Travaux dirigés MTH1101 - Calcul I
TD n°2
Nathanaël Perrin

Pour le vendredi 17 septembre

Exercices portant sur les séries + séries entières et alternées

1. Vous avez montré par le test de l'intégrale que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge. Nous allons le montrer par majoration du terme général.
   (a) Trouver une majoration simple du terme $\frac{1}{n^2}$ (on pourra écrire $n^2 = n \times n$ puis majorer l'un des deux termes en n).
   (b) Réaliser une décomposition en éléments simples pour la fraction obtenue précédemment.
   (c) Conclure que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.
2. **Facultatif** : On va montrer un résultat similaire pour la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ sans utiliser le théorème des séries alternées. On posera V_n la somme partielle d'ordre n de la série.
   (a) Considérer le terme V_{2n} et le décomposer en termes pairs et en termes impairs.
   (b) Réutiliser la décomposition de l'exercice 2 pour réécriture sous une fraction de V_{2n}.
   (c) Comparer avec une série bien connue et conclure pour V_{2n}
   (d) Trouver un lien entre V_{2n} et V_{2n+1}, conclure sur la convergence de cette suite, et ainsi sur celle de V_n.
3. étudier les séries de terme général :
$$\left|\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^2+1}\right|$$
$$\frac{x^n}{n!}$$
4. Étudier la convergence de la série suivante :
$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha},\ \forall \alpha \in \left]0,1\right]$$
5. Répondre par vrai ou faux, Justifier vos choix ou donner un contre-exemple :
   (a) Il est possible que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ diverge, mais que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k$ converge.
   (b) Si u_k est positive, décroissante et converge vers 0 alors $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(e^{u_k}-1)$ converge.

6. Soit la série suivante :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k k}{4^k}$$

Déterminer la nature de cette série et étudier sa convergence. Combien de termes faut-il additionner si l'on veut être certain d'avoir une précision au moins égale à 0.002 ?

7. Déterminer si la série suivante est absolument convergente ou non. Qu'en est-il de sa convergence sans les valeurs absolues ?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

8. Soit la fonction suivante : $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2}$.
Donner un développement en série entière de $f(x)$ (penser à la dérivation d'une série géométrique). Préciser pour quelles valeurs de x la série converge (domaine où la série est définie comme égale à la fonction).