prenant $\phi = k\nabla u$,

$$-\big[\nabla \cdot (k\nabla u)\big] v = k\nabla u \cdot \nabla v - \nabla \cdot \big[(k\nabla u) v\big]$$

Formulation faible

Et donc :

$$\int_\Omega -\left[\nabla \cdot (k\nabla u)\right] v \, dx = \int_\Omega k\nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega \nabla \cdot \left[(k\nabla u) v\right] dx$$

3) On utilise le théorème de la divergence :

$$\int_\Omega \nabla \cdot \left[(k\nabla u) v\right] dx = \int_{\partial\Omega} n \cdot \left[(k\nabla u) v\right] ds$$

Et on obtient :

$$\boxed{\int_\Omega k\nabla u \cdot \nabla v + \left[\alpha \cdot \nabla u\right] v + cuv \, dx - \int_{\partial\Omega} n \cdot \left[(k\nabla u) v\right] ds = \int_\Omega fv \, dx}$$

Formulation faible

4) On applique les conditions aux limites :

$$\int_{\partial\Omega} n\cdot(k\nabla u)v\,ds = \underbrace{\int_{\Gamma_D} n\cdot(k\nabla u)v\,ds}_{\text{On choisit } v=0 \text{ sur } \Gamma_D} + \underbrace{\int_{\Gamma_N} n\cdot(k\nabla u)v\,ds}_{\text{On applique condition de Robin}}$$

$$= \int_{\Gamma_N} (-\beta u + g)v\,ds$$

$$= -\int_{\Gamma_N} \beta uv\,ds + \int_{\Gamma_N} gv\,ds$$

On a alors, pour v telle que $v(x) = 0$, $\forall x \in \Gamma_D$:

$$\boxed{\underbrace{\int_{\Omega} k\nabla u\cdot\nabla v + \left[\alpha\cdot\nabla u\right]v + cuv\,dx + \int_{\Gamma_N} \beta uv\,ds}_{B(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} fv\,dx + \int_{\Gamma_N} gv\,ds}_{F(v)}}$$

Formulation faible

5) Choix des espaces de fonctions U et V :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ i = 1, \ldots, d \right\}$$
$$= \left\{ u \in L^2(\Omega);\ \nabla u \in \left[L^2(\Omega) \right]^d \right\}$$

puisque

$$\nabla u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i} \vec{e}_i \quad \left[\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_2 = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{\jmath}, \quad \text{en } 2D \right]$$

Produit scalaire et norme dans $H^1(\Omega)$:

$$(u, v)_{H^1} = \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{(u, u)_{H^1}} = \sqrt{\int_\Omega u^2 + |\nabla u|^2 \, dx}$$

Formulation faible

On peut définir les espaces :

$$U = \{u \in H^1(\Omega);\; u = u_D,\; \forall x \in \Gamma_D\}$$
$$V = \{v \in H^1(\Omega);\; v = 0,\; \forall x \in \Gamma_D\}$$

$$\boxed{\text{Trouver } u \in U \text{ telle que : } \quad B(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V}$$

6) Fonction de relèvement :

On choisit $\bar{u} \in H^1(\Omega)$ telle que $\bar{u} = u_D, \forall x \in \Gamma_D$.
Donc $w = u - \bar{u} \in H^1(\Omega)$ et $w = 0$ sur Γ_D, soit $w \in V$.
On remplace u par $w + \bar{u}$ dans la formulation faible:

$$\boxed{\text{Trouver } w \in V \text{ telle que : } \quad B(w,v) = L(v), \quad \forall v \in V}$$

avec $L(v) = F(v) - B(\bar{u}, v)$.

Méthode de Galerkine

On suppose que $u_D = 0$:

$$\boxed{\text{Trouver } u \in V \text{ telle que : } \quad B(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V}$$

On construit un espace vectoriel V^h de dimension finie, $\dim V^h = N$, tel que $V^h = \text{vect}\{\phi_j\}$. Si pour tout $j = 1, \ldots, N$, $\phi_j \in H^1(\Omega)$ et $\phi_j(x) = 0$, $\forall x \in \Gamma_D$, alors $V^h \subset V$. Par Galerkine, le problème devient :

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Trouver } u_h \in V^h \text{ t.q.} & B(u_h, v_h) = F(v_h), & \forall v_h \in V^h \\ \text{Trouver } u_h \in V^h \text{ t.q.} & B(u_h, \phi_i) = F(\phi_i), & i = 1, \ldots, N \end{array}}$$

Avec $u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x)$, on veut :

$$\boxed{\text{Trouver } u_j \in \mathbb{R},\, j = 1, \ldots, N, \text{ t.q.} \quad \sum_{j=1}^N \underbrace{B(\phi_j, \phi_i)}_{K_{ij}} \underbrace{u_j}_{U_j} = \underbrace{F(\phi_i)}_{F_i}, \quad i = 1, \ldots, N}$$

$$\boxed{KU = F}$$

Maillage

$\Omega_h = \cup K_e \neq \overline{\Omega}$

N_v = nombre de points

N_e = nombre d'éléments

$xcoord(ni, d), \quad ni = 1, \ldots, N_v$

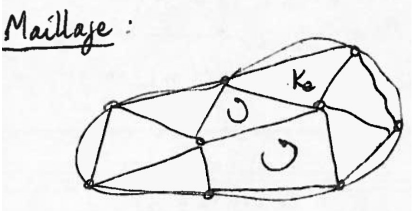
$type(e)$

$connect(e, i), \quad e = 1, \ldots, N_e$

$h_K = diam(K) = \max\limits_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in K} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$

$h = \max\limits_{K} h_K$

$+$ conditions aux limites



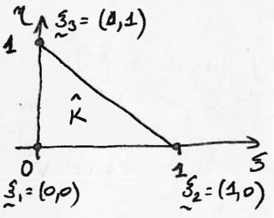
Les points d'un élément K_e sont numérotés par convention dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Élément simplexe linéaire de Lagrange $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$

- Simplexe :
  Plus simple objet convexe en dimension d défini par $d+1$ points.
  En 2D: $d=2$, donc 3 points, un simplexe est un triangle.
  En 3D: $d=3$, donc 4 points, un simplexe est un tétrahèdre.

Élément $\widehat{K}$ de référence en 2D :

$$\widehat{K} = \{\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2;\ \xi \geq 0,\ \eta \geq 0,\ \xi + \eta \leq 1\}$$



- Linéaire : degré des polynômes = 1

$$\widehat{P} = \mathbb{P}_1(\widehat{K}) = \{p(\boldsymbol{\xi}) = a + b\xi + c\eta;\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\dim \widehat{P} = 3$$

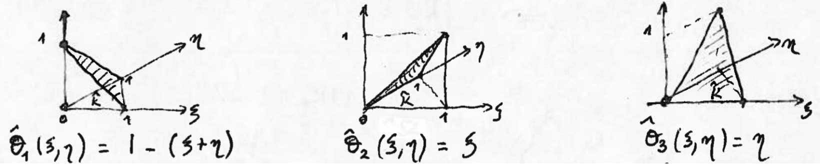
Élément simplexe linéaire de Lagrange $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$

- Lagrange : fait référence au choix des degrés de liberté.

$$\widehat{\Sigma} = \{\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3\}, \quad \text{t.q. pour } p \in \widehat{P}, \quad \hat{\sigma}_i(p) = p(\boldsymbol{\xi}_i), \quad i = 1, 2, 3$$

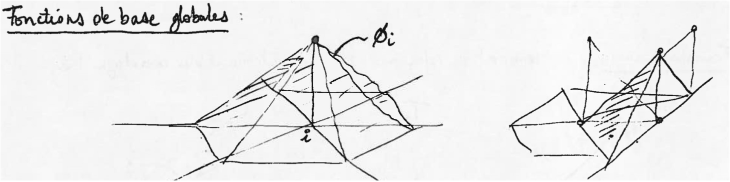
Les points $\boldsymbol{\xi}_i$, $i = 1, 2, 3$, sont appelés les noeuds.
Les fonctions de forme sont les fonctions $\hat{\theta}_j(\boldsymbol{\xi}) = a_j + b_j\xi + c_j\eta$ t.q. :

$$\boxed{\hat{\sigma}_i(\hat{\theta}_j) = \delta_{ij}}$$



$$\boxed{\forall p \in \widehat{P} = \mathbb{P}_1(\widehat{K}), \qquad p(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{3} \hat{\sigma}_j(p)\hat{\theta}_j(\boldsymbol{\xi})}$$

Fonctions de base globales



Soient $\boldsymbol{x}_i$ les points du maillage, les fonctions de base globale satisfont la relation :

$$\boxed{\phi_j(\boldsymbol{x}_i) = \delta_{ij}}$$

Cela signifie que $\sigma_i(\phi_j) = \phi_j(\boldsymbol{x}_i)$, soit $\sigma_i(u_h) = u_h(\boldsymbol{x}_i) = u_i$. On a donc :

$$\boxed{u_h(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{N} \sigma_j(u_h)\phi_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{N} u_j\phi_j(\boldsymbol{x})}$$

Assemblage des matrices et vecteurs

Équation simplifiée :

$$\boxed{\text{Trouver } u \in V \text{ t.q.} \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + cuv\,dx = \int_\Omega fv\,dx + \int_{\Gamma_N} gv\,ds, \quad \forall v \in V}$$

où $V = \{v \in H^1(\Omega);\ v(x) = 0,\ \forall x \in \Gamma_D\}$.

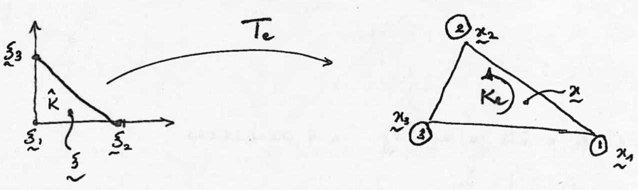
Construction élément par élément :

$$\left.\begin{aligned} B^e_{kl} &= \int_{K_e} \nabla\theta_l \cdot \nabla\theta_k + c\theta_l\theta_k\,dx \\ F^e_k &= \int_{K_e} f\theta_k\,dx + \int_{\partial K_e \cap \Gamma_N} g\theta_k\,ds \end{aligned}\right\} \quad k, l = 1, 2, 3$$

On note :

$$\nabla\theta_l \cdot \nabla\theta_k = \frac{\partial\theta_l}{\partial x}\frac{\partial\theta_k}{\partial x} + \frac{\partial\theta_l}{\partial y}\frac{\partial\theta_k}{\partial y}$$

Transformation T_e



$$\boldsymbol{x} = T_e(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{x}_i \hat{\theta}_i(\boldsymbol{\xi})$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} (1 - \xi - \eta) + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \eta = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{bmatrix} \eta$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

Transformation T_e

Matrice Jacobienne de T_e :

$$J = \frac{\partial T_e}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial \xi & \partial x/\partial \eta \\ \partial y/\partial \xi & \partial y/\partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}$$

Jacobien de T_e :

$$|J| = \det J = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \geq 0$$

Le Jacobien de T_e mesure le ratio d'un volume dans l'espace (x, y) et du volume correspondant par T_e dans l'espace (ξ, η).

On a donc :

$$\boxed{dxdy = |J| d\xi d\eta}$$

ou simplement :

$$\boxed{dx = |J| d\xi}$$

Dérivées

$$\hat{\theta}_k(\boldsymbol{\xi}) = \theta_k(T_e(\boldsymbol{\xi}))$$

Dérivation en chaîne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \xi} &= \frac{\partial \theta_k}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta_k}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \eta} &= \frac{\partial \theta_k}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta_k}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \theta_k}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \theta_k}{\partial y} \end{bmatrix} = J^T \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \theta_k}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \theta_k}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \theta_k}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \theta_k}{\partial y} \end{bmatrix} = (J^T)^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Matrice de passage

La matrice de passage permet d'obtenir les dérivées des fonctions de forme définies sur un élément physique à partir des dérivées des fonctions de forme définies sur l'élément de référence :

$$(J^T)^{-1} = (J^{-1})^T = \frac{1}{|J|}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & -\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_k}{\partial x} &= \frac{1}{|J|}\left(+ \frac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) \\ \frac{\partial \theta_k}{\partial y} &= \frac{1}{|J|}\left(- \frac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{\theta}_k}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) \end{aligned}$$

Calcul des intégrales

- $$\int_{K_e} \nabla\theta_l \cdot \nabla\theta_k + c(\boldsymbol{x})\,\theta_l(\boldsymbol{x})\,\theta_k(\boldsymbol{x})\,dx$$
$$= \int_{\widehat{K}} \frac{1}{|J|^2}\left(+\frac{\partial\hat{\theta}_l}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial\hat{\theta}_l}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\left(+\frac{\partial\hat{\theta}_k}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial\hat{\theta}_k}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)|J|\,d\xi$$
$$+ \int_{\widehat{K}} \frac{1}{|J|^2}\left(-\frac{\partial\hat{\theta}_l}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{\partial\hat{\theta}_l}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)\left(-\frac{\partial\hat{\theta}_k}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{\partial\hat{\theta}_k}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)|J|\,d\xi$$
$$+ \int_{\widehat{K}} c(T_e(\boldsymbol{\xi}))\,\hat{\theta}_l(\boldsymbol{\xi})\,\hat{\theta}_k(\boldsymbol{\xi})\,|J|\,d\xi$$

- $$\int_{K_e} f(\boldsymbol{x})\,\theta_k(\boldsymbol{x})\,dx = \int_{\widehat{K}} f(T_e(\boldsymbol{\xi}))\,\hat{\theta}_k(\boldsymbol{\xi})\,|J|\,d\xi$$

Remarques :

- L'intégration sur $\widehat{K}$ se fait par des quadratures de Gauss.
- Les intégrandes de certaines intégrales sont en $1/|J|$ $\Rightarrow$ Il faut $|J| \neq 0$.

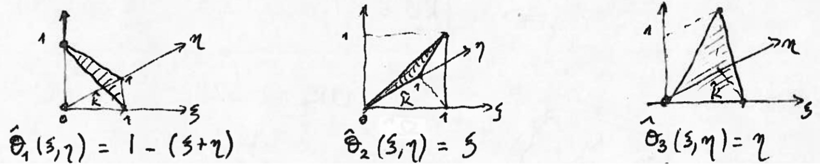
Élément simplexe linéaire de Lagrange $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$

Remarque : Les éléments finis simplexes linéaires sont souvent appelés les éléments P1.

- $\widehat{K}$ = Simplexe (triangle) $= \{\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2;\ \xi \geq 0,\ \eta \geq 0,\ \xi + \eta \leq 1\}$
- $\widehat{P} = \mathbb{P}_1(\widehat{K}) = \{p(\boldsymbol{\xi}) = a + b\xi + c\eta;\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $\dim \widehat{P} = 3$.
- $\widehat{\Sigma} = \{\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3\}$, t.q. pour $p \in \widehat{P}$, $\hat{\sigma}_i(p) = p(\boldsymbol{\xi}_i)$, $i = 1, 2, 3$

Les fonctions de forme sont les fonctions $\hat{\theta}_j(\boldsymbol{\xi}) = a_j + b_j\xi + c_j\eta$ t.q. :

$$\boxed{\hat{\sigma}_i(\hat{\theta}_j) = \delta_{ij}}$$



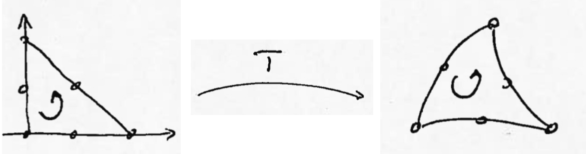
Élément simplexe quadratique de Lagrange $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$

Cas où :

$$\widehat{P} = \mathbb{P}_2(\widehat{K}) = \{p(\xi) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\eta^2 + a_6\xi\eta;\ \forall a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, 6\}$$

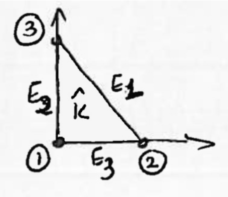
On parle ici d'éléments finis P2.
Puisque $\dim \mathbb{P}_2(\widehat{K}) = 6$, on doit définir 6 degrés de liberté.

Éléments isoparamétriques :
Même vecteur space P pour la représentation de la transformation T_e et celle de la fonction u_h sur chaque élément.



Élément de Crouzeix-Raviart en 2D

- $\widehat{K}$ = simplexe.
- $\widehat{P} = \mathbb{P}_1(\widehat{K})$.
- Degrés de liberté :



Soit $p \in \mathbb{P}_1(\widehat{K})$

$$\boxed{\hat{\sigma}_i(p) = \frac{1}{|E_i|}\int_{E_i} pds = \frac{1}{|E_i|}\int_{E_i} a + b\xi + c\eta\, ds}$$

pour $i = 1, 2, 3$.

1er degré de liberté : Paramétrisation du segment E_1

$(\xi, \eta) = (1 - t, t), \forall t \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad ds = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}dt = \sqrt{2}dt$

$$\hat{\sigma}_1(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 (a + b(1 - t) + ct)\sqrt{2}dt = at - \frac{b}{2}(1 - t)^2 + \frac{c}{2}t\Big|_0^1$$

Élément de Crouzeix-Raviart en 2D

1er degré de liberté :

$$\boxed{\hat{\sigma}_1(p) = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}}$$

2nd degré de liberté :

$$\boxed{\hat{\sigma}_2(p) = \int_0^1 (a + c\eta)\, d\eta = a + \frac{c}{2}}$$

3e degré de liberté :

$$\boxed{\hat{\sigma}_3(p) = \int_0^1 (a + b\xi)\, d\xi = a + \frac{b}{2}}$$

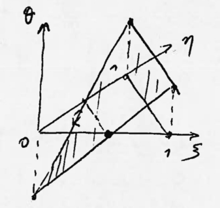
Élément de Crouzeix-Raviart en 2D

On cherche les trois fonctions de forme $\hat{\theta}_j(\xi, \eta)$ telles que $\hat{\sigma}_i(\hat{\theta}_j) = \delta_{ij}$.

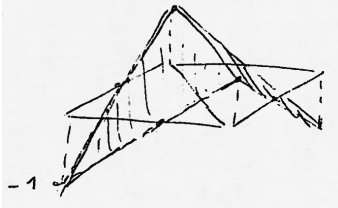
$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La solution du système ci-dessus donne :

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\theta}_1(\xi, \eta) &= 2(\xi + \eta) - 1 \\ \hat{\theta}_2(\xi, \eta) &= 1 - 2\xi \\ \hat{\theta}_3(\xi, \eta) &= 1 - 2\eta \end{aligned}}$$



Fonction de forme $\hat{\theta}_1$



Fonction de base globale

Éléments finis tensoriels de Lagrange

- Élément $\widehat{K}$ de référence en 2D :

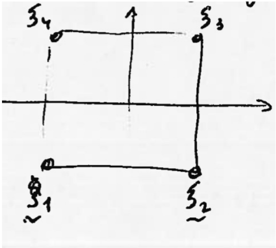
$$\widehat{K} = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

- Espace vectoriel $\widehat{P}$:

$$\widehat{P} = \mathbb{Q}_k(\widehat{K})$$

$$\mathbb{Q}_1(\widehat{K}) = \{(a + b\xi) \times (c + d\eta);\ \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

$$\dim \mathbb{Q}_1(\widehat{K}) = 4$$



- Degrés de liberté :

$$\sigma_i(p) = p(\boldsymbol{\xi}_i)$$

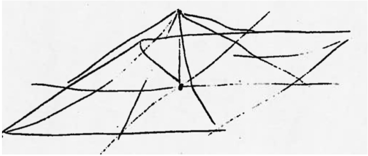
Éléments finis tensoriels de Lagrange

Fonctions de forme :

$$\hat{\theta}_1 = (1-\xi)(1-\eta)/4$$
$$\hat{\theta}_2 = (1+\xi)(1-\eta)/4$$
$$\hat{\theta}_3 = (1+\xi)(1+\eta)/4$$
$$\hat{\theta}_4 = (1-\xi)(1+\eta)/4$$

Les fonctions de forme peuvent être obtenues à partir des fonctions de formes 1D définies sur l'intervalle $[-1, 1]$, e.g. $(1-\xi)/2$ et $(1+\xi)/2$ d'une part, et $(1-\eta)/2$ et $(1+\eta)/2$ d'autre part.

Fonctions de base globales :



Éléments finis tensoriels hiérarchiques

Éléments hiérarchiques :

En 1D, on avait :

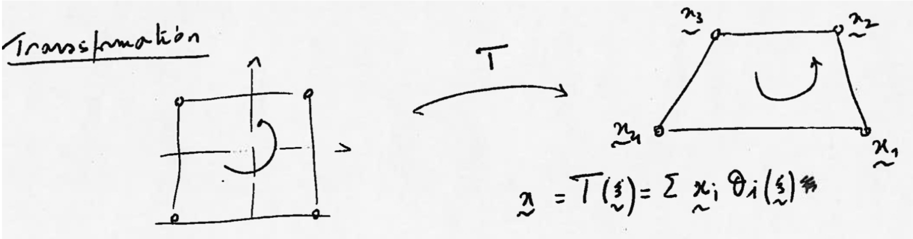
$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_1(\xi) &= (1-\xi)/2 \\
\hat{\theta}_2(\xi) &= (1+\xi)/2 \\
\hat{\theta}_1(\xi) &= (1-\xi^2)
\end{aligned}$$

Par extension, on a en 2D :

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_1 &= (1-\xi)(1-\eta)/4 & \hat{\theta}_5 &= (1-\xi^2)(1-\eta)/2 \\
\hat{\theta}_2 &= (1+\xi)(1-\eta)/4 & \hat{\theta}_6 &= (1+\xi)(1-\eta^2)/2 \\
\hat{\theta}_3 &= (1+\xi)(1+\eta)/4 & \hat{\theta}_7 &= (1-\xi^2)(1+\eta)/2 \\
\hat{\theta}_4 &= (1-\xi)(1+\eta)/4 & \hat{\theta}_8 &= (1-\xi)(1-\eta^2)/2
\end{aligned}$$

$$\hat{\theta}_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

Transformation pour Quads



Remarque :

Les éléments doivent être convexes. Autrement, il existe des points dans l'élément pour lesquels le Jacobien de la transformation T_e s'annule.

Résumé du cours

- La méthode des éléments finis en 2D/3D suit la même approche qu'en 1D mais les calculs sont bien sûr plus complexes.
- On veut éviter d'avoir des éléments triangulaires aplatis pour que $|J|$ ne tende vers zéro.
- Large variété d'éléments finis (K, P, Σ) en 2D, davantage en 3D!
  Voir e.g. la table périodique des éléments finis.