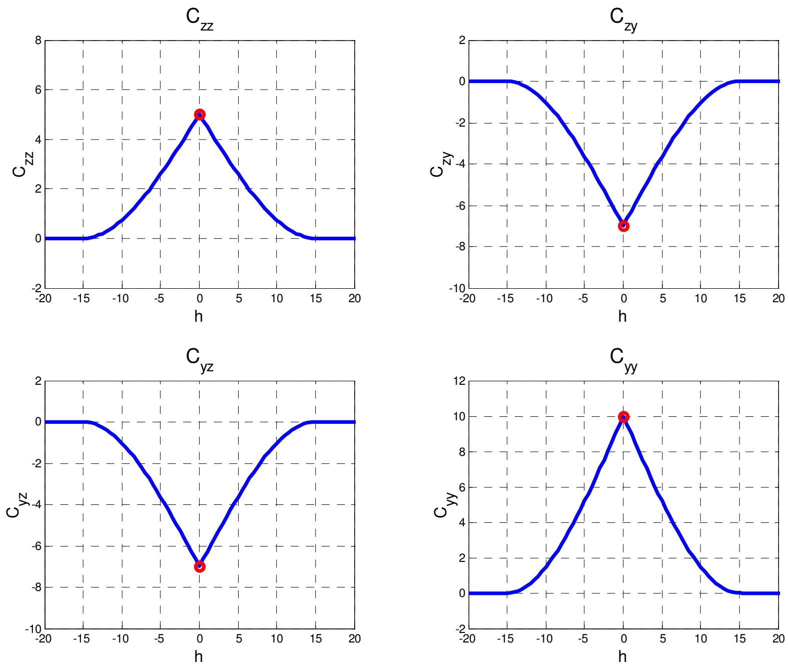
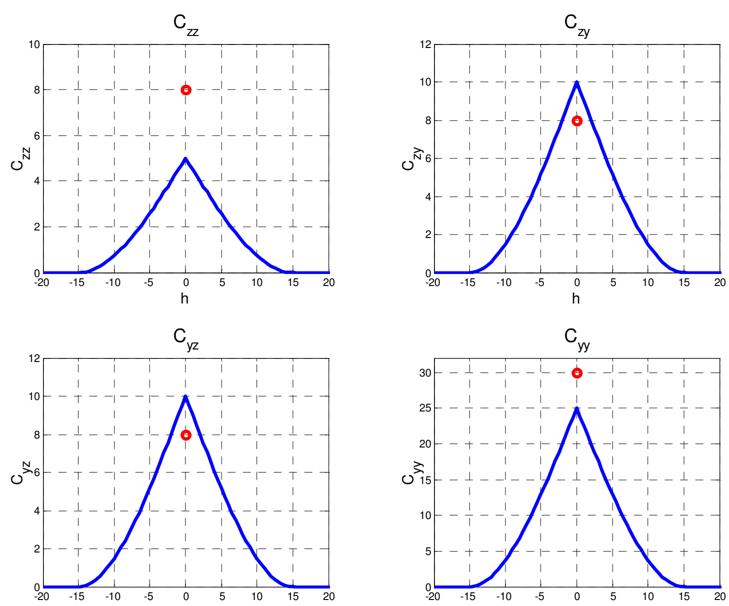
Exercices sur le cokrigeage

1- Décrire le modèle linéaire de corégionalisation correspondant; est-il admissible?

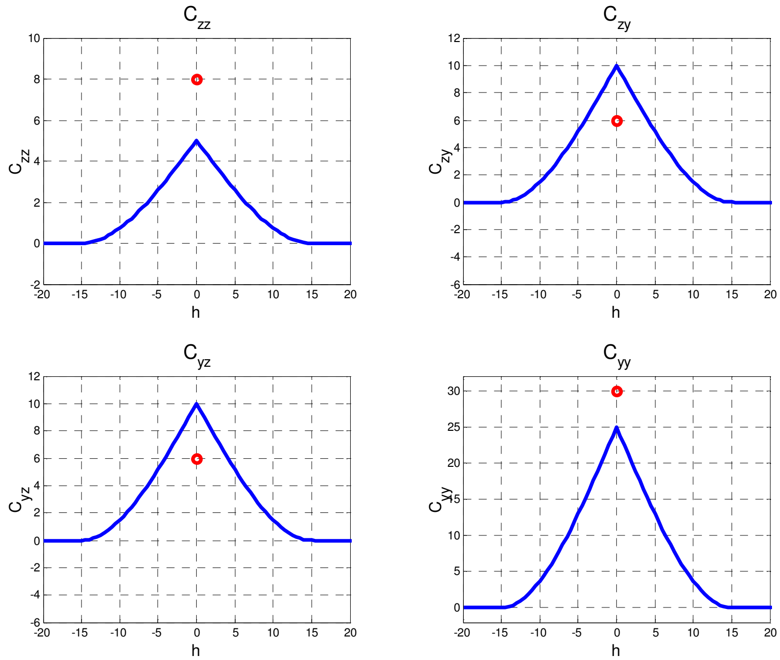
a)



b)



c)



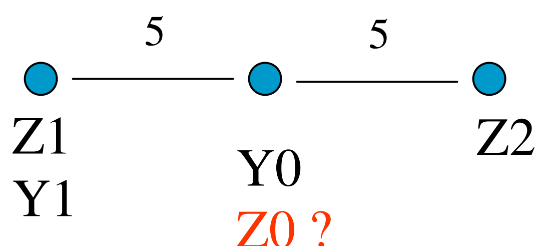
2- Construire le système de cokrigeage ordinaire

Le modèle de corégionalisation linéaire est:

$$\begin{bmatrix} C_{zz}(h) & C_{zy}(h) \\ C_{yz}(h) & C_{yy}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(h) + \begin{bmatrix} 2 & 2.4 \\ 2.4 & 4 \end{bmatrix} Sphérique(a = 30m, C = 1)$$

où δ (h) =1 si |h|=0 et 0 si |h|>0

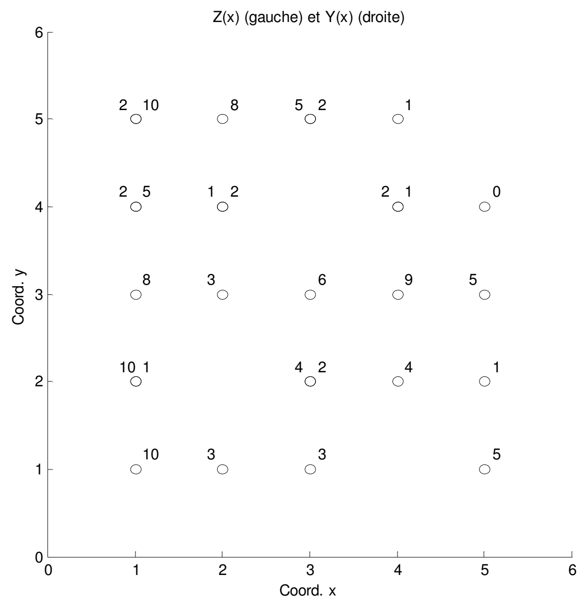
La configuration des données utilisées pour le cokrigeage est la suivante:



Note: la covariance sphérique (avec C=1) vaut (1-(1.5|h|/a – 0.5 (h/a)^3), soit avec a=30:

h	C(h)
0	1
5	0.752
10	0.519

3- Calculer la covariance croisée et le variogramme croisé



La figure précédente montre les localisations des données Z(x) et Y(x) obtenues sur un site. Les valeurs Z(x) apparaissent à gauche des cercles, les Y(x) à droite.

- Calculez le variogramme croisé pour Z(x), Y(x) pour h_x= -1, 1, 2 (avec h_y=0). Indiquez le nombre de paires retenues.

- Calculez la covariance croisée $C_{zy}(h)$ pour h_x= -1, 0, 1, 2 (avec h_y=0). Le vecteur h_x est orienté de Z vers Y. Indiquez le nombre de paires retenues. Les moyennes pour Z et Y sont 3.7 et 4.33.

4- Covariance de Z(x) avec sa dérivée

Z(x) suit, en 1D, une covariance gaussienne $C(h) = 5\exp(-h^2/10^2)$

a) Quelle est la portée effective de ce modèle?

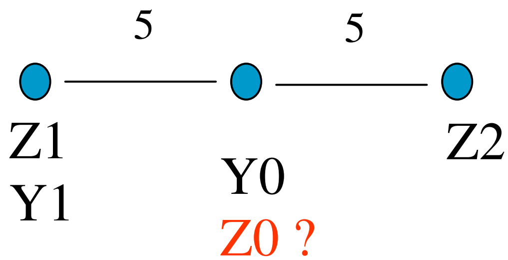
b) Quelle est la covariance de Z(x) avec sa dérivée en x+h?

c) À quelle distance la covariance minimale est-elle atteinte? la covariance maximale?

d) Quelle est la valeur de la covariance maximale? Quelle est la corrélation maximale?

5- Cokrigeage de Z(x) avec sa dérivée

On veut cokriger Zau point x_0. Z(x) suit, en 1D, une covariance gaussienne $C(h) = 7\exp(-h^2/10^2)$.
Y(x) = dZ(x)/dx. On a la disposition suivante des points.



Construire le système de cokrigeage simple correspondant.

Note, on a : Cov(Z(x),Z(x+h)) = C exp($-h^2/a^2$)
Cov(Z(x), Y(x+h)) = -2 C/a^2 h exp($-h^2/a^2$)
Cov(Y(x), Z(x+h)) = 2 C/a^2 h exp($-h^2/a^2$)
Cov(Y(x),Y(x+h)) = ($2C/a^2 - 4Ch^2/a^4$) exp($-h^2/a^2$).

6- Cokrigeage ordinaire sous forme matricielle

Soit :

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\alpha} \\ \mu_z \\ \mu_y \end{bmatrix}, \ \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{zz} \\ \mathbf{k}_{yz} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{zz} & \mathbf{K}_{zy} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{yz} & \mathbf{K}_{yy} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le Lagangien (variance d'estimation augmentée des contraintes) s'écrit alors :

$$L = Var(Z_0) + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\tilde{\boldsymbol{\lambda}} - 2\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathbf{T}}\mathbf{k}$$

On trouve le minimum en dérivant et en posant les dérivées partielles égales à 0. Ceci donne :

$$\frac{dL}{d\tilde{\lambda}} = 0 = \mathbf{K}\tilde{\boldsymbol{\lambda}} - \mathbf{k} \quad \text{ou} \quad \mathbf{K}\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{k}$$

On peut à l'optimum réécrire le Lagangien comme :

$L = Var(Z_0) - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathbf{T}}\mathbf{k}$ = Var(Z_0-Z_0^*)
puisqu'à l'optimum le Lagrangien est égal à la fonction à minimiser sous contrainte.

Ces expressions demeurent valides quel que soit le nombre de variables secondaires utilisées pour le cokrigeage. Tout ce qu'il faut faire c'est rajouter les blocs supplémentaires de covariances et les termes supplémentaires pour les contraintes.

Corrigé

1- voir présentation powerpoint sur le cokrigeage

2-
K=

	Z1	Y1	Y0	Z2	μ_z	μ_y
Z1	3	2.4	1.8056	1.037	1	0
Y1	2.4	5	3.0093	1.2444	0	1
Y0	1.8056	3.0093	5	1.8056	0	1
Z2	1.037	1.2444	1.8056	3	1	0
contrainte λ	1	0	0	1	0	0
contrainte α	0	1	1	0	0	0

k=

	Z0
Z1	1.5046
Y1	1.8056
Y0	2.4
Z2	1.5046
contrainte λ	1
contrainte α	0

3- Pour le variogramme croisé, à h=1, on ne trouve que les points en y=4 et x=1, x=2 qui ont les 2 variables présentes. On calcule 0.5*(1-2)*(2-5)=1.5
pour h=2, on a les paires en y=5 (x=1 et x=3), y=4 (x=2 et x=4), y=2 (x=1 et x=3).
On calcule 0.5/3*((5-2)*(2-10)+(2-1)*(1-2)+(4-10)*(2-1))=0.5*(-24-1-6)/3= -31/6

Pour la covariance croisée, on a à

h= -1 on a y=5 (x=2 et x=3), y=4 (x=2 et x=1), y=3 (x=1 et x=2), y=3 (x=4 et x=5), y=1 (x=1 et x=2)
on calcule C(-1)= 0.50
h=0, on a 7 paires (points où les 2 variables sont présentes), on calcule C(0)=-3.36
h=1, on a 7 paires, on calcule C(h)=0.06
h=2, on a 5 paires, on calcule C(h)= -1.20 =
((2-3.7)*(2-4.33))+((1-3.7)*(1-4.33))+((3-3.7)*(9-4.33))+((10-3.7)*(2-4.33))+((4-3.7)*(1-4.33))/5

4 a) la portée effective est $10\sqrt{3}$ (quand h=$10\sqrt{3}$, alors C(h)=0.05C)

b) En dérivant C(h) par rapport à h, on trouve; $-2*C/a^2*h*\exp(-h^2/a^2)$

c) En dérivant cette covariance par rapport à h à nouveau et en posant la dérivée égale à zéro, on trouve:

$(4Ch^2/a^4-2C/a^2)\exp(-h^2/a^2)=0 \Rightarrow h= \pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

d) À la distance h= -a/$\sqrt{2}$, on trouve Cov= $\sqrt{2}$ *C/a exp(-0.5), La fonction de covariance de la dérivée est : $-(4Ch^2/a^4-2C/a^2)\exp(-h^2/a^2)$. À h=0, on a la variance de la dérivée => $2C/a^2$.La corrélation maximale est donc $\frac{\sqrt{2C}/a\exp(-0.5)}{\sqrt{2C}/a*\sqrt{C}} = \exp(-0.5) = 0.607$

5-
K=

	Z1	Z2	Y1	Y0
Z1	7	2.5752	0	-0.54516
Z2	2.5752	7	0.51503	0.54516
Y1	0	0.51503	0.14	0.05452
Y0	-0.54516	0.54516	0.05452	0.14

k=

	Z0
Z1	5.4516
Z2	5.4516
Y1	0.54516
Y0	0

le vecteur de poids obtenu est :

$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \begin{bmatrix} 1.2616 \\ -0.288 \\ 3.069 \\ 4.839 \end{bmatrix}$. La variance de cokrigeage est : $7 - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathbf{T}}\mathbf{k} = 0.019$

Par comparaison, le krigeage simple fournit les poids :

$\lambda = \begin{bmatrix} 0.56935 \\ 0.56935 \end{bmatrix}$ et la variance de krigeage simple est : 0.7923