Travaux dirigés MTH1101 - Calcul I
TD n°4
Nathanaël Perrin

Pour le vendredi 01 octobre

Exercices portant sur les séries (Taylor et révisions)

1. Démontrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$ converge (plusieurs techniques peuvent être employées).
2. Déterminer si la série suivante est convergeante ou divergente : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{5+2n}{(n^2+1)^2}$
3. Supposons que $\sum a_n$, série à termes positifs, converge. Dans ce cas, que dire de $\sum \sin(a_n)$?
4. Montrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 2^n}$ converge. Combien de termes est-il alors nécessaire de sommer pour obtenir une précision d'au moins 0.00005 ?
5. Déterminer en fonction de la valeur de p (constante) quelle est la nature de la série suivante :
$$\sum_{n=}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n)^p}$$
6. Déterminer la série de Mclaurin de $f(x) = 2^x$ et donner ensuite son rayon de convergence.
7. Utiliser une série pour évaluer la limite de l'expression suivante :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x) - x - \frac{1}{6}x^3}{x^5}$$
8. Trouver la somme de la série :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$$

Exercices portant sur les nombres complexes

1. Avec la formule d'Euler, donner la forme cartésienne de ces nombres complexes :
   - $e^{1+i\frac{\pi}{4}}$
   - $e^{i\pi}$
   - $e^{2-i\frac{\pi}{2}}$
   - 2^{1-i}
2. Écrire les nombres complexes suivants sous leur forme exponentielle et les transformer sous forme polaire en choisissant l'argument dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$
   - $-3+3i$
   - $1-\sqrt{3}i$
3. Trouver la partie réelle et imaginaire de $z = \frac{3+4i}{7-i}$
4. Calculer i^{1999} (en donner une écriture simplifiée)
5. Calculer le modulo du nombre complexe $z = \frac{5+7i}{7-5i}$
6. Calculer $z = \left[\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right]^{10}$
7. Calculer $(\sqrt{3}-i)^{36}$
8. Calculer les racines $4^{èmes}$ de -16, donner le résultat sous forme cartésienne.
9. Trouver les solutions de l'équation suivante : $(z+1)^{2n+1} - 2 = 0$.
10. Donner les solutions de l'équation suivante : $|z-1| = |2z-1|$
11. Avec la formule de Moivre, montrer que $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ et que $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$