MTH8207 – Mathématiques des éléments finis

Serge Prudhomme

Professeur
Département de mathématiques
Polytechnique Montréal

Cours 3

Sommaire du cours #3

- Equivalence des problèmes fort et faible
- Discrétisation par les méthodes de Galerkine et de Ritz
- Discrétisation du domaine
- Espace éléments finis et fonctions de base
- Fonctions de forme
- Élément de référence
- Définition des degrés de liberté (DDL)

Problèmes fort et faible

Problème fort :

$$\boxed{\begin{aligned} -(au')' + bu' + cu = f, &\quad \forall x \in \Omega = (0,1) \\ u = u_0, &\quad \text{à } x = 0 \\ au' + \lambda u = g, &\quad \text{à } x = 1 \end{aligned}}$$

Problème faible :

$$\boxed{\text{Trouver } u \in U \;\; \text{telle que :} \quad B(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V}$$

où

$$B(u,v) = \int_0^1 au'v' + bu'v + cuv\,dx + \lambda u(1)v(1)$$

$$F(v) = \int_0^1 fv\,dx + gv(1)$$

$$U = \{u \in H^1(\Omega) : \; u(0) = u_0\}$$

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : \; v(0) = 0\}$$

Equivalence des problèmes fort et faible

- Si u est solution du problème fort, u est alors solution du problème faible.
- Si u est solution du problème faible, est-elle solution du problème fort?

Prenons le cas $b = 0$, $c = 0$, $\lambda = 0$, $g = 0$.
Trouver $u \in U$ telle que :

$$\int_0^1 au'v'\,dx = \int_0^1 fv\,dx, \quad \forall v \in V$$

Peut-on intégrer par parties?
Si $u \in H^1(\Omega)$, comment sait-on si $u \in H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$?

Il est nécessaire de connaître la régularité de la solution u du problème faible.

Régularité des solutions

- Si $u'' \in L^2(\Omega)$, alors $u' \in H^1(\Omega)$, et $u \in H^2(\Omega)$.
- La régularité de la solution dépend du chargement f. Si $a(x) = 1$ et
  - si $f = -\rho g \in C^\infty$, alors u est parabolique, i.e. $u \in C^\infty$;
  - si f est constant par morceaux, $f \in L^2$, alors $u \in H^2$ mais $u \notin H^3$;
  - si $f = -\delta \in H^{-1}$, alors u est globalement continue et linéaire par morceaux, i.e. $u \in H^1$ mais $u \notin H^2$.
- La régularité de la solution dépend des propriétés du matériau. Supposons que $a(x)$ soit constante par morceaux et $f \in L^2$:

  $$-(au')' = f \in L^2 \;\; \Rightarrow \;\; au' = -\int f\,dx \in H^1 \;\; \Rightarrow \;\; u' = -\frac{1}{a}\int f\,dx \in L^2$$

  et donc $u \in H^1$ mais non à H^2.
- Selon la régularité du chargement, il faut parfois décomposer l'intégrale sur des sous-intervalles sur lesquels la solution u soit suffisamment régulière pour pouvoir intégrer par parties sur ces intervalles.

Equivalence des problèmes fort et faible

Supposons que $f \in L^2(\Omega)$ et $a \in C(\overline{\Omega})$. On peut alors intégrer par parties:

$$\int_\Omega -(au')' v \, dx + a(1)u'(1)v(1) - a(0)u'(0)v(0) = \int_\Omega fv \, dx, \quad \forall v \in V$$

1) Puisque $v(0) = 0$, alors :

$$\int_\Omega \big[-(au')' - f \big] v \, dx + a(1)u'(1)v(1) = 0, \quad \forall v \in V$$

2) Puisque $\mathcal{D}(\Omega) \subset V$

$$\int_\Omega \big[-(au')' - f \big] v \, dx = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Par le Lemme Fondamental du Calcul Variationnel:

$$-(au')' - f = 0, \quad p.p. \text{ in } \Omega.$$

Equivalence des problèmes fort et faible

3) Il reste donc : $a(1)u'(1)v(1) = 0$, $\forall v \in V$.
On peut choisir v telle que $v(1) = 1$ de sorte que l'on a $a(1)u'(1) = 0$.

4) Comme on a $u \in U$, on sait que $u(0) = u_0$.

On a donc montré que u satisfait le problème:

$$\boxed{\begin{aligned} -(au')' = f, &\quad \forall x \in \Omega = (0,1) \\ u = u_0, &\quad \text{à } x = 0 \\ au' = 0, &\quad \text{à } x = 1 \end{aligned}}$$

Remarque : Les conditions de Neumann (ou de Robin) sont aussi appelées des conditions naturelles car elles apparaissent naturellement dans l'équation de la formulation faible. Par contre, les conditions de Dirichlet sont des conditions essentielles car il est essentiel de les spécifier dans l'espace des solutions U.

Approximation de Galerkine

Cas spécial $U = V$.

$$\boxed{\text{Trouver } u \in V \text{ telle que } \quad B(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V}$$

La dimension de l'espace V est infinie. L'objective est de trouver une approximation $\widehat{u}$ de u dans un sous-espace de dimension finie $\widehat{V}$ de V. Soit $\dim \widehat{V} = N$. Alors

$$\boxed{u(x) \; \approx \; \widehat{u}(x) = \sum_{j=1}^{N} u_j \phi_j(x), \quad \forall x \in \Omega}$$

où l'ensemble $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ forme une base de $\widehat{V}$:

- Les fonctions ϕ génèrent l'espace $\widehat{V}$:
  $\forall \widehat{u} \in \widehat{V}$, il existe $u_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, N$, tels que $\widehat{u}(x) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x)$.
- Les fonctions ϕ sont linéairement indépendantes:
  si $\sum u_j \phi_j(x) = 0$, $\forall x \in \Omega$, alors $u_j = 0$, $j = 1, \ldots, N$.

Approximation de Galerkine

L'approche de Galerkine consiste à trouver la "projection" $\widehat{u} \in \widehat{V}$ de u.

- Trouver $\widehat{u} \in \widehat{V}$ telle que $B(\widehat{u}, v) = F(v), \quad \forall v \in V$.
  Cela donne N inconnues pour une infinité d'équations.
- Trouver $\widehat{u} \in \widehat{V}$ telle que $B(\widehat{u}, \widehat{v}) = F(\widehat{v}), \quad \forall \widehat{v} \in \widehat{V}$
  Le problème est alors équivalent à :

$$\boxed{\text{Find } \widehat{u} \in \widehat{V} \text{ t.q.} \quad B(\widehat{u}, \phi_i) = F(\phi_i), \quad i = 1, \ldots, N}$$

Cela donne N inconnues pour N équations.

En remplaçant $\widehat{u}$ par $\sum u_j \phi_j$ dans l'équation ci-dessus, on a :

$$B\Big(\sum u_j \phi_j, \phi_i\Big) = \sum_{j=1}^{N} \underbrace{B(\phi_j, \phi_i)}_{K_{ij}} \underbrace{u_j}_{U_j} = \underbrace{F(\phi_i)}_{F_i}, \quad i = 1, \ldots, N$$

Approximation de Galerkine

On définit la matrice K et les vecteurs U et F tels que:

$$K = \begin{bmatrix} B(\phi_1,\phi_1) & B(\phi_2,\phi_1) & \cdots & B(\phi_N,\phi_1) \\ B(\phi_1,\phi_2) & B(\phi_2,\phi_2) & \cdots & B(\phi_N,\phi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(\phi_1,\phi_N) & B(\phi_2,\phi_N) & \cdots & B(\phi_N,\phi_N) \end{bmatrix}$$

et

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} F(\phi_1) \\ F(\phi_2) \\ \vdots \\ F(\phi_N) \end{bmatrix}$$

On a alors le système de N équations linéaires à N inconnues:

$$\boxed{KU = F}$$

Méthode de Ritz

La méthode de Ritz consiste à minimiser la fonctionnelle $J(v) = \frac{1}{2}B(v,v) - F(v)$ sur $\widehat{V}$ (avec B symétrique et définie positive), i.e.

$$\hat{u} = \underset{\hat{v}\in\widehat{V}}{\operatorname{argmin}} \left[\frac{1}{2}B(\hat{v},\hat{v}) - F(\hat{v})\right]$$

et on retrouve le problème :

$$\boxed{\text{Trouver } \hat{u} \in \widehat{V} \text{ t.q.} \quad B(\hat{u},\hat{v}) = F(\hat{v}), \quad \hat{v} \in \widehat{V}}$$

soit

$$\boxed{\text{Trouver } \hat{u} \in \widehat{V} \text{ t.q.} \quad B(\hat{u},\phi_i) = F(\phi_i), \quad i = 1,\ldots,N}$$

Espace éléments finis

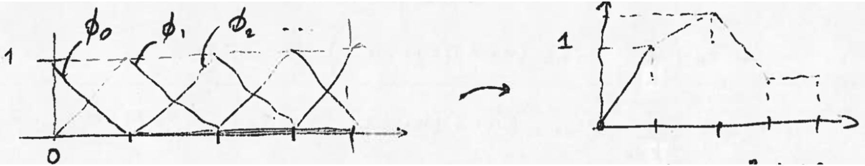
L'espace éléments finis V^h (en 1D) est l'ensemble des fonctions polynomiales de degré k sur chaque élément et continues à l'interface des éléments :

$$\boxed{V^h = \left\{ v \in C(\Omega);\ v\big|_{K_e} \in \mathbb{P}_k(K_e),\ e = 1, \ldots, N_e \right\}}$$

où $N_e =$ nombre d'éléments du maillage. On peut montrer que $V^h \subset H^1(\Omega)$.

On considère le cas particulier $k = 1$ (fonctions linéaires par morceaux et continues). Soit une base of V^h, $\{\phi_j\}_{j=0,\ldots,N}$, on a :

$$V^h = \mathrm{Vect}\{\phi_j\}_{j=0,\ldots,N} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{u_h(x) = \sum_{j=0}^{N} u_j \phi_j(x), \quad \forall x \in \Omega}$$



Problème éléments finis

Par Galerkine :

$$\boxed{\text{Trouver } u_h \in V^h \text{ t.q.} \quad B(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V^h}$$

ou, de manière équivalente :

$$\boxed{\text{Trouver } u_h \in V^h \text{ t.q.} \quad B(u_h, \phi_i) = F(\phi_i), \quad i = 0, \ldots, N}$$

L'approximation EF du problème est donnée par les degrés de liberté $U = [u_0, u_1, u_2, \ldots, u_N]^T$ tels que :

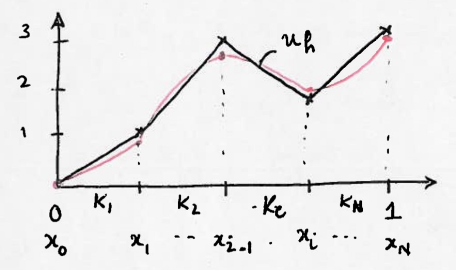
$$\boxed{KU = F}$$

K est souvent appelée la matrice de rigidité et F le vecteur chargement. L'objectif est maintenant de développer une méthode systématique pour assembler la matrice de rigidité K et le vecteur chargement F.

Discrétisation du domaine

- Domaine $\Omega = (0, 1)$
- Points x_i, $i = 0, \ldots, N$
- Eléments $K_e = [x_{i-1}, x_i]$, $e = 1, \ldots, N_e$ (ici $N_e = N$ et $e = i$)

$$\boxed{\bar{\Omega} = \cup_{e=1}^{N_e} K_e}$$



Par convention, on définit :

$$\boxed{h_e = |x_i - x_{i-1}| = \text{Taille de élément } K_e} \quad \text{et} \quad \boxed{h = \max_{e=1,\ldots,N_e} h_e}$$

Le paramètre h représente le paramètre de discrétisation de la MEF. La question fondamentale sera d'établir si u_h converge vers u lorsque $h \to 0$.

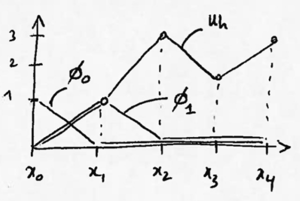
Fonctions de Base

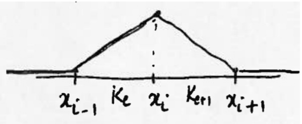
Les fonctions de base $\phi_i(x)$ sont choisies telles que :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{at } x = x_i \\ 0, & \text{at } x = x_j,\ j \neq i \end{cases}$$

En utilisant le Kronecker delta,

$$\boxed{\phi_i(x_j) = \delta_{ij}}$$



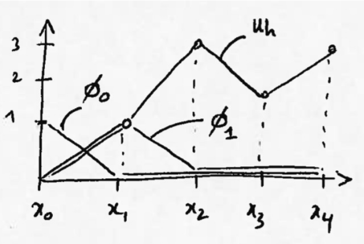


$$\boxed{\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \dfrac{x - x_{i-1}}{h_e}, & \text{si } x \in K_e = [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{x_{i+1} - x}{h_{e+1}}, & \text{si } x \in K_{e+1} = [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}}$$

Fonctions de base

Exercice : Quelles sont les valeurs de u_i, $i = 1, \ldots, 4$ pour u_h ci-dessous?
On observe que

$$\boxed{u_h(x_i) = \sum_{j=0}^{N} u_j \phi_j(x_i) = \sum_{j=0}^{N} u_j \delta_{ij} = u_i}$$



Alors :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \quad u_2 = 3, \quad u_4 = 3. \\ u_1 &= 1, \quad u_3 = 2, \end{aligned}$$

Soit :

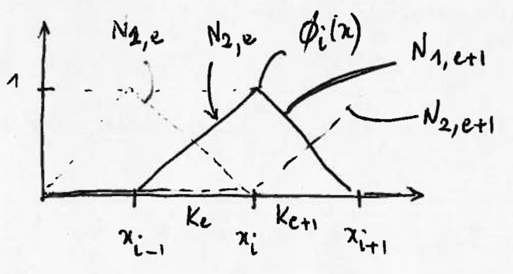
$$\boxed{u_h(x) = \phi_1(x) + 3\phi_2(x) + 2\phi_3(x) + 3\phi_4(x)}$$

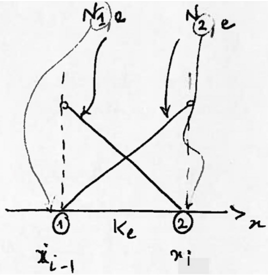
Remarque : Le choix d'une base n'est pas unique! Ici, le support de chaque fonction de base consiste de deux éléments au plus :

$$\boxed{\text{supp } \phi_i = K_e \cup K_{e+1} = [x_{i-1}, x_{x+1}], \qquad i = 1, \ldots, N-1}$$

Fonctions de forme

Les fonctions de forme, définies sur chaque élément, servent à construire les fonctions de base globales.





$$\phi_i(x) = \begin{cases} N_{2,e}(x), & \text{si } x \in K_e \\ N_{1,e+1}(x), & \text{si } x \in K_{e+1} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$N_{1,e}(x) = \frac{x_i - x}{h_e}$$

$$N_{2,e}(x) = \frac{x - x_{i-1}}{h_e}$$

Fonctions de forme

Remarque :
Les fonctions de forme $N_{1,e}$ et $N_{2,e}$ fournissent une base pour l'espace des polynômes de degré 1 sur K_e, i.e. $\mathbb{P}_1(K_e)$.

Elles satisfont:

$$\boxed{N_{k,e}(x_l) = \delta_{kl}, \quad k,l = 1,2}$$

Ici x_1 et x_2 sont les coordonnées des points 1 et 2 de l'élément K_e.

Ainsi, tout polynôme $p \in \mathbb{P}_1(K_e)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $N_{1,e}$ et $N_{2,e}$:

$$p(x) = c_1 N_{1,e}(x) + c_2 N_{2,e}(x), \quad \forall x \in K_e$$

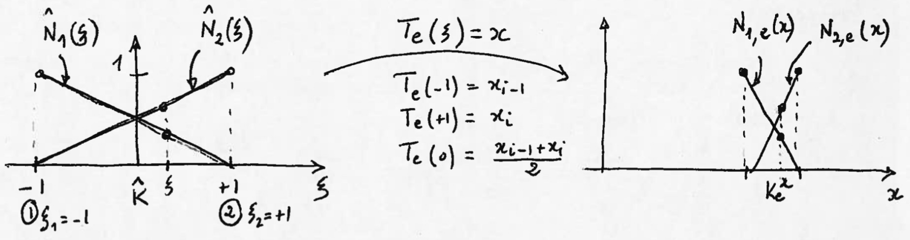
De plus,

$$\begin{aligned} p(x_1) &= c_1 N_{1,e}(x_1) + c_2 N_{2,e}(x_1) = c_1 \\ p(x_2) &= c_1 N_{1,e}(x_2) + c_2 N_{2,e}(x_2) = c_2 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{p(x) = p(x_1) N_{1,e}(x) + p(x_2) N_{2,e}(x), \quad \forall x \in K_e}$$

Élément de référence



$$\boxed{\begin{aligned}\widehat{N}_1(\xi) &= \frac{1-\xi}{2}\\ \widehat{N}_2(\xi) &= \frac{1+\xi}{2}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}N_{1,e}(x) = \widehat{N}_1(\xi) = \widehat{N}_1(T_e^{-1}(x)) = \widehat{N}_1 \circ T_e^{-1}(x)\\ N_{2,e}(x) = \widehat{N}_2(\xi) = \widehat{N}_2(T_e^{-1}(x)) = \widehat{N}_2 \circ T_e^{-1}(x)\end{aligned}}$$

Remarque : $\boxed{\widehat{N}_k(\xi_l) = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2}$ avec $\widehat{K} = [\xi_1, \xi_2] = [-1, +1]$.

Transformation T_e

T_e transforme l'élément de référence $\widehat{K}$ en un élément $K_e = [x_{i-1}, x_i] \subset \overline{\Omega}$:

$$x = T_e(\xi), \quad \forall \xi \in \widehat{K}$$

C'est une transformation affine (polynôme de degré 1 sur $\widehat{K}$) telle que $T_e(\xi_1) = x_{i-1}$ et $T_e(\xi_2) = x_i$.

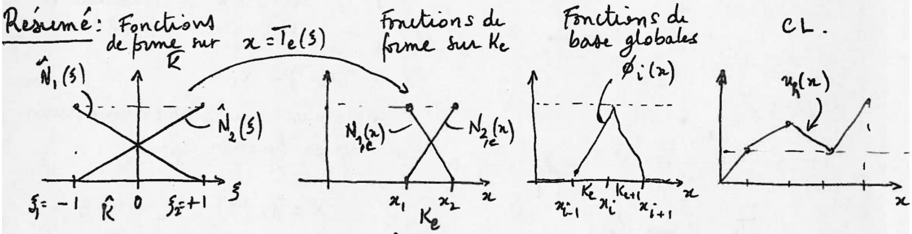
$$\boxed{x = T_e(\xi) = T_e(\xi_1)\,\widehat{N}_1(\xi) + T_e(\xi_2)\,\widehat{N}_2(\xi) = x_{i-1}\,\widehat{N}_1(\xi) + x_i\,\widehat{N}_2(\xi), \quad \forall \xi \in \widehat{K}}$$

La transformation $T_e : \widehat{K} \to K_e$ doit être inversible. Inverse T_e^{-1} :

$$x = T_e(\xi) = x_{i-1}\left[\frac{1-\xi}{2}\right] + x_i\left[\frac{1+\xi}{2}\right] = \left[\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right] + \left[\frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right]\xi = \bar{x} + \frac{h_e}{2}\xi$$

$$\boxed{\xi = T_e^{-1}(x) = \frac{2}{h_e}\left(x - \bar{x}\right) = \frac{2}{h_e}\left(x - \frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)}$$

Élément de référence



$\hat{N}_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}$

$\hat{N}_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$

$\hat{N}_k(\xi_\ell) = \delta_{k\ell}$

$N_{1,e} = \hat{N}_1 \circ T_e^{-1}$

$N_{2,e} = \hat{N}_2 \circ T_e^{-1}$

$N_{k,e}(x_\ell) = \delta_{k\ell}$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} N_{2,e} & \text{dans } K_e \\ N_{1,e+1} & \text{dans } K_{e+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$

$u_h = \sum_{i=0}^{N} u_i \phi_i$

Remarques

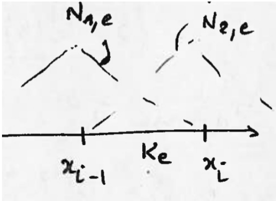
- Coefficients de u_h : Comme $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$,

$$u_h(x_j) = \sum_{i=0}^{N} u_i \phi_i(x_j) = \sum_{i=0}^{N} u_i \delta_{ij} = u_j \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_h(x) = \sum_{i=0}^{N} u_h(x_i)\phi_i(x)}$$

Le coefficient u_j représente la valeur de u_h évaluée au point x_j.

- Valeur de $u_h(x)$ pour $x \in K_e$:

$$\begin{aligned} u_h(x) &= \sum_{i=0}^{N} u_i \phi_i(x) \\ &= u_{i-1}\phi_{i-1}(x) + u_i \phi_i(x) \\ &= u_{i-1} N_{1,e}(x) + u_i N_{2,e}(x) \\ &= u_{i-1} \widehat{N}_1 \circ T_e^{-1}(x) + u_i \widehat{N}_2 \circ T_e^{-1}(x) \\ &= u_{i-1} \widehat{N}_1(\xi) + u_i \widehat{N}_2(\xi) \end{aligned}$$



Définition des degrés de liberté (DDL)

Les fonctions de forme $\widehat{N}_1$ et $\widehat{N}_2$ fournissent une base pour l'espace $\mathbb{P}_1(\widehat{K})$. Ainsi, tout polynôme $p \in \mathbb{P}_1(\widehat{K})$ peut s'écrire comme une CL de $\widehat{N}_1$ et $\widehat{N}_2$:

$$p(\xi) = c_1 \widehat{N}_1(\xi) + c_2 \widehat{N}_2(\xi), \quad \forall \xi \in \widehat{K}$$

Comme $\widehat{N}_l(\xi_k) = \delta_{kl}$, on a vu que :

$$\begin{aligned} c_1 &= p(\xi_1) = p(-1) \\ c_2 &= p(\xi_2) = p(+1) \end{aligned}$$

On introduit les formes linéaires :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1 : \mathbb{P}_1(\widehat{K}) \to \mathbb{R}, &\quad \text{telle que} \quad \hat{\sigma}_1(p) = p(\xi_1) \\ \hat{\sigma}_2 : \mathbb{P}_1(\widehat{K}) \to \mathbb{R}, &\quad \text{telle que} \quad \hat{\sigma}_2(p) = p(\xi_2) \end{aligned}$$

De ce fait :

$$\boxed{p(\xi) = \hat{\sigma}_1(p)\widehat{N}_1(\xi) + \hat{\sigma}_2(p)\widehat{N}_2(\xi), \quad \forall \xi \in \widehat{K}}$$

$$\boxed{\hat{\sigma}_k(\widehat{N}_l) = \widehat{N}_l(\xi_k) = \delta_{kl}}$$

Définition des degrés de liberté (DDL)

Tout polynôme $p \in \mathbb{P}_1(\widehat{K})$ peut aussi s'écrire comme une CL de $\widehat{M}_1(\xi) = 1$ et $\widehat{M}_2(\xi) = \xi$:

$$p(\xi) = a_0 + a_1\xi = a_0\widehat{M}_1(\xi) + a_1\widehat{M}_2(\xi), \quad \forall \xi \in \widehat{K}$$

Dans ce cas, $a_0 = p(0)$ et $a_1 = p'(0)$.

$$\begin{aligned} a_0 &= p(0) \\ a_1 &= p'(0) \end{aligned}$$

On introduit alors les formes linéaires :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1 : \mathbb{P}_1(\widehat{K}) \to \mathbb{R}, &\quad \text{telle que} \quad \hat{\sigma}_1(p) = p(0) \\ \hat{\sigma}_2 : \mathbb{P}_1(\widehat{K}) \to \mathbb{R}, &\quad \text{telle que} \quad \hat{\sigma}_2(p) = p'(0) \end{aligned}$$

Et donc :

$$\boxed{p(\xi) = \hat{\sigma}_1(p)\widehat{M}_1(\xi) + \hat{\sigma}_2(p)\widehat{M}_2(\xi), \quad \forall \xi \in \widehat{K}}$$

$$\boxed{\hat{\sigma}_k(\widehat{M}_l) = \widehat{M}_l(\xi_k) = \delta_{kl}}$$

Définition des degrés de liberté (DDL)

Définition :

Soit P un espace vectoriel P de dimension $\dim P = n$.

Les degrés de liberté sont n formes linéaires σ_i, $i = 1, \ldots, n$, définies sur P telles que l'on puisse trouver n fonctions de base linéairement indépendantes, $\theta_j \in P$, $j = 1, \ldots, n$, en utilisant la relation :

$$\boxed{\sigma_i(\theta_j) = \delta_{ij}}$$

De plus, toute fonction de P se représente sous la forme :

$$\boxed{p(x) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(p)\, \theta_j(x), \quad \forall x}$$

Résumé du cours

- Les problèmes fort et faible sont équivalents, à condition que la solution du problème faible soit suffisamment régulière.
- Les méthodes de Galerkin et de Ritz permettent d'obtenir une approximation de la solution du problème faible dans un sous-espace de dimension finie. On résout alors un système d'équations linéaires :

$$\boxed{KU = F}$$

- La MEF est une méthode qui permet en particulier de construire des sous-espaces $V^h \subset V$ de dimension finie à partir de fonctions polynômiales par morceaux.
- Notion des degrés de liberté (DDL).