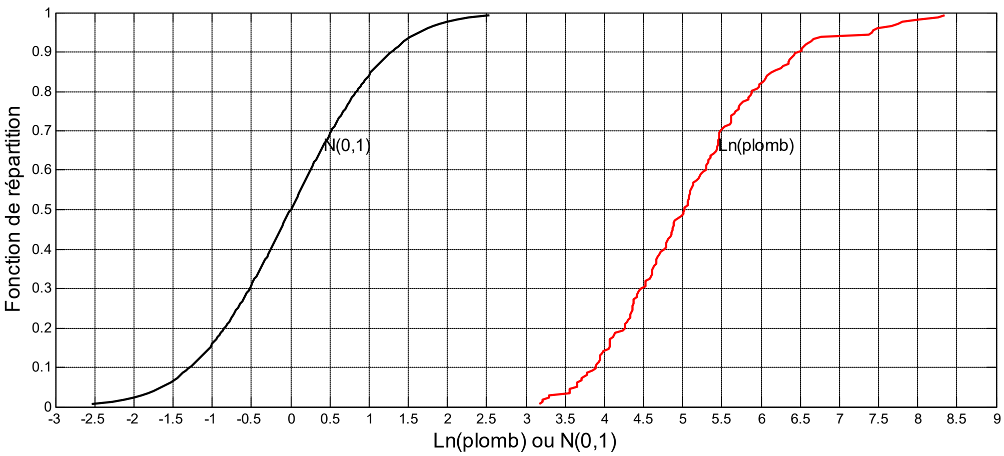
Exercices pour les simulations

1- Transformation gaussienne

Lorsque la distribution n'est pas normale, on peut transformer la variable Z(x) vers Y(x) qui lui suit une distribution normale. Toutefois la transformation n'assure pas que Y(x) soit multigaussien (e.g. données de Dallas). Si le champ n'est pas gaussien, le variogramme de Z(x) ne sera pas reproduit exactement, de même que toutes les covariances et covariances croisées des indicatrices.
La transformation gaussienne se fait habituellement sous forme graphique.

Ex. de transformation gaussienne : données ponctuelles de Dallas pour le plomb.



a) On a observé Pb=250 ppm. Quelle valeur N(0,1) doit-on associer à cette valeur de Pb pour la simulation? Idem pour Pb=50 ppm.

b) On a simulé la valeur normale 1.5. Quelle valeur de Pb doit-on associer à cette valeur simulée? Idem pour N(0,1)= -1.

c) Pour représenter la teneur en plomb d'un bloc de 30m x 30m, on simule 25 valeurs normales corrélées sur autant de points d'une grille centrée dans le bloc. Doit-on :

i. faire la moyenne des valeurs normales et appliquer la transformation inverse à cette moyenne pour obtenir $Ln(Z_v)$ puis évaluer l'exponentielle ou
ii. transformer chaque valeur normale en Ln(plomb) et faire la moyenne des 25 valeurs avant de prendre l'exponentielle ou
iii. transformer chaque valeur ponctuelle vers Ln(plomb), évaluer l'exponentielle pour chaque valeur séparément et faire la moyenne des 25 valeurs de plomb obtenues ?

Pourquoi?

d) On obtient les valeurs normales simulées (-2, -1.5 et -1). Calculez les valeurs de plomb correspondantes et l'écart-type de ces valeurs de plomb. Faites la même chose avec les valeurs normales (1, 1.5, 2). Que peut-on conclure?

2- Post-conditionnement par krigeage simple

Le tableau suivant présente 20 valeurs simulées (non-conditionnellement) d'une v.a. suivant un variogramme sphérique avec C=10, a=30, aux coordonnées x=1 à x=20. Des données ont été observées aux points x_5, x_{10}, et x_{20}.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Z(x)	-	-	-	-	0.02	-	-	-	-	-0.53	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-2.80
Z*(x)	0.23	0.18	0.14	0.08	0.02	-0.08	-0.19	-0.30	-0.41	-053	-0.75	-0.97	-1.20	-1.42	-1.65	-1.88	-2.11	-2.34	-2.57	-2.80
$Z_s(x)$	-3.55	-2.74	-1.64	-1.89	-1.37	-1.74	-3.16	-3.39	-3.51	-2.74	-3.60	-2.80	-1.39	-0.33	-1.05	-0.04	0.25	1.23	2.53	2.24
$Z_s^*(x)$	-1.19	-1.25	-1.29	-1.33	-1.37	-1.66	-1.94	-2.21	-2.48	-2.74	-2.26	-1.77	-1.27	-0.77	-0.27	0.23	0.74	1.24	1.74	2.24
$Z_{sc}^*(x)$																				

a) Complétez la dernière ligne du tableau donnant, aux points 1 à 20, les valeurs simulées conditionnellement aux données observées en x_5, x_{10}, et x_{20}.

b) Démontrez que si l'on estime la teneur d'un point par une simulation conditionnelle en ce point, la variance théorique de l'erreur est le double de celle d'un krigeage simple.

3- Recuit simulé

À l'itération « n » de l'algorithme, on a O_n=100. Le paramètre de température « T » vaut 10. Déterminer si l'on doit accepter une perturbation candidate si :
a) $O_{candidat}$=95, et rand=0.67 (où rand est un nombre aléatoire tiré d'une loi U(0,1))
b) $O_{candidat}$=105 et rand=0.67
c) $O_{candidat}$=105 et rand=0.43
d) $O_{candidat}$=105, rand=0.43 mais T vaut 5 plutôt que 10.

e) comparant c) et d) comment se comporte l'algorithme au fur et à mesure que l'on décroît le paramètre de température?

4- Contraintes minières

Lorsque l'on exploite des blocs dans une mine ou lorsque l'on décontamine un site, on n'opère pour ainsi dire jamais librement sur chaque bloc séparément, l'ordre dans lequel apparaissent les teneurs est habituellement très important. Supposons que les teneurs de 3 blocs sont 2, 3 et 4, le coût de minage est 0.5 et le coût de traitement est 2.6. Pour accéder à un bloc, on doit miner les blocs qui le précèdent. Si un bloc est miné, on peut ou non le traiter.
Soit les scénarios suivants :

	Scenario			
bloc	a)	b)	c)	d)
A	4	2	2	3
B	2	4	3	4
C	3	3	4	2

direction du minage

a) Calculer le tonnage de minerai, la teneur moyenne du minerai, le tonnage de stérile qui doit être miné et le profit de chaque scénario sous la contrainte minière et comparez avec les mêmes quantités en sélection libre.
b) Dans les scénarios a) à d), le tonnage de minerai est égal ou supérieur à celui obtenu par sélection libre. Illustrez un scenario de teneurs de blocs où le tonnage de minerai est inférieur (conservez les mêmes coûts).
c) Dans les scénarios a) à d), la teneur du minerai est égale ou inférieure à celle obtenue par sélection libre. Illustrez un scenario de coûts et teneurs de blocs où la teneur du minerai est supérieure à celle obtenue par sélection libre.
d) Est-il possible d'avoir un profit sous contrainte minière qui soit supérieur à celui obtenu par sélection libre?

Corrigé

1- a) Pb=250 => y= 0.54; Pb= 50 => y= -1.24

b) y=1.5 => Pb=810; y= -1 => Pb=59

c) iii. Physiquement, la teneur d'un bloc est la moyenne des teneurs ponctuelles dans le bloc. Comme les transformations impliquées sont non-linéaires, il faut appliquer les transformations aux teneurs ponctuelles (ainsi le log d'une moyenne de valeurs n'est pas la moyenne des log des valeurs. Ici on veut la moyenne des log des valeurs).

d) (-2, -1.5 et -1) => (27 40.5 et 59) dont l'écart-type (division par n-1) est 16.1 alors que (1, 1.5 et 2) =>(486, 810 et 2459) dont l'écart-type est 1076. On voit donc que l'écart-type dépend des teneurs, contrairement à l'écart-type de krigeage et similairement à l'écart-type conditionnel calculé par krigeage d'indicatrices (voir TP-9)

2- a) On calcule $Z^*(x)+(Z_s(x)-Z_s^*(x)$, ce qui donne :

b) $Var(Z(x)-Z_{sc}(x)) = Var(\{Z(x)-Z^*(x)\}-\{Z_s(x)-Z_s^*(x)\}) = \sigma_{ks}^2 + \sigma_{ks}^2$ (la covariance entre l'erreur réelle et l'erreur simulée étant nulle).

3- a) O décroît, on accepte toujours.

b) on accepte avec probabilité exp(-5/10)=0.606. Comme 0.67>0.606, on refuse la modification.

c) ici comme 0.43 < 0.606 on accepte la modification proposée.

d) on accepte avec probabilité exp(-1)=0.368. Comme 0.43 >0.368, on refuse la modification.

e) il devient de plus en plus difficile d'accepter une modification qui augmente la fonction O au fur et à mesure que l'on diminue T.

4-

a) Sélection libre : on mine seulement le bloc de teneur 4 : tonnage=1, teneur moyenne=4, profit : 4-2.6-0.5 = 0.9

Scenario a) comme libre.

Scenario b) on mine A et B, mais seul B est traité. Tonnage de minerai 1, teneur moyenne 4, profit 4-2*0.5-2.6=0.4, tonnage de stérile 1.

Scenario c) on mine A, B et C. On traite B et C. Tonnage de minerai 2, teneur moyenne 3.5, profit (4+3)-3*0.5-2*2.6)= 0.3. Tonnage de stérile 1. Noter que l'on doit traiter B même si sa valeur nette est 3-0.5-2.6= -0.1 car si on ne le traite pas, on aura un profit de : 4-3*0.5-2.6= -0.1

Scenario d) on mine et on traite A et B. Tonnage de minerai 2, teneur moyenne 3.5, profit : (4+3)-2*0.5-2*2.6=0.8. Tonnage de stérile 0.

b) A,B,C = 2, 3, 3.5. On ne mine alors aucun bloc alors que la sélection libre minerait le bloc ayant teneur 3.5.

c) A,B,C= 4, 2, 3.2. La sélection libre prend 4 et 3.2 dont la teneur moyenne est 3.6 alors que la sélection sous contrainte ne prends que 4.

d) Non c'est impossible. C'est la seule fonction qui a un comportement entièrement prévisible en lien avec les contraintes minières. Plus celles-ci sont sévères, plus il y a perte de profits.