

# MTH8207 – Mathématiques des éléments finis

**Serge Prudhomme**

Professeur  
Département de mathématiques  
Polytechnique Montréal

Cours 4

# Sommaire du cours #4

- Définition d'un élément fini en 1D
- Exemples d'éléments finis en 1D
- Construction des fonctions de base globales
- Matrices de connectivité
- Assemblage de la matrice de rigidité et du vecteur chargement.
- Application des conditions de Dirichlet.

## Définition d'un élément fini

**Définition:** Un élément fini est un triplet  $\{K, P, \Sigma\}$  tel que :

- 1/  $K$  est un intervalle (en 1D) fermé non vide de  $\mathbb{R}$ .  
Par exemple,  $\widehat{K} = [-1, +1]$ ,  $K_e = [x_{i-1}, x_i]$ , etc.
- 2/  $P$  est un espace vectoriel de fonctions polynomiales  $p : K \rightarrow \mathbb{R}$  de dimension finie  $n$ . Par exemple,  $P = \mathbb{P}_1(K)$ ,  $n = \dim \mathbb{P}_1(K) = 2$ .
- 3/  $\Sigma$  est un ensemble de  $n$  formes linéaires (appelées degrés de liberté)  $\sigma_i : P \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $p \rightarrow (\sigma_1(p), \sigma_2(p), \dots, \sigma_n(p))$  soit bijective.

**Définition:** Les fonctions de forme,  $\theta_j : P \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, n$  sont les fonctions de base de  $P$  associées à  $\Sigma$ , i.e.

$$\sigma_i(\theta_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$\forall p \in P, \quad p(x) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(p) \theta_i(x)$$

# Exemple : Élément fini linéaire de Lagrange

1/  $K = [-1, +1]$

2/  $P = \mathbb{P}_1(K)$ ,  $n = \dim \mathbb{P}_1(K) = 2$

3/ Soient  $\xi_1 = -1$  et  $\xi_2 = +1$  les noeuds. Les degrés de liberté sont donnés par  $\sigma_i(p) = p(\xi_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

On cherche les fonctions de forme  $\theta_j \in P$  telles que :

$$\sigma_i(\theta_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2$$

Soit  $\theta_j(\xi) = a_j + b_j\xi$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \sigma_1(\theta_1) = \theta_1(-1) = a_1 - b_1 = 1 \\ \sigma_2(\theta_1) = \theta_1(+1) = a_1 + b_1 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1(\theta_2) = \theta_2(-1) = a_2 - b_2 = 0 \\ \sigma_2(\theta_2) = \theta_2(+1) = a_2 + b_2 = 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Exemple : Élément fini linéaire de Lagrange

On combine les deux systèmes :

$$\begin{bmatrix} +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On résout :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \theta_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1/2 \\ +1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \theta_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2}$$

Les fonctions  $\theta_i$  sont les polynômes de Lagrange de degré 1.

De plus :

$$\begin{aligned} p(\xi) &= \sigma_1(p)\theta_1(\xi) + \sigma_2(p)\theta_2(\xi) \\ &= p(-1)\theta_1(\xi) + p(+1)\theta_2(\xi) \\ &= C_1\theta_1(\xi) + C_2\theta_2(\xi), \quad \forall p \in \mathbb{P}_1(K) \end{aligned}$$

## Exemple : Élément fini quadratique de Lagrange

- 1/  $K = [-1, +1]$
- 2/  $P = \mathbb{P}_2(K)$ ,  $n = \dim \mathbb{P}_2(K) = 3$
- 3/ Soient  $\xi_1 = -1$ ,  $\xi_2 = +1$ , et  $\xi_3 = 0$ , les noeuds. Les degrés de liberté sont donnés par  $\sigma_i(p) = p(\xi_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

On cherche les fonctions de forme  $\theta_j \in P$  telles que :

$$\sigma_i(\theta_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

Soit  $\theta_j(\xi) = a_j + b_j\xi + c_j\xi^2$ . On a donc :

$$\sigma_i(\theta_j) = \theta_j(\xi_i) = a_j + b_j\xi_i + c_j\xi_i^2 = \delta_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 \\ 1 & \xi_3 & \xi_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Exemple : Élément fini quadratique de Lagrange

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

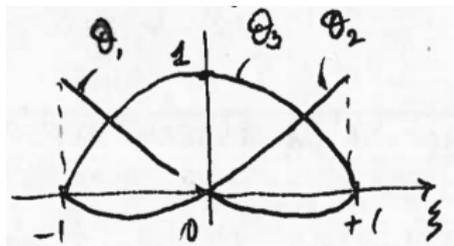
**Remarque :** Le choix des degrés de liberté doit donner une matrice inversible. Ici, c'est le cas à condition que les noeuds soient distincts les uns des autres. La solution du système donne les **polynômes de Lagrange** :

$$\theta_i(\xi) = \prod_{j=1, j \neq i}^3 \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}$$

$$\theta_1(\xi) = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \times \frac{\xi - \xi_3}{\xi_1 - \xi_3} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$$

$$\theta_2(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \times \frac{\xi - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$$

$$\theta_3(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_3 - \xi_1} \times \frac{\xi - \xi_2}{\xi_3 - \xi_2} = 1 - \xi^2$$



## Exemple : Élément fini quadratique hiérarchique

- 1/  $K = [-1, +1]$
- 2/  $P = \mathbb{P}_2(K)$ ,  $n = \dim \mathbb{P}_2(K) = 3$
- 3/ Soient les noeuds  $\xi_1 = -1$  et  $\xi_2 = +1$ . Les degrés de liberté sont donnés par

$$\sigma_1(p) = p(\xi_1)$$

$$\sigma_2(p) = p(\xi_2)$$

$$\sigma_3(p) = -\frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} p''(\xi) d\xi \quad \left( \text{ou } \sigma_3(p) = -\frac{1}{2} p''(0) \right)$$

Soit  $\theta_j(\xi) = a_j + b_j \xi + c_j \xi^2$ , on a :

$$\sigma_i(\theta_j) = a_j \sigma_i(1) + b_j \sigma_i(\xi) + c_j \sigma_i(\xi^2) = \delta_{ij}$$

Donc :

$$\sigma_1(\theta_j) = a_j - b_j + c_j$$

$$\sigma_2(\theta_j) = a_j + b_j + c_j$$

$$\sigma_3(\theta_j) = \quad \quad - c_j$$

## Exemple : Élément fini quadratique hiérarchique

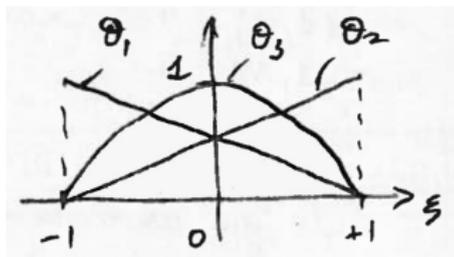
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le déterminant de la matrice est non nul et celle-ci est donc inversible :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

soient les fonctions de forme :

$$\begin{cases} \theta_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \\ \theta_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \\ \theta_3(\xi) = 1-\xi^2 \end{cases}$$



# Construction des fonctions de base globales

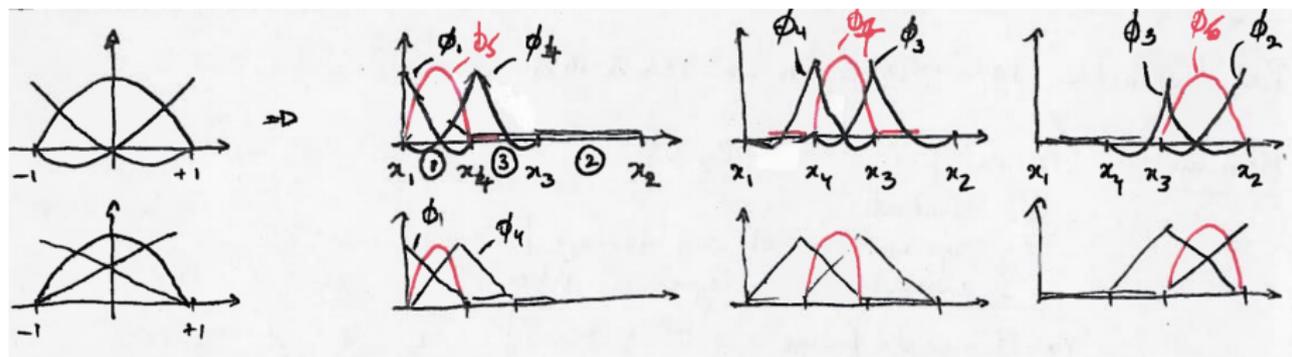
Le choix d'un élément fini de référence permet de construire les fonctions  $\phi_j$  de base globale.

L'élément fini définit les degrés de liberté et donc les fonctions de formes sur chaque élément.

Il faut :

- respecter les contraintes de continuité sur les fonctions de base.
- s'assurer que les fonctions de base qui sont non nulles sur un élément donné du maillage correspondent une à une à toutes les fonctions de forme sur l'élément fini de référence.
- construire les fonctions de base de manière à limiter leur support sur le plus petit nombre d'éléments possible (de sorte à avoir une matrice creuse).

# Construction des fonctions de base globales



**Remarque :** Les degrés de liberté associés aux fonctions de base globale correspondent aux degrés de liberté définis sur l'élément fini de référence.

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N \sigma_j(u_h) \phi_j(x)$$

c'est-à-dire, les degrés de liberté globaux  $\sigma_j$  sont déterminés à partir des degrés de liberté locaux.

# Matrices de connectivité

Les matrices de connectivité permettent de relier la numérotation locale (sur l'élément de référence) à la numérotation globale des points du maillage et des fonctions de base.

Un maillage est défini par :

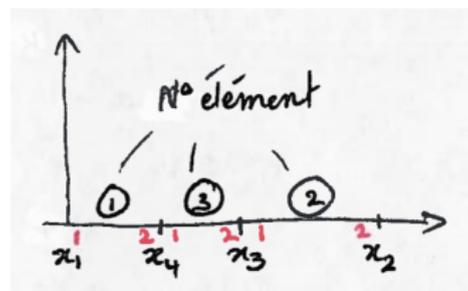
- Le nombre de points :  $N_v = 4$
- Le nombre d'éléments :  $N_e = 3$
- Les coordonnées des points :

$$\text{xcoord}(ni) = x_{ni}, \quad ni = 1, \dots, N_v.$$

- La matrice de connectivité :

$$\text{connect}(e, i) = ni$$

- + info sur les frontières ...



$$\text{connect}(1, 1) = 1$$

$$\text{connect}(1, 2) = 4$$

$$\text{connect}(2, 1) = 3$$

$$\text{connect}(2, 2) = 2$$

$$\text{connect}(3, 1) = 4$$

$$\text{connect}(3, 2) = 3$$

# Matrices de connectivité

$\text{Connect-ddl}(e, i)$  donne pour chaque  $K_e$  et chaque fonction de forme  $\theta_i$  le numéro global de la fonction de base (ou ddl).

Dans le cas d'éléments finis quadratiques :

$$\text{connect-ddl}(1, 1) = \text{connect}(1, 1) = 1$$

$$\text{connect-ddl}(1, 2) = \text{connect}(1, 2) = 4$$

$$\text{connect-ddl}(1, 3) = 5$$

$$\text{connect-ddl}(2, 1) = \text{connect}(2, 1) = 3$$

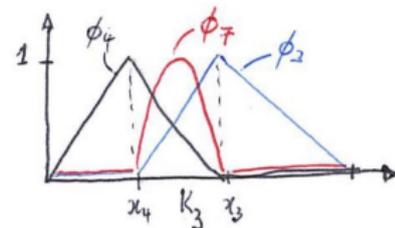
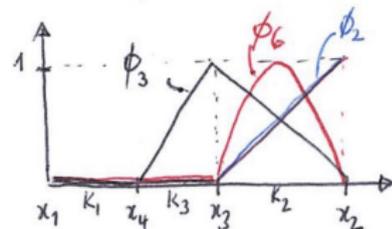
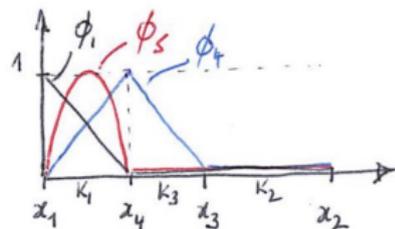
$$\text{connect-ddl}(2, 2) = \text{connect}(2, 2) = 2$$

$$\text{connect-ddl}(2, 3) = 6$$

$$\text{connect-ddl}(3, 1) = \text{connect}(3, 1) = 4$$

$$\text{connect-ddl}(3, 2) = \text{connect}(3, 2) = 3$$

$$\text{connect-ddl}(3, 3) = 7$$



**Remarque :** le nombre de ddl peut varier d'un élément à l'autre selon le type d'élément fini utilisé pour chaque  $K_e \Rightarrow \text{nddl}(e) = \# \text{ ddl sur } K_e$ .

# Assemblage

Problème abstrait :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ telle que : } B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V$$

Par Galerkin :

$$\text{Trouver } u_h \in V^h \text{ t.q. } B(u_h, \phi_i) = F(\phi_i), \quad i = 1, \dots, N$$

où

$$V^h = \left\{ v \in C(\Omega); v|_{K_e} \in \mathbb{P}_k(K_e), e = 1, \dots, N_e \right\}$$

Soit  $u_h = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j \in V^h$ . Trouver  $u_j, j = 1, \dots, N$  tels que :

$$\sum_{j=1}^N \underbrace{B(\phi_j, \phi_i)}_{K_{ij}} \underbrace{u_j}_{U_j} = \underbrace{F(\phi_i)}_{F_i}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\Rightarrow \boxed{KU = F}$$

# Exemple

Problème fort :

$$\begin{aligned} -au'' &= f, & \forall x \in \Omega = (0, 1) \\ u &= u_0, & \text{à } x = 0 \\ au' &= g, & \text{à } x = 1 \end{aligned}$$

Formulation faible :

$$B(u, v) = \int_0^1 au'v' dx$$

$$F(v) = \int_0^1 fv dx + gv(1)$$

$$U = \{u \in H^1(\Omega) : u(0) = u_0\}$$

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = 0\}$$

# Matrice de connectivité

Connect-ddl( $e, i$ ) = numéro global de  $\phi$ .

Dans le cas d'éléments finis quadratiques :

$$\text{connect-ddl}(1, 1) = \text{connect}(1, 1) = 1$$

$$\text{connect-ddl}(1, 2) = \text{connect}(1, 2) = 4$$

$$\text{connect-ddl}(1, 3) = 5$$

$$\text{connect-ddl}(2, 1) = \text{connect}(2, 1) = 3$$

$$\text{connect-ddl}(2, 2) = \text{connect}(2, 2) = 2$$

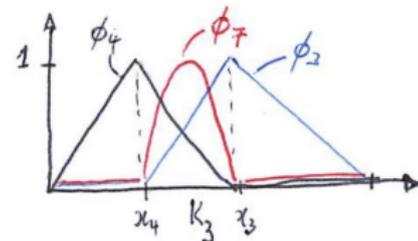
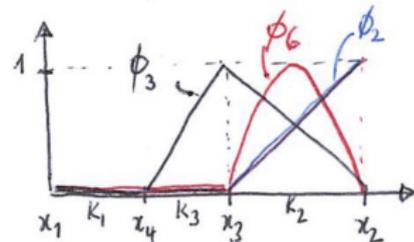
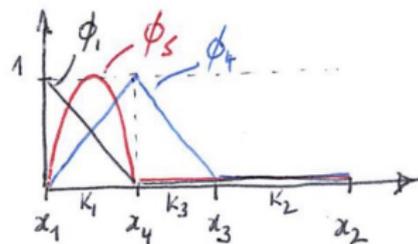
$$\text{connect-ddl}(2, 3) = 6$$

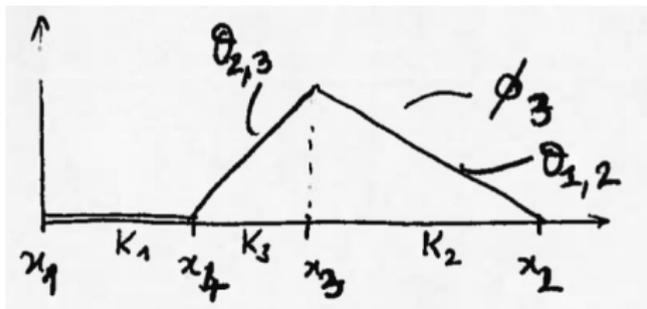
$$\text{connect-ddl}(3, 1) = \text{connect}(3, 1) = 4$$

$$\text{connect-ddl}(3, 2) = \text{connect}(3, 2) = 3$$

$$\text{connect-ddl}(3, 3) = 7$$

$$\text{connect-ddl}(e, i) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$



Calcul du vecteur  $F$ 

$$\phi_3(x) = \begin{cases} \theta_{2,3}(x), & x \in K_3 \\ \theta_{1,2}(x), & x \in K_2 \\ 0, & x \notin K_2 \cup K_3 \end{cases}$$

$$x = T_e(\xi), \quad dx = T_e' d\xi = \frac{h_e}{2} d\xi$$

$$\begin{aligned} F(\phi_3) &= \int_0^1 f(x) \phi_3(x) dx + g \overbrace{\phi_3(1)}^{=0} \\ &= \int_{K_2} f(x) \theta_{1,2}(x) dx + \int_{K_3} f(x) \theta_{2,3}(x) dx \\ &= \int_{-1}^{+1} f(T_2(\xi)) \hat{\theta}_1(\xi) \frac{h_2}{2} d\xi + \int_{-1}^{+1} f(T_3(\xi)) \hat{\theta}_2(\xi) \frac{h_3}{2} d\xi \\ &\approx \sum_{k=1}^{n_g} \omega_k f(T_2(\xi_k)) \hat{\theta}_1(\xi_k) \frac{h_2}{2} + \sum_{k=1}^{n_g} \omega_k f(T_3(\xi_k)) \hat{\theta}_2(\xi_k) \frac{h_3}{2} \end{aligned}$$

# Assemblage élément par élément

Vecteurs élémentaires :

$$K_1 : \bar{F}_1 = \begin{bmatrix} \int_{K_1} f\theta_{1,1} dx \\ \int_{K_1} f\theta_{2,1} dx \\ \int_{K_1} f\theta_{3,1} dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{1,1} \\ \bar{F}_{1,2} \\ \bar{F}_{1,3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix}$$

$$K_2 : \bar{F}_2 = \begin{bmatrix} \int_{K_2} f\theta_{1,2} dx \\ \int_{K_2} f\theta_{2,2} dx + g \\ \int_{K_2} f\theta_{3,2} dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{2,1} \\ \bar{F}_{2,2} \\ \bar{F}_{2,3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_3 \\ F_2 \\ F_6 \end{bmatrix}$$

$$K_3 : \bar{F}_3 = \begin{bmatrix} \int_{K_3} f\theta_{1,3} dx \\ \int_{K_3} f\theta_{2,3} dx \\ \int_{K_3} f\theta_{3,3} dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{3,1} \\ \bar{F}_{3,2} \\ \bar{F}_{3,3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_4 \\ F_3 \\ F_7 \end{bmatrix}$$

Vecteur global  $F$   
( $\dim F = 7$ ) :

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{1,1} \\ \bar{F}_{2,2} \\ \bar{F}_{2,1} + \bar{F}_{3,2} \\ \bar{F}_{1,2} + \bar{F}_{3,1} \\ \bar{F}_{1,3} \\ \bar{F}_{2,3} \\ \bar{F}_{2,3} \end{bmatrix}$$

$$\text{connect-ddl}(e, i) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

# Calcul de la matrice $K$

Matrices élémentaires ( $3 \times 3$ ) :

$$\bar{B}_e = \left[ \int_{K_e} a(x) \underbrace{\theta'_{j,e}}_{nj} \underbrace{\theta'_{i,e}}_{ni} dx \right]_{i,j=1,\dots,3}$$

$$\text{connect-ddl}(e, i) = ni$$

$$\text{connect-ddl}(e, j) = nj$$

Remarque :

3 matrices  $3 \times 3 = 27$  entrées

Matrice de rigidité globale ( $7 \times 7$ ) :

$$K = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & nj & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ ni \end{bmatrix}$$

Remarque :

1 matrice  $7 \times 7 = 49$  entrées

Donc au moins

$49 - 27 = 22$  entrées nulles

## Calcul de la matrice $K$

On note que :

$$\theta'_{i,e} = \frac{d\theta_{i,e}}{dx} = \frac{d\hat{\theta}_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{h_e} \frac{d\hat{\theta}_i}{d\xi} = \frac{2}{h} \hat{\theta}'_i$$

Donc :

$$\begin{aligned} \bar{B}_{ij} &= \int_{K_e} a(x) \theta'_{j,e} \theta'_{i,e} dx = \int_{\hat{K}} a(T_e(\xi)) \left[ \frac{2}{h_e} \hat{\theta}'_j \right] \left[ \frac{2}{h_e} \hat{\theta}'_i \right] \frac{h_e}{2} d\xi \\ &= \int_{-1}^{+1} a(T_e(\xi)) \hat{\theta}'_j(\xi) \hat{\theta}'_i(\xi) \frac{2}{h_e} d\xi \\ &\approx \sum_{k=1}^{n_g} \omega_k a(T_e(\xi_k)) \hat{\theta}'_j(\xi_k) \hat{\theta}'_i(\xi_k) \frac{2}{h_e} \end{aligned}$$

Rappel (avec  $\hat{\theta}_1$  et  $\hat{\theta}_2 =$  fonctions de forme linéaire):

$$x = T_e(\xi) = x_{1,e} \hat{\theta}_1(\xi) + x_{2,e} \hat{\theta}_2(\xi) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{h_e}{2} \quad \text{et} \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{h_e}$$

# Application des conditions de Dirichlet

Condition de Dirichlet :  $u(0) = u_0$

$$u_0 = u_h(0) = \sum_{j=1}^7 u_j \phi_j(0) = u_1 \phi_1(0) = u_1$$

On remplace 1ère ligne (correspondant ici à  $\phi_1$ ) par l'équation  $u_1 = u_0$  :

$$KU = F \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix}$$

Si  $B(u, v)$  est symétrique, alors  $K$  est symétrique.  
 Mais nouvelle matrice ci-dessus n'est plus symétrique.

# Application des conditions de Dirichlet

On introduit  $W$  et  $\bar{U}$  tels que :

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = W + \bar{U} \quad (\text{avec } w_1 = 0)$$

Et donc :

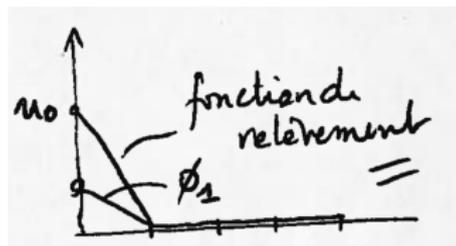
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} u_0 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix}$$

# Application des conditions de Dirichlet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Find  $w \in V$

$$B(w, v) = F(v) - B(\bar{u}, v), \quad \forall v \in V$$



# Résumé du cours

- Un élément fini en 1D est un triplet  $\{K, P, \Sigma\}$ , où  $K$  est un intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$ ,  $P$  est un espace vectoriel de fonctions définies sur  $K$ , et  $\Sigma$  est un ensemble de degrés de liberté.
- Les degrés de liberté sont des formes linéaires définies sur un espace vectoriel  $P$ .
- Les fonctions de base globale  $\phi_j$  se construisent à partir d'éléments finis définis sur un élément de référence.
- Les matrices de connectivité permettent de relier la numérotation locale (sur l'élément de référence) à la numérotation globale sur le maillage.
- Assemblage de la matrice de rigidité et du vecteur chargement à partir des matrices et vecteurs élémentaires et la matrice de connectivité.
- Intégration sur l'élément de référence.
- Approximation des intégrales par la quadrature de Gauss.
- Application des conditions de Dirichlet par post-traitement.