MTH8207 – Mathématiques des éléments finis

Serge Prudhomme

Professeur
Département de mathématiques
Polytechnique Montréal

Cours 1

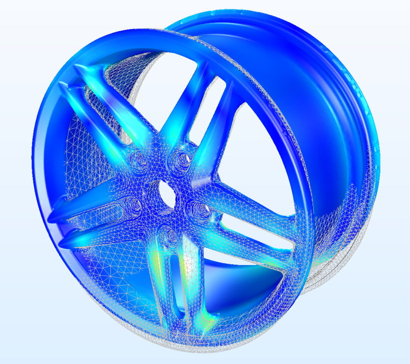
Sommaire du cours

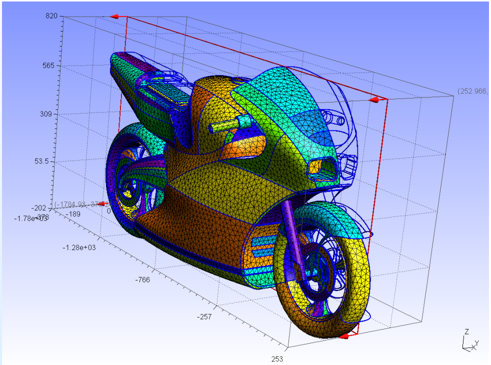
- Introduction
- Modélisation
- La méthode scientifique: Vérification et Validation
- Un exemple de problème de conditions aux limites
- Formulation faible d'un problème

Introduction

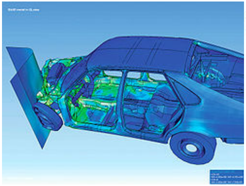
- La méthode(s) des éléments finis (MEF) fournit une famille d'outils numériques pour obtenir des approximations de solutions d'équations différentielles ordinaires (EDO) et d'équations différentielles partielles (EDP).
- Les premières contributions datent des années 1950 (Courant, Turner, Argyris, Clough, etc.), surtout par Boeing.
- Le premier livre a été publié par Zienkiewicz en 1967.
- Les premières applications concernaient surtout des problèmes d'analyse structurelle et de vibrations, des problèmes en mécanique du solide nonlinéaire et en mécanique des fluides, etc.
- La MEF est aujourd'hui utilisée dans tous les domaines des sciences et du génie, dès que l'on a besoin de résoudre des EDP sur des géométries complexes.
- Il existe de nombreux codes commerciaux et "open source": ANSYS, Comsol Multiphysics, FreeFEM, Fenics, Deal-II, etc.

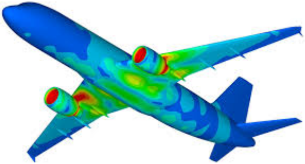
Introduction

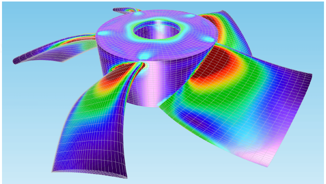


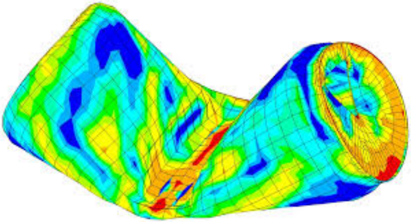


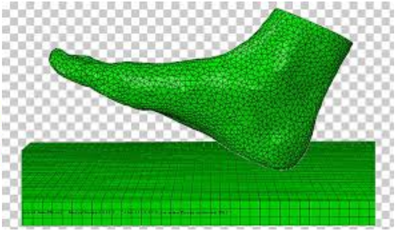
Introduction











Introduction

Avantages:

- Analyse de problèmes sur des géométries complexes
- Applicable indépendamment de la dimension spatiale
- Construction simple et systématique des problèmes à résoudre
- Basée sur une théorie mathématique rigoureuse
- Analyse théorique de la convergence en fonction des paramètres de discrétisation

Désavantages:

- La théorie mathématique repose sur l'analyse fonctionnelle
- La méthode est souvent non-conservative (problèmes de transport)
- Il est facile de mal comprendre certains concepts clés de la méthode

Introduction

Autres méthodes et variantes:

- Méthode des différences finies (FDM)
- Méthode des volumes finis (FV)
- Méthode des éléments de frontière (BEM)
- Méthodes spectrales
- Méthodes de Galerkine discontinues
- Méthode des éléments finis généralisés (G-FEM, X-FEM)
- MEF multiéchelle
- Méthodes sans maillage (meshless methods)
- Analyse isogéometrique (IGA)
- etc.

Modélisation scientifique de phénomènes physiques

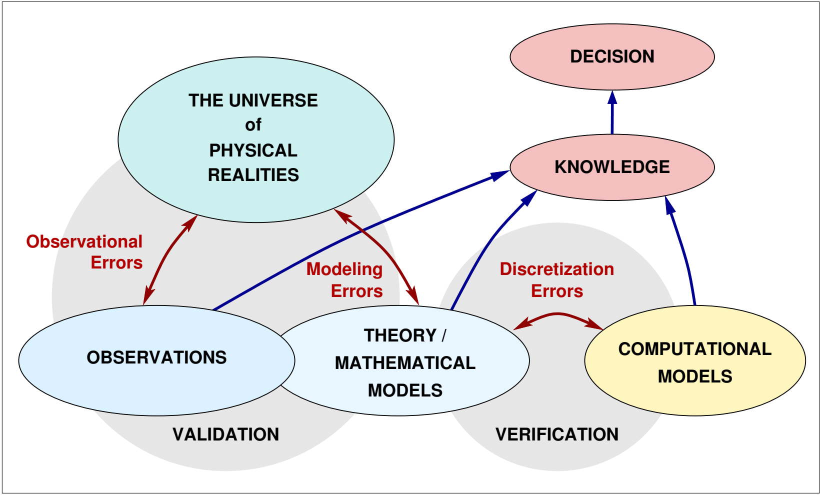
Définition: La modélisation est le processus de générer un modèle comme représentation conceptuelle d'un phénomène physique ou autre.

John von Neumann:

...the sciences do not try to explain, they hardly even try to interpret, they mainly make models. By a model is meant a mathematical construct which, with the addition of certain verbal interpretations, describes observed phenomena. The justification of such a mathematical construct is solely and precisely that it is expected to work – that is, correctly to describe phenomena from a reasonably wide area.

"**A scientific model** seeks to represent empirical objects, phenomena, and physical processes in a logical and objective way. All models are simplified reflections of reality that, despite **being approximations**, can be extremely useful. **Building and disputing models** is fundamental to the scientific enterprise." (Wikipedia)

Vérification et Validation

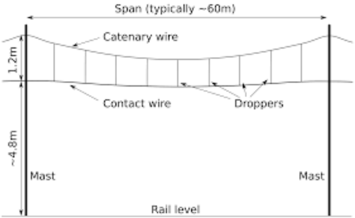


Source: Oden, Moser, et Ghattas, SIAM News (Nov. 2010)

Vérification et Validation

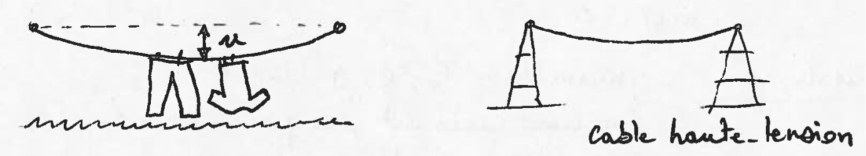
- **Vérification**: Le processus de déterminer la précision avec laquelle un modèle numérique peut produire des résultats comparables à ceux que l'on obtiendrait avec le modèle mathématique sur lequel il est basé. Le processus inclut la vérification des codes et des solutions.
- **Validation**: Le processus de déterminer la précision avec laquelle un modèle (mathématique) peut prédire l'observation de phénomènes physiques. Un modèle est avant tout évalué en fonction de sa fidélité à reproduire des données empiriques.
- **Prédiction**: Un modèle est utilisé pour la prédiction d'un événement (on suppose ici que la prédiction d'un événement ne peut être mesurée ou observée, sinon ce ne serait plus une prédiction).
- **Quantités d'intérêt**: Objectifs spécifiques que l'on peut exprimer comme des outputs d'un modèle (les objectifs sont souvent définis comme des fonctions de la solution d'un modèle).

Un exemple: Modèle de la caténaire



Un exemple: Modèle de la caténaire

Un exemple: Modèle de la caténaire



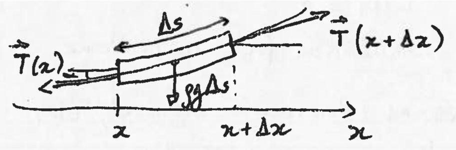
Hypothèses:

- A = Aire de la section du câble = constante (choisie égale à 1 ici)
- ρ = densité massique par unité de longueur = constante
- État stationnaire
- Chargement connu
- Le câble est fermement fixé aux extrémités, i.e. $u = 0$
- etc.

Un exemple: Modèle de la caténaire

On applique les lois classiques de la physique sur un volume élémentaire représentatif (VER) pour déterminer l'équation différentielle qui régit la déflection du câble:

$$\boxed{\sum \vec{f} = \vec{0}}$$



Dans la direction des x:

$$\boxed{T(x)\cos\alpha(x) = \text{constante} = T \quad (= \text{Tension du câble})}$$

Dans la direction des y:

$$\boxed{-T\frac{d^2u}{dx^2} + \rho g\sqrt{1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2} = 0, \qquad \forall x \in (0, L)}$$

C'est une EDO non linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Un exemple: Modèle de la caténaire

Équation:

$$\boxed{-T u_{xx} + \rho g \sqrt{1 + (u_x)^2} = 0, \qquad \forall x \in \Omega = (0, L)}$$

Conditions aux limites:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = 0, & \text{à } x = 0 \\ u = 0, & \text{à } x = L \end{array}}$$

Inconnue du problème:
Variable dépendante $u = u(x)$ est une fonction de la variable indépendante x.

Paramètres: u dépend aussi des paramètres du problème:

- Paramètres géométriques: L, A.
- Paramètre du câble: ρ.
- Paramètres du modèle: g, T.

Simplification du modèle

- Dans le cas de petites déflections, on peut supposer que $u_x \approx 0$, de telle sorte que le problème devient:
Soient $f = -\rho g$ **et** T**, trouver** $u = u(x)$ **telle que**

$$\boxed{\begin{aligned} -T\,u_{xx} &= f, \quad \forall x \in \Omega = (0, L) \\ u &= 0, \quad \text{à } x = 0 \\ u &= 0, \quad \text{à } x = L \end{aligned}}$$

- Utiliser les symétries du domaine, conditions aux limites, chargements, etc. pour simplifier le problème. Dans notre cas, la solution est symétrique par rapport à $x = L/2 = \ell$ et le problème peut alors s'écrire:
Soient f **et** T**, trouver** $u = u(x)$ **telle que**

$$\boxed{\begin{aligned} -T\,u_{xx} &= f, \quad \forall x \in \Omega = (0, \ell) \\ u &= 0, \quad \text{à } x = 0 \\ u' &= 0, \quad \text{à } x = \ell \end{aligned}}$$

Équations classiques

L'EDO $-T\ u'' = f$ est un exemple de **l'équation de Poisson**. En dimensions 2 et 3, l'équation de Poisson est une EDP donnée par: $-\Delta u = f$, où

$$\boxed{\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \text{div grad } u = \text{Opérateur de Laplace}}$$

Autres EDP classiques:

Laplace:	$-\Delta u = 0$
Poisson:	$-\Delta u = f$
Helmholtz:	$-\Delta u - k^2 u = f$
Convection-diffusion:	$-\Delta u + \vec{\beta} \cdot \nabla u = f$
Équation de la chaleur:	$-\nabla \cdot (\alpha \nabla u) + u_t = f$

La raison pour laquelle on utilise un signe "$-$" devant l'opérateur de Laplace deviendra claire plus tard.

Solution du problème de la caténaire

$$\boxed{\begin{aligned} -T\,u_{xx} &= f, \quad \forall x \in \Omega = (0,\ell) \\ u &= 0, \quad \text{at } x = 0 \\ u' &= 0, \quad \text{at } x = \ell \end{aligned}}$$

1. Méthode analytique. On obtient par intégration:

$$\boxed{u(x) = -\frac{f}{2T}x^2 + Cx + D}$$

   où les constantes C and D sont calculées à partir des CL:

$$\begin{aligned} &u(0) = 0 \;\Rightarrow\; D = 0 \\ &u'(\ell) = 0 \;\Rightarrow\; u'(\ell) = -f\ell/T + C = 0 \;\Rightarrow\; C = f\ell/T \end{aligned}$$

$$\boxed{u(x) = -\frac{f}{2T}x^2 + \frac{f\ell}{T}x = \frac{f}{2T}x(2\ell - x) = -\frac{\rho g}{2T}x(L - x)}$$

Solution du problème de la caténaire

2. Séries de puissances. L'idée est de chercher des solutions de la forme:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

On remplace $u(x)$ dans l'équation pour obtenir:

$$-Tu'' = -T\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n\right) = f$$

$$-2a_2 - 6a_3 x - 12a_4 x^2 - \ldots = f/T, \qquad \forall x \in (0,\ell)$$

$$(2a_2 + f/T) + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \ldots = 0, \qquad \forall x \in (0,\ell)$$

de sorte que:

$$a_2 = -f/(2T), \quad a_n = 0, \quad n = 3, 4, \ldots$$

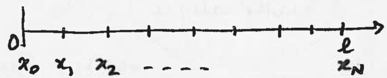
Ainsi, la solution est donnée par: $u(x) = a_0 + a_1 x - f/(2T)x^2$, et on trouve a_0 et a_1 en utilisant les CL comme auparavant.

Solution du problème de la caténaire

2. Séries de puissances. Si, pour un problème donné, les coefficients a_n de la série ne s'annulent pas quand $n \to \infty$, on peut chercher une approximation u_N de u par troncature:

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$$

Le nombre N est alors appelé un paramètre de discrétisation.



Par la méthode dite de collocation, u_N doit satisfaire l'EDO aux points $x_n = 1, \ldots, N-1$ et les CL en x_0 et x_n.

$$\left.\begin{aligned} -Tu_N''(x_n) &= f, \quad \forall n = 1, \ldots, N-1 \\ u(x_0) &= 0 \\ u'(x_N) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{système linéaire de} \\ N+1 \text{ équations et} \\ N+1 \text{ inconnus} \end{array}$$

Problème: matrice mal conditionnée (polynômes de degré élevé).

Solution du problème de la caténaire

3. Séries de Fourier.

$$\boxed{u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}}$$

Les fonctions 1, $\cos n\pi x/\ell$, et $\sin n\pi x/\ell$, forment une base de l'espace $L^2(0,\ell)$. De plus, les fonctions sont orthogonales par rapport au produit scalaire de L^2.

On peut chercher une solution approchée u_N de u en tronquant la série de Fourier:

$$\boxed{u(x) \approx u_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}}$$

Cependant, la méthode de collocation n'est pas optimale pour trouver les $2N+1$ inconnues car elle ne prend pas en compte la propriété d'orthogonalité des fonctions (matrice pleine).

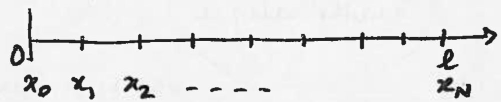
Méthode des éléments finis

L'idée principale de la MEF classique est de trouver des solutions approchées u_h de u sous la forme:

$$\boxed{u(x) \approx u_h(x) = \sum_{i=0}^{N} u_i \phi_i(x)}$$

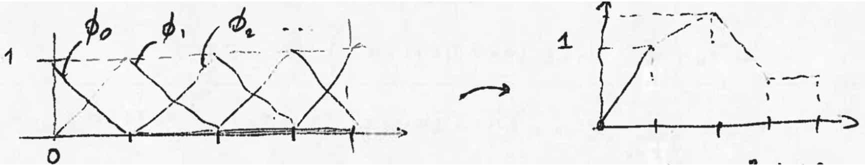
où les fonctions $\phi_i(x)$ sont des **fonctions de base, polynomiales par morceaux et continues,** et les coefficients u_i sont appelés les **degrés de liberté**.

Ici, le paramètre h de discrétisation fait référence à la taille des éléments:



Méthode des éléments finis

Exemple de fonctions de base linéaires par morceaux:



$$u_h(x) = \phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_2(x) + \frac{1}{2}\phi_3(x) + \frac{1}{2}\phi_4(x)$$

Cependant, on ne peut pas utiliser la méthode de collocation pour trouver les degrés de liberté u_i car les fonctions de base ϕ_i ne sont pas deux fois différentiables aux points x_i, $i = 1, \ldots, N-1$.

Autrement dit, la forme forte du problème ne se prête pas à la MEF et il est nécessaire de formuler une forme plus faible de l'équation différentielle pour se débarasser des dérivées secondes.

Formulation faible

Problème fort:

$$\boxed{\begin{aligned} -T\,u_{xx} &= f, \quad \forall x \in \Omega = (0,\ell) \\ u &= 0, \quad \text{à } x = 0 \\ u' &= 0, \quad \text{à } x = \ell \end{aligned}}$$

Procédure pour obtenir la forme faible d'un problème :

1. Multiplier l'équation par une fonction arbitraire dans $C^\infty(\Omega)$ (function test) :

$$-Tu''v = fv$$

2. Intégrer sur le domaine $\Omega = (0,\ell)$:

$$\int_0^\ell -Tu''vdx = \int_0^\ell fvdx$$

Formulation faible

3. Intégrer par partie $(-u''v = u'v' - (u'v)')$:

$$\int_0^\ell Tu'v'dx - \int_0^\ell T(u'v)'dx = \int_0^\ell fvdx$$

4. Intégrer la deuxième intégrale (en 2D/3D, on utilise le théorème de la divergence):

$$\int_0^\ell Tu'v'dx - Tu'(\ell)v(\ell) + Tu'(0)v(0) = \int_0^\ell fvdx$$

5. Appliquer les conditions aux limites :

CL de Neumann: $u'(\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad Tu'(\ell)v(\ell) = 0$

CL de Dirichlet: On choisit $v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad Tu'(0)v(0) = 0$

$$\int_0^\ell Tu'v'dx = \int_0^\ell fvdx, \quad \forall v \in C^\infty(\Omega),\ v(0) = 0$$

Formulation faible

6. Identification de l'espace U des fonctions admissibles u et de l'espace V des fonctions test v:
   On définit U et V de sorte que les intégrales soient bien définies, i.e.

$$\left|\int_0^\ell Tu'v'dx\right| < \infty, \quad \left|\int_0^\ell fvdx\right| < \infty$$

   et que les fonctions u and v satisfassent $u(0) = 0$ et $v(0) = 0$.

7. Formulation faible du problème : Soient T et f donnés,

$$\boxed{\text{Trouver } u \in U \text{ telle que } \quad \int_0^\ell Tu'v'dx = \int_0^\ell fvdx, \quad \forall v \in V}$$

   ou, en introduisant la forme bilinéaire $B(u, v) = \int_0^\ell Tu'v'dx$ et la forme linéaire $F(v) = \int_0^\ell fvdx$,

$$\boxed{\text{Trouver } u \in U \text{ telle que } \quad B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V}$$

Résumé du cours

- La MEF est une méthode numérique bien établie pour obtenir des solutions approchées de modèles basés sur des EDP.
- Les errors dans les solutions EF, lorsque comparées à la réalité, résultent à la fois du choix du modèle et du choix de la discrétisation.
- La MEF peut être utilisée dans tous les domaines des sciences et du génie sitôt que les problèmes impliquent la résolution d'EDO ou d'EDP.
- La MEF classique consiste à trouver des solutions approchées sous la forme:

  $$\boxed{u_h(x) = \sum_{i=0}^{N} u_i \phi_i(x), \quad \forall x \in \Omega}$$

  où les fonctions de base ϕ_i sont des fonctions polynomiales par morceaux et globalement continues. Les inconnues u_i sont appelées les degrés de liberté.
- Formulation faible d'un problème