# Travaux dirigés MTH1101 - Calcul I
# TD n°1
**Nathanaël Perrin**

Pour le vendredi 10 septembre

## 1. Exercices portant sur les suites (capsules 1 et 2)

1. Répondre par vrai ou faux. Justifier vos choix ou donner un contre-exemple :
   (a) Si une suite ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$, alors elle converge.
   (b) Une suite croissante et non majorée converge toujours.
2. Déterminer si les suites suivantes convergent ou non. En cas de convergence de la suite, donner sa limite.
   (a) $u_n = \frac{n}{ln(n)}$
   (b) $u_n = n^{\frac{1}{n}}$
   (c) $u_n = \frac{\sin^2 n}{3^n}$
   (d) $u_n = \{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, ...\}$
3. Une suite $(a_n)$ est donnée par $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$, $\forall n$ entier.
   (a) Montrer que $(a_n)$ est strictement croissante, bornée supérieurement par 3 et inférieurement par 0. Conclure que la suite possède une limite.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

## 2. Exercices portant sur les séries numériques (capsule 3 et 4)

1. Répondre par vrai ou faux, Justifier vos choix ou donner un contre-exemple :
   (a) Si $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = 1$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$
   (b) Si $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = 0$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 1$
   (c) Si $\lim\limits_{k\to+\infty} |\frac{u_k}{u_{k+1}}| = 1.5$ alors $(\sum u_k)$ diverge
2. Déterminer si les deux séries suivantes convergent ou divergent :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos(n\pi)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(\frac{n\pi}{2})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+2)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{|sin(\frac{n\pi}{2})|}{n^2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)+(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{(-1)^n - n}$$

3. Soit la série $(\sum a_k)$, on suppose que la somme partielle d'ordre n est :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = 3 - \frac{2n}{1-e^n},\ \forall n\ in\ \mathbb{N}^*$$

   (a) montrer que $(\sum a_k)$ converge ou diverge, si elle converge donner sa somme.

   (b) Quelle est la valeur du terme général $a_k$ ?

4. Déterminer la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n=20}^{\infty} (\frac{1}{3})^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

   (penser à la décomposition en fractions partielles suivi d'un télescopage de termes pour cette dernière)

5. Soit la série suivante :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

   (a) Calculer $s_{10}$, la somme partielle d'ordre 10 de la série. Peut-on estimer la somme de la série par $s_{10}$ ?

   (b) borner la somme de la série à partir du résultat de la question précédente.

   (c) Déterminer les valeurs de $n$ qui garantissent que l'erreur de l'approximation de $s \approx s_n$ est inférieur à 0.001.