Exercices krigeage d'indicatrice

1- En un point x_0 on a estimé par krigeage d'indicatrice ordinaire la fonction de répartition suivante pour le plomb contenu dans le sol :

Seuil c (ppm)	$I_0^*(c)$ (par KI ordinaire)	Valeur représentative de la classe
50	0.2	25
100	0.5	75
200	0.65	150
500	0.9	350
Infini	1	900

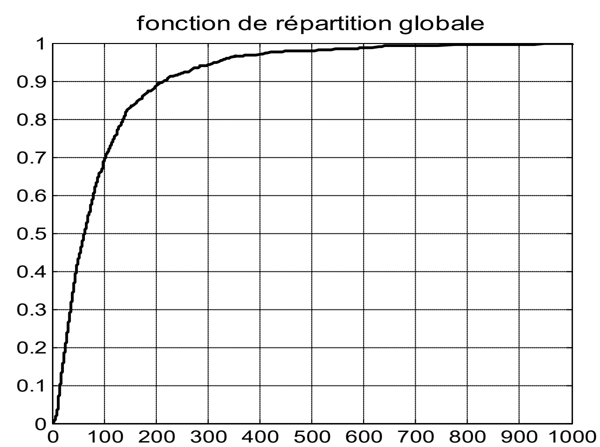
a) Quelle est l'espérance conditionnelle de la concentration de plomb au point x_0?

b) Quelle est la variance conditionnelle?

c) Quelle est la valeur estimée du 85^e percentile au point x_0?

d) Quelle est la probabilité que la teneur en Pb au point x_0 soit supérieure à 400 ppm?

2- Toujours pour le cas de la contamination au plomb, on vous donne la fonction de répartition globale (i.e. non-localisée, obtenue avec tous les échantillons) :



On krige un point x_0 à l'aide de 3 points situés dans le voisinage. Les variogrammes des indicatrices étant proportionnels, on obtient les mêmes poids de krigeage simple et de krigeage ordinaire des indicatrices aux différents seuils 50, 100, 200 et 500.

Point	Pb observé	Poids de krigeage simple des indicatrices	Poids de krigeage ordinaire des indicatrices
x_1	120	0.4	0.5
x_2	80	0.2	0.23
x_3	310	0.3	0.27

a) Effectuez le KI ordinaire et le KI simple aux seuils 50, 100, 200 et 500.

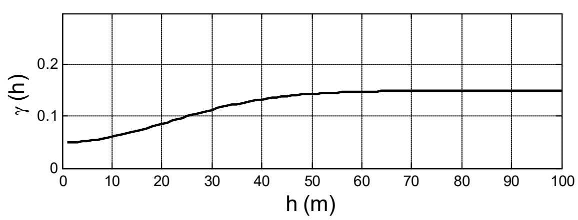
b) Qu'est-ce qui aurait été différent si les variogrammes des indicatrices aux différents seuils n'avaient pas été proportionnels?

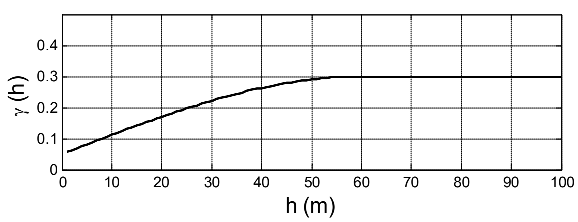
3- Indiquez ce que l'on doit faire aux différents seuils si au point x_3 la seule information disponible est que $Pb(x_3)>310$ ppm?

4- Est-ce que l'espérance conditionnelle calculée par KI est interpolateur exact à un point échantillon lorsqu'on utilise un nombre fixe et limité de seuils comme aux questions précédentes?

5- Quel est le palier attendu de la variable indicatrice pour un seuil correspondant au 70^e percentile de la distribution?

6- Les figures suivantes vous montrent des variogrammes ajustés à des indicatrices sur le Pb (en ppm).





a) Quelles erreurs flagrantes ont été commises dans l'ajustement de ces variogrammes ?
b) Quelles sont les unités des variogrammes illustrés?

7- Soit une indicatrice I_A prenant la valeur 1 quand le facies A est observé et 0 si le faciès B est observé (*ce sont les deux seuls faciès présents*).

a) Quelle relation existe-t-il entre le variogramme de l'indicatrice I_A et le variogramme de l'indicatrice complémentaire $I_B = 1-I_A$.
b) Que vaut le variogramme croisé de I_A, I_B ?
c) Supposant la symétrie en « h » et la présence d'un effet de pépite b_1 et d'une composante sphérique de portée a et d'amplitude b_2 pour l'indicatrice I_A décrivez le modèle linéaire de corégionalisation de ces deux indicatrices. Est-il admissible?
d) Est-ce un modèle à covariances proportionnelles? Concluez sur l'utilité du cokrigeage de I_A et I_B.

8- Quand il y a p>2 faciès, que peut-on dire de :

a) $\sum_{i=1}^{p} I_i(x)$

b) $$Var\left(\sum_{i=1}^{p} I_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} Cov(I_i(x), I_j(x))$$

c) Qu'est-ce que ceci implique sur les matrices de coefficients du modèle linéaire de corégionalisation à p variables?

Corrigé

Q1 a) E[Z|…]= 0.2*25+0.3*75+0.15*150+0.25*350+0.1*900 = 227.5
b) $E[Z^2|\ldots]-E[Z|\ldots]^2 = 116812.5-227.5^2$ = 65 056 (ou écart-type de 255)
c) 200+(0.85-0.65)/(0.9-0.65)*(500-200) = 440
d) 1- (0.65+(0.9-0.65)*(400-200)/(500-200))=0.183

Q2- a)

Point	Z(x)	50	100	200	500
x_1	120	0	0	1	1
x_2	80	0	1	1	1
x_3	310	0	0	0	1
Kiord	-	0	0.23	0.73	1
F(c)	-	0.4	0.7	0.88	0.98
Ki simple	-	0.1*0.4=0.04	0.2+0.1*0.7=0.27	0.6+0.1*0.88=0.69	0.9+0.1*0.98=0.99

b) les poids auraient changé de seuil en seuil

Q3- Seul $I(x_3,500)$ serait modifié (indéfini et ne peut être utilisé à ce seuil.

Q4- Non, car on aura un poids de 1 au point concerné. On aura donc une probabilité de 1 d'être dans la classe où se situe la valeur observée. On estimera l'espérance conditionnelle par la valeur représentative de la classe. C'est seulement si la classe devient infiniment étroite que les deux coïncideront.

Q5- par définition 0.3*0.7=0.21

Q6a) Il est impossible d'avoir un modèle gaussien de variogramme pour une variable indicatrice. Il est impossible d'avoir un palier qui dépasse 0.25, le maximum théorique pour p(1-p) (lorsque p=0.5).
b) aucune unité puisque ce sont des variables indicatrices.

Q7- a) $\gamma_{IB,IB}(h)$ $=0.5E((IB(x)-IB(x+h))^2] =0.5E[((1-IA(x)-(1-IA(x+h))^2]=0.5E[(IA(x+h)-IA(x))^2]$ = $\gamma_{IA,IA}(h)$
on aura donc le même variogramme pour tout h.

b) 1/2E[(IA(x)-IA(x+h))(IB(x)-IB(x+h))] =1/2E[(IA(x)-IA(x+h))(1-IA(x)-(1-IA(x+h))]= - $\gamma_{IA,IA}(h)$

c) $\begin{bmatrix} b_1 & -b_1 \\ -b_1 & b_1 \end{bmatrix}\delta(h)+\begin{bmatrix} b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix}Sph\acute{e}r(a)$. Les deux déterminants valent 0, donc le modèle est admissible.

Oui c'est un modèle à covariances proportionnelles. On pourrait le réécrire comme
$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}(b_1\,\delta(h)+b_2 Spher(a))$. Le corkigeage est donc inutile (de toute façon les matrices de cokrigeage seraient toutes singulières).

Q8
a) =1 en tout point
b) la variance vaut 0 puisque la somme est constante.
c) chaque matrice de coefficients est singulière.