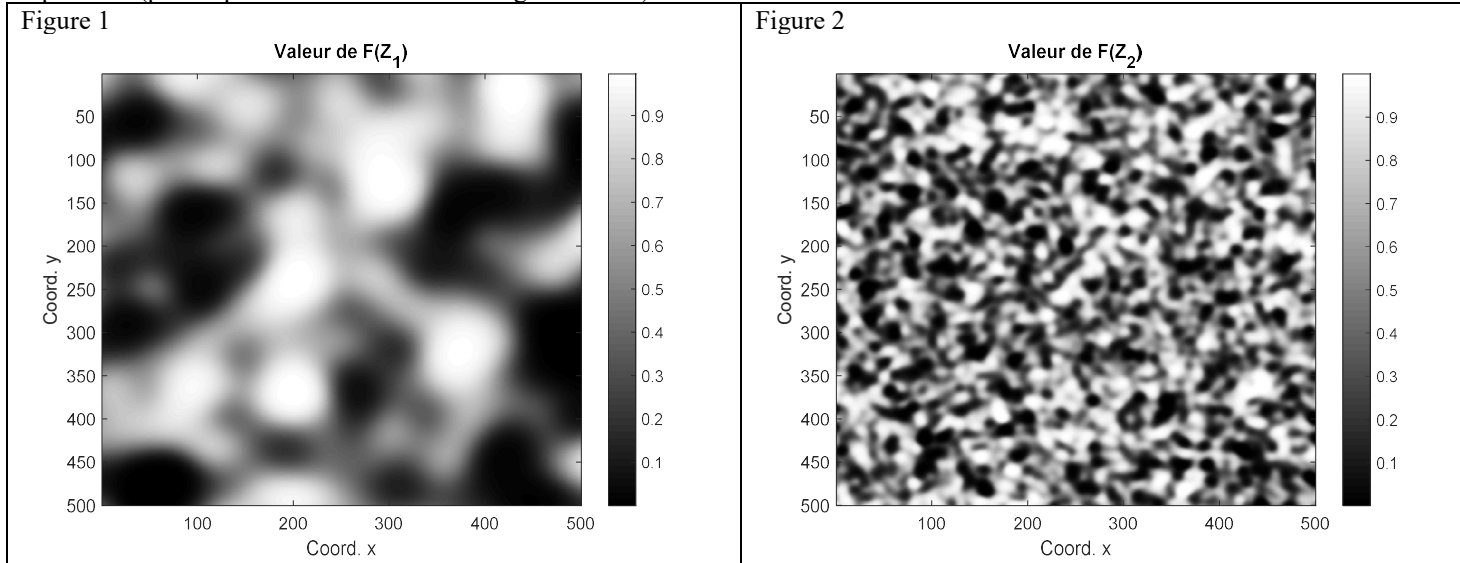


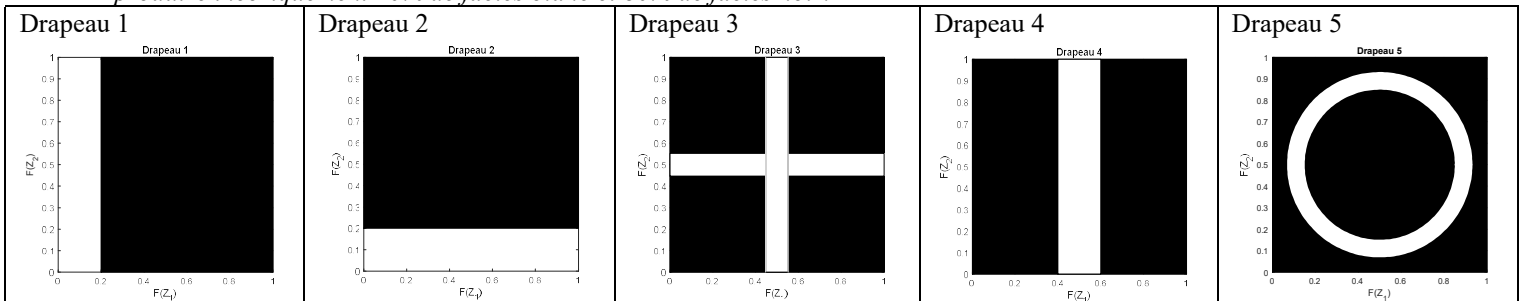
**Final 2019**  
**Question 1 (12 points)**

Les figures 1 et 2 montrent la simulation de deux champs gaussiens représentés par les valeurs de la fonction de répartition (plutôt que directement les valeurs gaussiennes).

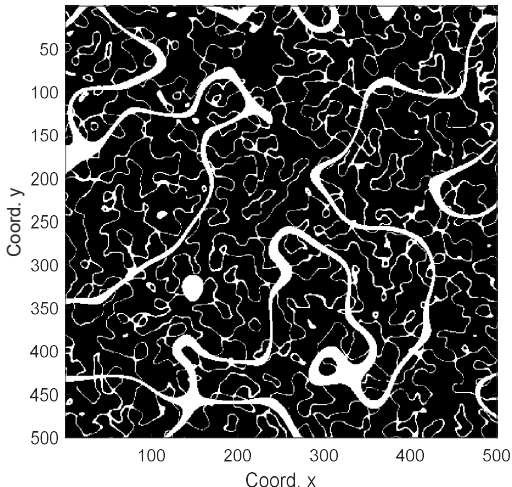
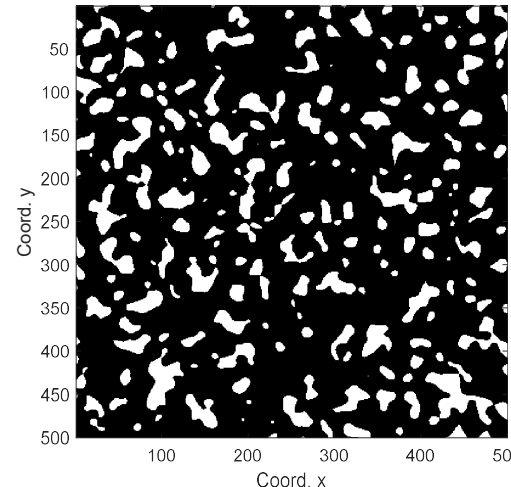
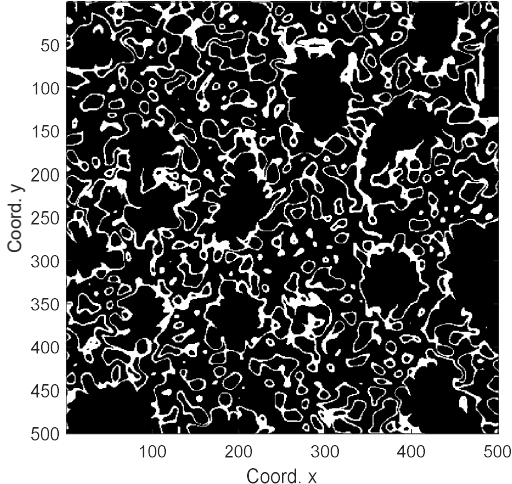
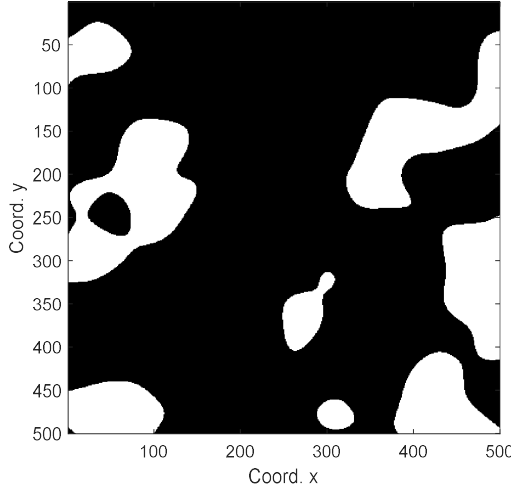


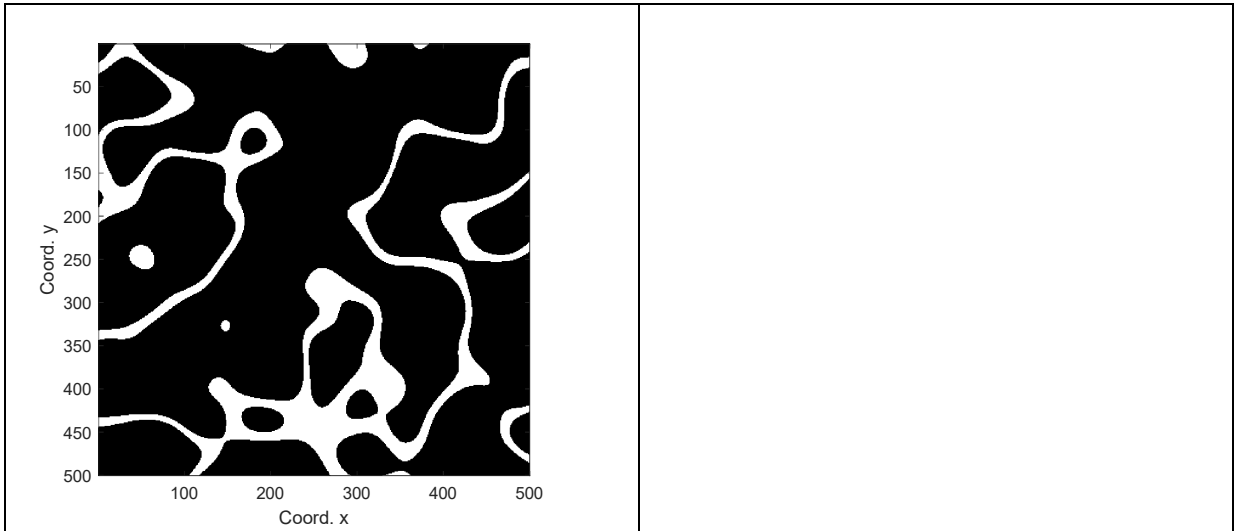
2 pts a) Les deux variogrammes suivants ont été utilisés : gaussien avec  $a_{eff}=17$  et gaussien avec  $a_{eff}=87$  et Gaussien. Identifiez le modèle utilisé pour chacune des figures 1 et 2.

4 pts b) On vous montre cinq drapeaux de codage appliqués aux deux champs gaussiens précédents et cinq réalisations de faciès (page suivante). Associez chaque réalisation au drapeau lui correspondant (voir au bas de la page suivante). Sur les drapeaux de codage, l'axe horizontal est  $F(Z_1)$  et l'axe vertical est  $F(Z_2)$ . Chaque drapeau est conçu pour produire théoriquement 20% de faciès blanc et 80% de faciès noir.



Question 1 (suite)

Réalizations															
<p>A</p> 	<p>B</p> 														
<p>C</p> 	<p>D</p> 														
<p>E</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">Réponses</th> </tr> <tr> <th>Réalisation</th> <th>Drapeau</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td></td> </tr> <tr> <td>B</td> <td></td> </tr> <tr> <td>C</td> <td></td> </tr> <tr> <td>D</td> <td></td> </tr> <tr> <td>E</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Réponses		Réalisation	Drapeau	A		B		C		D		E	
Réponses															
Réalisation	Drapeau														
A															
B															
C															
D															
E															



**Question 1 (suite)**

2 pts c) Les simulations de faciès précédentes ont été obtenues par la méthode plurigaussienne. Identifiez les réalisations qui auraient pu être obtenues par méthode gaussienne tronquée (i.e. avec un seul champ gaussien). Justifiez.

2 pts d) Est-ce que certaines de ces réalisations auraient pu être obtenues par simulation séquentielle d'indicatrices? Si oui, lesquelles? Si non, pourquoi?

2 pts e) Si l'on avait observé les faciès en un certain nombre de points, quelle méthode devrait-on utiliser pour imposer cette information dans les différentes réalisations? (donnez le nom de la méthode sans décrire)

**Question 2 (8 points)**

On vous présente cinq systèmes de cokrigage (A à E) chacun basé sur une hypothèse différente concernant les moyennes de Z et Y. (K désigne une matrice, k un vecteur, ' indique la transposée)

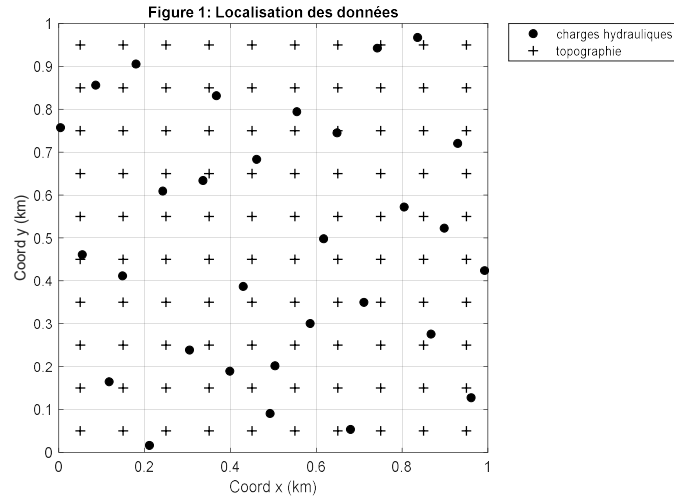
A) <del><math display="block">\begin{bmatrix} K_{zz} &amp; K_{zy} &amp; 1 \\ K_{yz} &amp; K_{yy} &amp; 1 \\ 1' &amp; 1' &amp; 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{zz} \\ k_{yz} \\ 1 \end{bmatrix}</math></del>	B) $\begin{bmatrix} K_{zz} & K_{zy} \\ K_{yz} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{zz} \\ k_{yz} \end{bmatrix}$
C) $\begin{bmatrix} K_{zz} & K_{zy} & 1 \\ K_{yz} & K_{yy} & 0 \\ 1' & 0' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \mu_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{zz} \\ k_{yz} \\ 1 \end{bmatrix}$	D) $\begin{bmatrix} K_{zz} & K_{zy} & 1 & 0' \\ K_{yz} & K_{yy} & 0 & 1' \\ 1' & 0' & 0 & 0 \\ 0' & 1' & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \mu_z \\ \mu_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{zz} \\ k_{yz} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
E) $\begin{bmatrix} K_{zz} & K_{zy} & 0 \\ K_{yz} & K_{yy} & 1 \\ 0' & 1' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \mu_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{zz} \\ k_{yz} \\ 0 \end{bmatrix}$	

Complétez le tableau suivant en indiquant le système de cokrigage correspondant à l'hypothèse énoncée sur les moyennes de Z et Y et en indiquant la forme particulière de l'estimateur (utilisez la même notation que celle des cas 1 et 3)

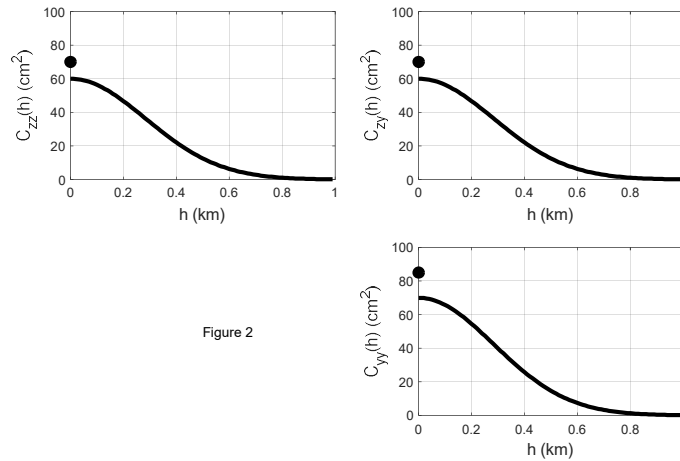
#	Hypothèse sur les moyennes	Système (A à E)	Forme de l'estimateur
1	Les moyennes de Z et Y sont inconnues		$Z^* = \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i Z_i + \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i Y_i$
2	Les moyennes de Z et Y sont inconnues mais égales		
3	Les moyennes de Z et Y sont connues		$Z^* = m_z + \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i (Z_i - m_z) + \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i (Y_i - m_y)$
4	Seule la moyenne de Z est connue		
5	Seule la moyenne de Y est connue		

**Question 3 (16 points)**

La figure 1 donne la localisation de données où l'on a mesuré la charge hydraulique (variable principale Z) dans un aquifère de surface et l'élévation topographique (variable auxiliaire Y). Il y a en tout 30 valeurs de charge et 100 valeurs de topographie.



La figure 2 montre les covariances et la covariance croisée pour Z et Y (l'on a vérifié que la covariance croisée était symétrique en h), le modèle est considéré isotrope.



6 pts a) Spécifiez le modèle linéaire de corégionalisation retenu et vérifiez s'il s'agit d'un modèle admissible.

**Question 3 (suite)**

- 3 pts b) Dans le contexte illustré et avec le modèle de corégionalisation anticipe-t-on que le cokrigeage devrait améliorer significativement l'estimation de la charge par rapport à un krigeage? Justifiez.
- 2 pts c) Par quelle technique pourrait-on vérifier votre réponse fournie en b) en utilisant uniquement l'information actuellement disponible ?
- 2 pts d) Commentez cet énoncé : « étant donné que la covariance croisée est symétrique en  $h$ , on aurait pu calculer le variogramme croisé expérimental, avec les données disponibles, plutôt que la covariance croisée ».
- 3 pts e) On sait que la frontière ouest du domaine est une frontière imperméable. Décrivez une méthode permettant d'inclure cette information dans l'interpolation de la charge hydraulique.

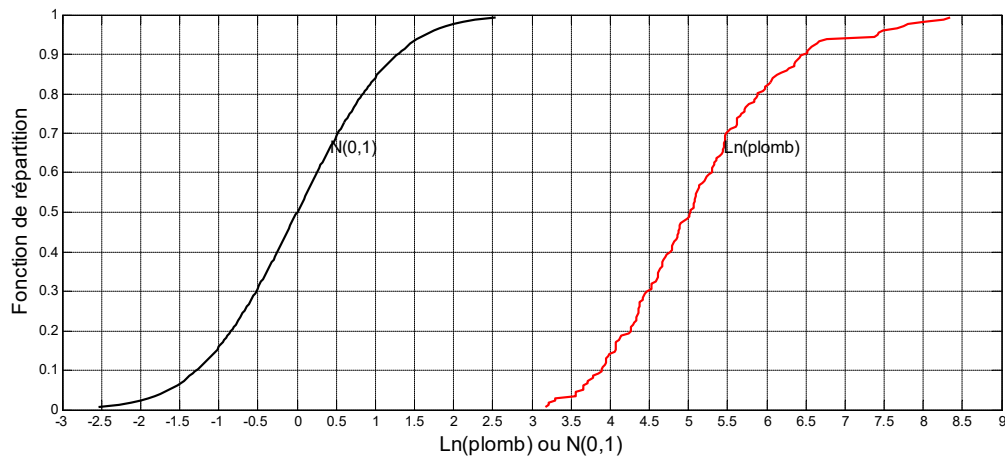
**Question 4 (12 points)**

Indiquez si les énoncés suivants sont vrais ou faux (faites un X dans la colonne appropriée et ne pas justifier). (+1 pour une bonne réponse, -0.5 pour une mauvaise, 0 pour une abstention)

Énoncé	V	F
<i>a) Dans un cokrigeage, les poids associés à la variable secondaire n'ont jamais d'unités.</i>		
<i>b) Dans la méthode SGS, on doit faire l'hypothèse que la distribution de la variable transformée est multinormale. Il n'est pas suffisant que la distribution marginale soit normale.</i>		
<i>c) Dans le SGS, même si l'on doit transformer la variable pour qu'elle soit normale, on doit utiliser le variogramme de la variable originale dans le krigeage propre à cette méthode.</i>		
<i>d) Dans un cokrigeage, les poids de cokrigeage associés à la variable principale (i.e. celle que l'on estime) n'ont jamais d'unités.</i>		
<i>e) La variance de cokrigeage est plus élevée là où localement les valeurs observées varient beaucoup.</i>		
<i>f) Dans un recuit simulé on rejette toujours une modification qui fait croître la fonction objectif que l'on cherche à minimiser.</i>		
<i>g) Dans le krigeage d'indicatrices le calcul de la variance conditionnelle n'implique pas les variances de krigeage des indicatrices correspondant aux divers seuils.</i>		
<i>h) Dans un krigeage d'indicatrices, la variance conditionnelle augmente généralement avec la variabilité des valeurs observées dans le voisinage du point à estimer.</i>		
<i>i) Dans un krigeage d'indicatrices effectué avec <u>un nombre limité de seuils</u>, l'espérance conditionnelle calculée en un point où se trouve une donnée coïncide exactement avec la valeur de la donnée.</i>		
<i>j) Pour un même jeu de données impliquant deux variables, il y a toujours autant ou plus de paires disponibles pour le calcul d'une covariance croisée que pour le calcul d'un variogramme croisé.</i>		
<i>k) On peut construire des intervalles de confiance sur les ressources d'un gisement en effectuant plusieurs réalisations conditionnelles aux données disponibles.</i>		
<i>l) Dans un modèle linéaire de corégionalisation, on doit utiliser uniquement des <u>modèles isotropes</u>.</i>		

**Question 5 (10 points)**

La figure 1 montre les fonctions de répartition d'une  $N(0,1)$  et du  $\ln(\text{plomb})$  obtenu avec les données de Dallas vues au TP10.



**Figure 1**

2 pts a) On a observé trois données ayant les localisations et valeurs suivantes. Compléter le tableau suivant :

Donnée	Coord. x (m)	Coord. y (m)	Pb (ppm)	Ln(Pb)	$N(0,1)$
1	5500	5500	245	5.5	
2	6000	5500	403	6	
3	6500	6500	1097	7	

La variable  $Z \sim N(0,1)$  correspondant aux teneurs de Pb montre un variogramme sphérique isotrope de portée 2000 m et avec  $C_0=0.1$  et  $C=0.9$ .

2 pts b) Quelles sont les unités pour  $C_0$  et  $C$  ?

On effectue le krigeage simple au point  $x_0=(6000, 6000)$  et l'on obtient le système de krigeage suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.57 & 0.105 \\ 0.57 & 1 & 0.224 \\ 0.105 & 0.224 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.443 \\ 0.57 \\ 0.443 \end{bmatrix} \text{ dont la solution est : } \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.186 \\ 0.388 \\ 0.336 \end{bmatrix}$$



**Question 5 (suite)**

2 pts c) Quelles seront la valeur krigée et la variance de krigeage simple en ce point  $x_0$  ?

2 pts d) On tire de la distribution conditionnelle la valeur gaussienne 1.0. Quelle est la concentration de plomb que l'on simule à ce point ?

2 pts e) Sur quelle propriété particulière repose en pratique le SGS lorsqu'on l'applique dans un contexte où plusieurs milliers de données sont disponibles ?

**Question 6 (10 points)**

À la suite d'une étude de faisabilité basée sur des milliers de données de carottes sur un certain gisement, on décide de l'exploiter en fosse. Un design de la fosse est effectué donnant les limites ultimes de la fosse.

Le design de la fosse est considéré fixe. On voudrait construire un intervalle de confiance sur le profit que va générer cette fosse. On suppose qu'au moment du minage des différents blocs, leur vraie teneur sera quasiment connue (les erreurs sur les teneurs de blocs seront alors négligeables, ce qui n'est pas le cas actuellement). Tous les blocs de la fosse ultime doivent être remontés en surface. Si leur valeur en métal couvre les coûts de traitement au concentrateur ils seront traités, sinon ils seront disposés sur la halde de stérile.

*Suggérez une méthode géostatistique permettant d'atteindre l'objectif de construire l'intervalle de confiance sur la valeur de la fosse. Expliquez les principales étapes d'application de la méthode et la façon dont vous l'utiliserez pour fournir l'intervalle de confiance souhaité.*

**Question 7 (10 points)**

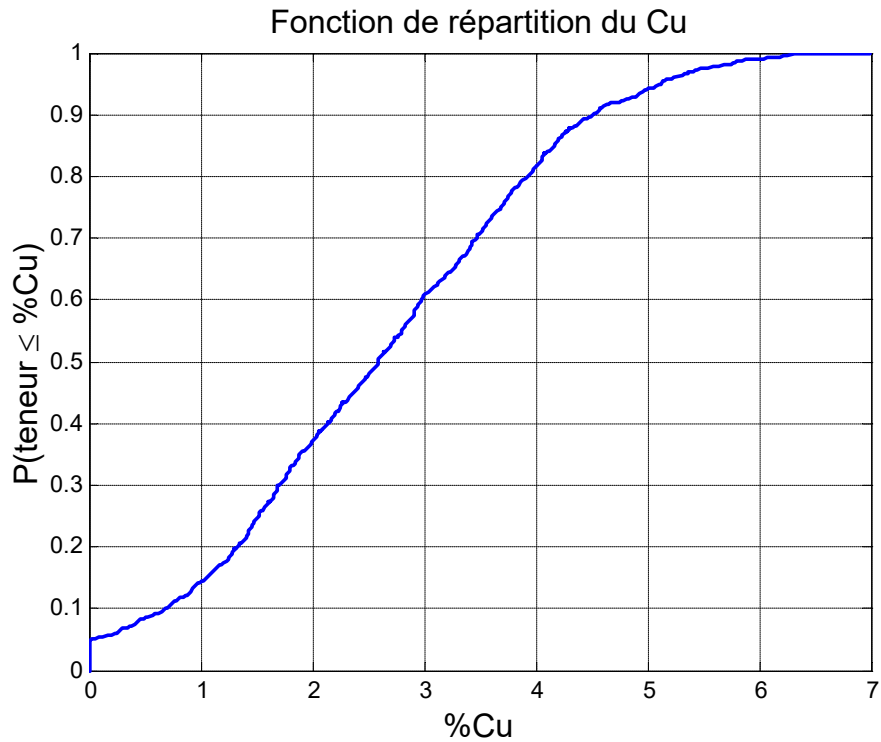
5 pts a) Compléter le tableau suivant permettant de conditionner une simulation non-conditionnelle par post-conditionnement par krigeage.

Point	Valeur observée	Valeur simulée non-conditionnelle	Valeur krigée avec les données	Valeur krigée avec les données simulées	Valeur simulée conditionnellement
1	-	0.5	1.3	0.6	
2	-	1.2	1.9	0.9	
3	2.1	0.8	2.1	0.8	
4	-	1.9	1.5	1.4	
5	1.2	1.5	1.2	1.5	

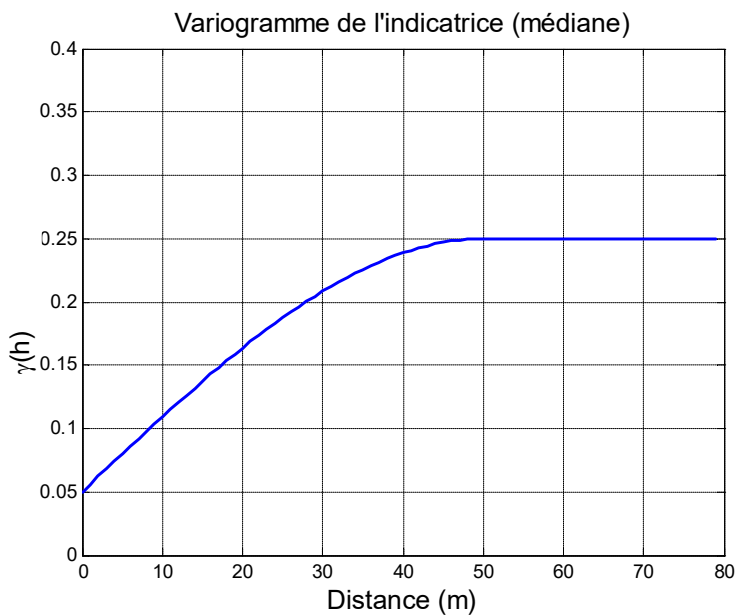
5 pts b) Utilisant la définition du post-conditionnement par krigeage, démontrez que l'espérance d'une simulation conditionnelle est la valeur krigée (par krigeage simple) et que la variance de l'erreur d'estimation est deux fois la variance de krigeage.

**Question 8 (12 points)**

La figure suivante montre la distribution des teneurs de Cu d'un gisement (fonction de répartition).



La figure suivante montre le variogramme de l'indicatrice correspondant à la médiane de la distribution. Les variogrammes des autres indicatrices sont tous proportionnels au variogramme de la médiane, ce qui fait que les poids de krigeage sont invariants avec le seuil considéré.



**Question 8 (suite)**

Le tableau suivant donne l'emplacement et les valeurs en Cu de 4 observations et d'un point ( $x_0$ ) où l'on désire effectuer l'estimation par krigeage d'indicatrices.

Point	Coord. x (m)	Coord. y (m)	% Cu
$x_1$	40	40	2
$x_2$	60	80	5
$x_3$	50	65	3
$x_4$	55	45	4
$x_0$	50	50	?

Les poids obtenus pour le KI simple sont :

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0.20 \\ 0 \\ 0.25 \\ 0.45 \end{bmatrix}$$

2 pts a) *Quel est le palier du variogramme attendu pour l'indatrice correspondant au seuil 1% Cu?*

5 pts b) *Quelle est la probabilité, obtenue par KI simple, que la teneur de Cu au point  $x_0$  soit supérieure à 3.5% Cu ?*

**Question 8 (suite)**

3 pts c) Si l'on effectue le KI simple à d'autres seuils, court-on des risques de rencontrer des problèmes de relation d'ordre pour cet exemple particulier? Discutez.

2 pts d) Est-ce que les informations fournies dans l'énoncé permettent d'exclure que le champ soit gaussien ? Discuter.

**Question 9 (10 points)**

On veut simuler une variable  $Z$  en trois points distincts (cas stationnaire) par méthode de Cholesky. On a construit la matrice de covariance  $K$  et effectué la décomposition  $K=LL'$ . On a trouvé :

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2.2361 & 0 \\ 2 & 0.8944 & 2.0494 \end{bmatrix}$$

2 pts a) Quelle est la variance des  $Z$  ?

2 pts b) Quelle est la covariance entre  $Z_2$  et  $Z_3$  ?

2 pts c) On tire d'une  $N(0,1)$  le vecteur de valeurs aléatoires  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -1.2 \end{bmatrix}$ . Quelle est la valeur simulée pour  $Z_3$  ?

2 pts d) On a observé  $Z_1=2$ . Que devient la covariance (conditionnelle) entre  $Z_2$  et  $Z_3$  sachant cela ?

2 pts e) Quelle est la principale limitation de la méthode de Cholesky ?

**Annexe : Fonction de répartition N(0,1).**

Fonction de répartition N(0,1) : P(Z<x) pour x>0. Pour x<0 prendre 1-P(Z< -x)										
x	0.	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998



Corrigé :

Q1

a)  $a=87$  pour figure 1 et  $a=17$  pour fig. 2.

b) A-3, B-2, C-5, D-1, E-4.

c) B, D et E car leur drapeau correspondant n'est influencé que par la valeur d'une seule variable gaussienne.

d) Non aucune. La simulation d'indicatrice exige un variogramme d'indicatrices avec comportement linéaire à l'origine. Les textures des réalisations sont alors beaucoup moins continues.

e) On appliquerait la méthode de l'échantillonneur de Gibbs.

Q2-

#	Hypothèse sur les moyennes	Système (A à E)	Forme de l'estimateur
1	Les moyennes de Z et Y sont inconnues	D	$Z^* = \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i Z_i + \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i Y_i$
2	Les moyennes de Z et Y sont inconnues mais égales	A	$Z^* = \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i Z_i + \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i Y_i$
3	Les moyennes de Z et Y sont connues	B	$Z^* = m_z + \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i (Z_i - m_z) + \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i (Y_i - m_y)$
4	Seule la moyenne de Z est connue	E	$Z^* = m_z + \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i (Z_i - m_z) + \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i Y_i$
5	Seule la moyenne de Y est connue	C	$Z^* = \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i Z_i + \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i (Y_i - m_y)$

Q3

a)  $C(h) = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$  pépite +  $\begin{bmatrix} 60 & 60 \\ 60 & 70 \end{bmatrix}$  gaussien (avec  $a$  effectif  $\sim$ ). Les déterminants des deux matrices sont 50 et 600 donc positifs et le modèle est admissible.

b) Oui car la variable secondaire Y est échantillonnée en des points distincts de Z et la corrélation entre les deux variables est élevée à  $h=0$  :  $70/(70*85)^{0.5} = 0.91$

c) par validation croisée.

d) non on aurait eu aucune paire pour calculer les variogrammes croisés car il n'y a aucun point où es deux variables coïncident.

e) On aurait pu inclure des points doublons rapprochés avec valeur nulle (i.e. même charge) tout le long de cette frontière. Ceci force un écoulement parallèle à la frontière.

Q4- F V F V F F V V F V V F

Q5 a) environ 0.5, 0.8 et 1.5

b) Pas d'unités car c'est une  $N(0,1)$ .

c) Valeur krigée :  $0.5*0.186+0.8*0.388+1.5*0.336 = 0.91$

var. de krigeage :  $1 - 0.186*0.443 - 0.388*0.57 - 0.336*0.443 = 0.548$

d)  $1 \Rightarrow 6.2$  pour ln plomb donc plomb =  $\exp(6.2) = 493$  ppm

e) l'effet d'écran qui permet de réduire le voisinage sans perdre d'information.

Q6- On utilise les simulations conditionnelles. L'idée est de simuler l'ensemble des blocs dans la fosse ultime un grand nombre de fois. Pour chaque réalisation on calcule les teneurs de blocs et on décide de la destination des blocs selon la teneur simulée. On peut alors calculer le profit associé à chaque réalisation. L'ensemble des réalisations permet d'obtenir une distribution des profits et de construire l'intervalle désiré.

Q7

a) 1.2, 2.2, 2.1, 2.0, 1.2

b)  $E[\text{erreur simulée}] = 0$  donc  $E[Z_{sc}] = Z^*$  la valeur krigée

l'erreur d'estimation est  $(Z - Z^*) + (Z_s - Z_s^*)$ . Les deux termes sont indépendants. Chaque terme a une variance de  $\sigma_{ks}^2$  donc la variance de l'erreur est deux fois cette variance.

Q8 a) Au seuil 1% Cu correspond approximativement  $p = 0.15$  sur la fonction de répartition donc le palier attendu est  $0.15 * 0.85 = 0.1275$

b)  $P(z < 3.5) = .2 * 1 + 0 * 0 + .25 * 1 + .45 * 0 + (1 - 0.9) * 0.7 = .52$  donc  $P(z > 3.5) = 1 - 0.52 = 0.48$ .

c) non car les poids seront tous identiques, on aura donc toujours une croissance ou stagnation de la probabilité, jamais de décroissance.

d) oui. On dit que les covariances sont proportionnelles donc on a autant de structure à chaque seuil. Pour un champ gaussien, on attend une diminution de la structure au fur et à mesure que l'on s'écarte de la médiane.

Q9 a)  $3^2 = 9$  b)  $2 * 2 + 2.2361 * 0.8944 = 6$  c)  $0.5 * 0.8944 - 1.2 * 2.0494 = -2.012$  d)  $2.2361 * 0.8944 = 2$  e) espace mémoire requis pour stocker la matrice.

## Final 2018

### Question 1 (12 points)

Des erreurs se sont glissées en construisant la matrice de gauche d'un système de cokrigage ordinaire impliquant 2 variables stationnaires Z et Y, où Z est mesurée aux points  $x_1$  et  $x_2$  et Y est mesurée aux points  $x_1$  et  $x_3$ . Pour les 2 variables, les effets de pépite ne varient pas d'un point à l'autre.

$$\begin{array}{c} Z1 \\ Y1 \\ Z2 \\ Y3 \end{array} \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1.9 & 0.8 & 1 & 0 \\ 5 & 10 & 1.6 & 1.7 & 0 & 1 \\ 1.9 & 1.6 & 7 & 2.7 & 1 & 0 \\ 0.8 & 4.1 & 2.7 & 10 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = K$$

4 pts a) Identifiez 4 erreurs évidentes dans cette matrice.



### Question 1 (suite)

Le système de krigeage ordinaire s'écrit :

$$\begin{bmatrix} K_{zz} & K_{zy} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ K_{yz} & K_{yy} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}' & \mathbf{0}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{1}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \mu_z \\ \mu_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{zz0} \\ k_{yz0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Supposons que la moyenne de la variable secondaire Y soit connue et vaille  $m_y$  (note :  $m_z$  est inconnue).

6 pts b) Que pourriez-vous modifier au système de cokrigeage ordinaire précédant afin d'estimer  $Z(x_0)$  en tenant compte de ce fait. Donnez la forme que prendrait l'estimateur (i.e.  $Z_0^* = \dots$ ) et écrivez sous forme matricielle le nouveau système de cokrigeage.

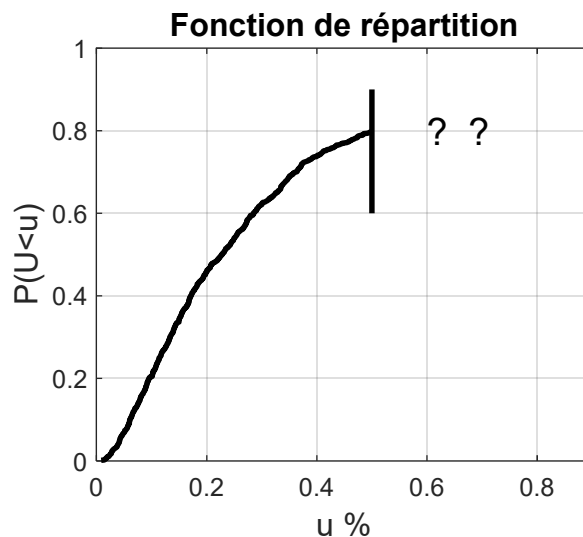
2 pts c) La variance de cokrigeage obtenue avec le système modifié sera-t-elle inférieure, égale, ou supérieure à la variance de cokrigeage avec le système original? Justifier sans faire de calculs.

## Question 2 (12 points)

Vous effectuez un relevé au scintillomètre (comptage radiométrique) sur un gisement d'uranium et vous observez que l'appareil choisi sature aux valeurs de comptes correspondant à des teneurs supérieures à 0.5% U. Cette saturation est survenue dans 14% des cas. Les variogrammes des indicatrices sont tous proportionnels et isotropes. Les teneurs équivalentes en U obtenues aux 4 sommets d'un rectangle sont :

Point	teneur équivalente U%
$x_1 (0,0)$	0.1%
$x_2 (20,0)$	>0.5% (saturation)
$x_3 (20,10)$	0.04%
$x_4 (0,10)$	>0.5% (saturation)
$x_0 (10,5)$	à estimer

La fonction de répartition obtenue globalement pour l'ensemble des observations est donnée à la figure suivante :



Utiliser toutes les informations disponibles (y compris les points où il y a saturation) pour répondre aux questions suivantes :

- 3 pts a) Quelle est la valeur estimée de  $P(Z(x_0) > 0.2\%)$  obtenue par krigeage ordinaire d'indicateurs (« soft kriging »)?

## Question 2 (suite)

3 pts b) Quelle est la valeur estimée pour  $P(Z(x_0) > 0.7\%)$  par krigeage ordinaire d'indicatrices (« soft kriging »)?

3 pts c) On effectue un krigeage simple d'indicatrices (au seuil  $0.2\%U$ ) et l'on obtient les poids  $\lambda_i = 0.2, i=1\dots 4$ . Que devient la probabilité demandée à la question a) lorsque calculée par krigeage simple d'indicatrices ?

3 pts d) Selon les informations fournies, quel devrait être approximativement le palier du variogramme d'indicatrices pour le seuil  $0.2\%U$  ?

### Question 3 (9 points)

On veut simuler une variable  $Z$  en trois points distincts (cas stationnaire) par méthode de Choleski. On a construit la matrice de covariance  $K$  et effectué la décomposition  $K=LL'$ . On a trouvé :

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2.2361 & 0 \\ 2 & 0.8944 & 2.0494 \end{bmatrix}$$

3 pts a) Quelle est la variance des  $Z$  ?

3 pts b) Quelle est la covariance entre  $Z_2$  et  $Z_3$  ?

3 pts c) On tire d'une  $N(0,1)$  le vecteur de valeurs aléatoires  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -1.2 \end{bmatrix}$ . Quelle est la valeur simulée pour  $Z_3$  ?

#### Question 4 (12 points)

Vous voulez estimer le volume contaminé par des hydrocarbures sur le site d'une centrale électrique utilisant des génératrices au diesel. Tout sol excédant la norme 10 ppm (huiles et graisses) doit être décontaminé. La contamination progresse à partir de la surface. Pour décontaminer le site, deux méthodes seront utilisées. La première consiste à excaver toute contamination sur les 4 premiers mètres et à traiter ex-situ à l'aide de procédés biologiques. La seconde méthode sera utilisée pour la contamination excédant 4 mètres et consiste en un bio-traitement et ventilation in-situ. Des analyses dans des forages ont montré que la contamination n'atteignait pas la nappe phréatique et qu'un sol contaminé en profondeur impliquait également une contamination allant de la surface jusqu'à la profondeur considérée. Suite à ces observations, vous décidez, pour simplifier le problème, de définir une nouvelle variable représentant l'épaisseur de sol contaminé au-delà de la norme 10 ppm (en un point donné en surface). Vous devez fournir des estimations des volumes contaminés qui soient réalistes et indiquer à votre employeur la précision des estimations des volumes de sol à excaver et de sol à traiter in-situ afin de planifier un budget d'intervention raisonnable.

- 6 pts a) Expliquez comment vous pourriez utiliser les simulations conditionnelles des épaisseurs contaminées pour fournir ces estimations de volume de sols contaminés à excaver, de volumes de sols contaminés à traiter in-situ, ainsi que les intervalles de confiance sur ces quantités.



#### Question 4 (suite)

6 pts *b) Vous disposez uniquement d'un programme de krigeage simple que vous ne pouvez pas modifier. Décrivez l'algorithme qui vous permettrait d'utiliser ce programme pour réaliser les simulations conditionnelles en a). Indiquez clairement chaque étape de cet algorithme. Au départ les épaisseurs de sols contaminés ne suivent pas une distribution normale mais après transformation normale on peut considérer le champ multigaussien.*

**Question 5 (18 points)**

On désire estimer la position du sommet d'une formation. On dispose de 2 données donnant l'élévation observée dans des trous de forages (Z en m) et de 1 donnée donnant le temps de parcours (aller-retour) de l'onde sismique (Y en ms (ms : milliseconde)). Le tableau suivant donne la localisation de ces 3 points ainsi que la localisation du point  $x_0$  où l'on désire estimer la position du sommet de la formation.

Point	Coord. u (m)	Coord. v (m)	Élévation Z (m)	Temps sismique Y(ms)
$x_1$	30	30	200	-
$x_2$	70	30	210	-
$x_3$	50	30	-	45
$x_0$	50	30	-	-

Le modèle de corégionalisation linéaire est :

$$C(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \delta(h) + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1.2 \end{bmatrix} \text{Sphérique}(a = 100\text{m})$$

où  $\delta(h) = 1$  si  $h = 0$ , 0 sinon.

Le tableau suivant donne les valeurs de la covariance sphérique ( $C=1$ ,  $a=1$ ), pour quelques h.

h	0	20	40
C(h)	1	0.704	0.432

3 pts a) Quelles sont les unités pour  $\text{Var}(Z)$ ,  $\text{Var}(Y)$  et  $\text{Cov}(Z, Y)$  ?

9 pts b) Construisez le système de cokrigage simple sous forme matricielle.

**Question 5 (suite)**

L'on trouve comme solution au système précédent :  $\lambda = \begin{bmatrix} 0.21 \\ 0.21 \\ 1.01 \end{bmatrix}$

Les moyennes des variables Z et Y sont  $m_z=215$  m et  $m_y=52$  ms.

3 pts c) Calculez la valeur estimée par cokrigage simple.

3 pts d) Selon vous aurait-il été préférable ici d'utiliser un cokrigage ordinaire plutôt qu'un cokrigage simple? Justifiez.

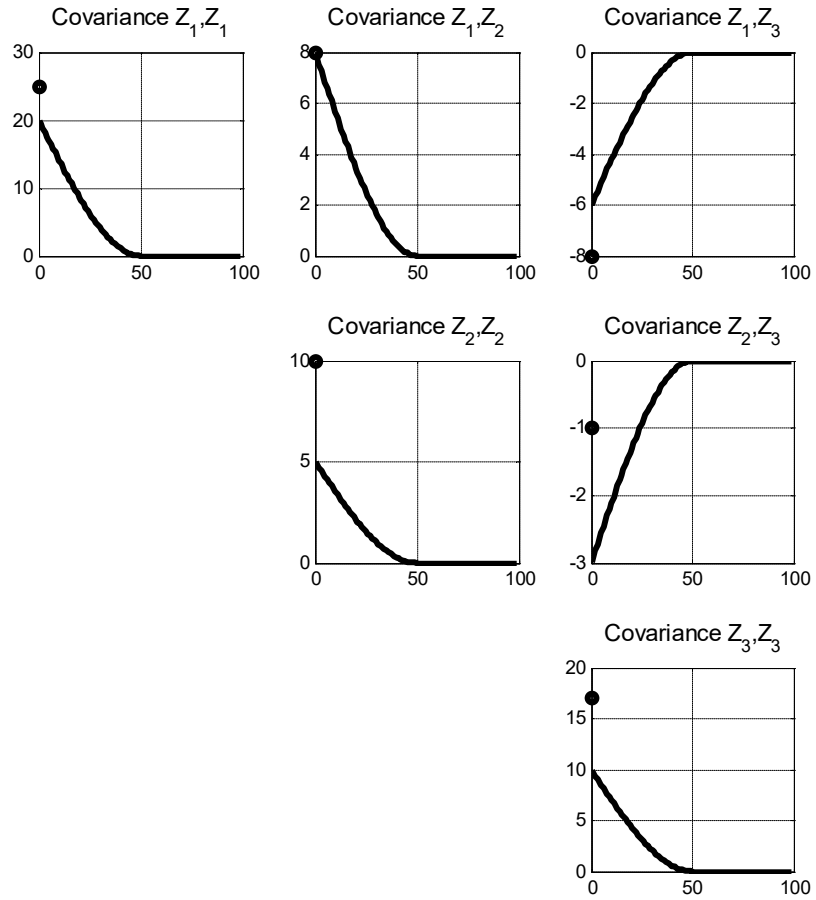
**Question 6 (12 points)**

Indiquez si les énoncés suivants sont vrais ou faux (faites un X dans la colonne appropriée et ne pas justifier). (+1 pour une bonne réponse, -0.5 pour une mauvaise, 0 pour une abstention)

Énoncé	V	F
<i>a) Dans la méthode SGS, on doit faire l'hypothèse que la distribution de la variable transformée est multinormale. Il n'est pas suffisant que la distribution marginale soit normale.</i>		
<i>b) Dans le SGS, même si l'on doit transformer la variable pour qu'elle soit normale, on doit utiliser le variogramme de la variable originale dans le krigeage propre à cette méthode.</i>		
<i>c) Dans un cokrigeage, les poids de cokrigeage associés à la variable principale (i.e. celle que l'on estime) n'ont jamais d'unités.</i>		
<i>d) Dans un cokrigeage, les poids associés à la variable secondaire n'ont jamais d'unités.</i>		
<i>e) On pourrait utiliser le recuit simulé dans un problème de calibration d'un champ de transmissivité pour retrouver les charges hydrauliques observées. La difficulté principale de cette approche réside dans le temps de calcul pour évaluer la fonction objectif.</i>		
<i>f) Dans le krigeage d'indicatrices le calcul de la variance conditionnelle n'implique pas les variances de krigeage des indicatrices correspondant aux divers seuils.</i>		
<i>g) Dans un krigeage d'indicatrices, la variance conditionnelle augmente généralement avec la variabilité des valeurs observées dans le voisinage du point à estimer.</i>		
<i>h) Dans un krigeage d'indicatrices effectué avec un nombre limité de seuils, l'espérance conditionnelle calculée en un point où se trouve une donnée coïncide exactement avec la valeur de la donnée.</i>		
<i>i) La variance de cokrigeage est plus élevée là où localement les valeurs observées varient beaucoup.</i>		
<i>j) Pour un même jeu de données impliquant deux variables, il y a toujours autant ou plus de paires disponibles pour le calcul d'une covariance croisée que pour le calcul d'un variogramme croisé.</i>		
<i>k) Une simulation conditionnelle est généralement plus précise qu'un krigeage ordinaire pour estimer la teneur en un point quelconque.</i>		
<i>l) Dans un modèle linéaire de corégionalisation, on doit utiliser uniquement des modèles élémentaires isotropes.</i>		

**Question 7 (10 points)**

La figure suivante montre les variogrammes et variogrammes croisés omnidirectionnels pour trois variables :



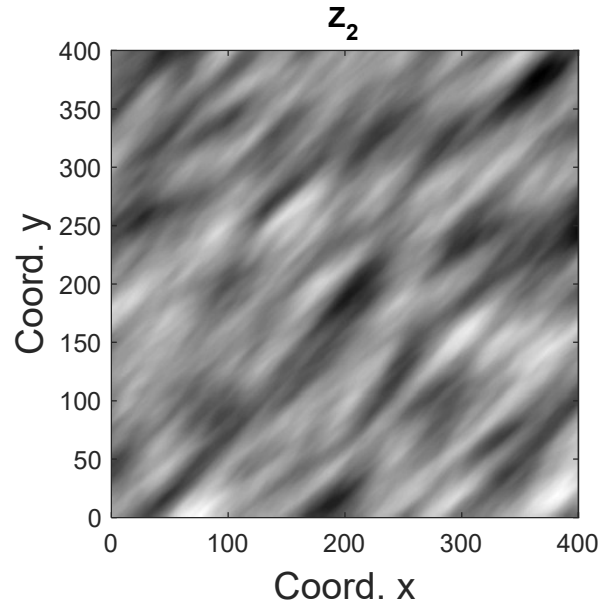
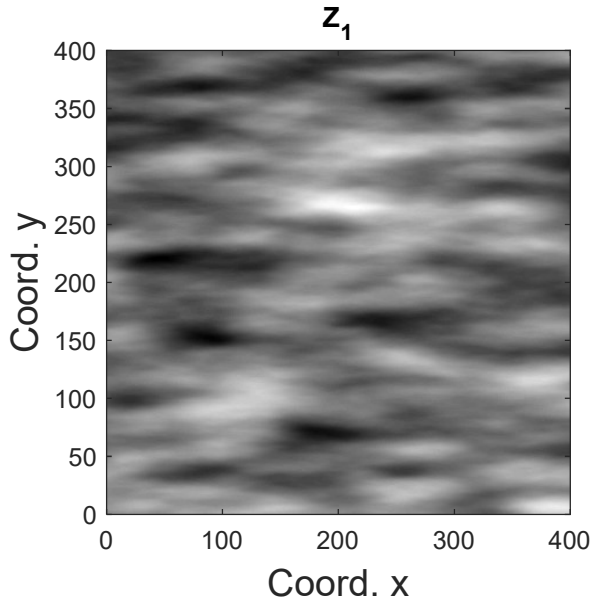
6 pts a) Décrire sous forme matricielle le modèle linéaire de corégionalisation correspondant.

**Question 7 (suite)**

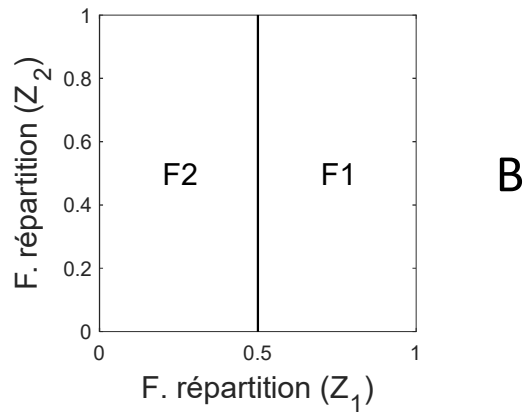
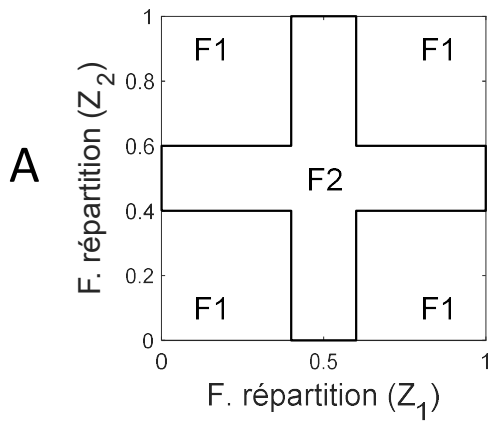
4 pts *b) En supposant que la variable  $Z_2$  soit observée en plusieurs points où  $Z_1$  n'est pas disponible, peut-on prévoir un gain de précision du cokrigeage pour l'estimation de  $Z_1$  ? Justifiez (deux raisons).*

**Question 8 (15 points)**

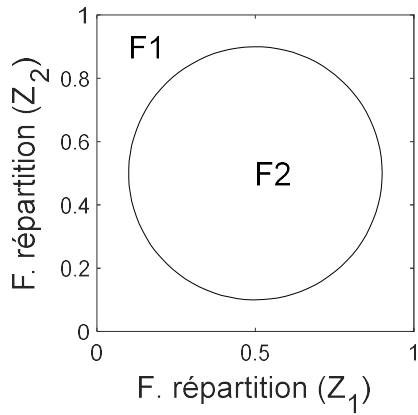
On réalise une simulation de faciès par la méthode plurigaussienne. Les deux champs gaussiens simulés sont :



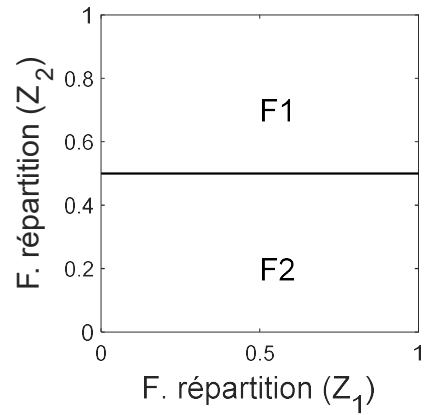
On vous présente quatre drapeaux de codage différents identifiés de A à D:



C



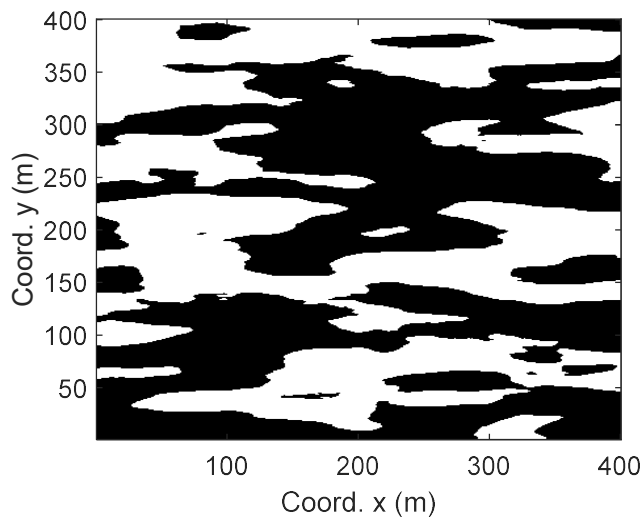
D



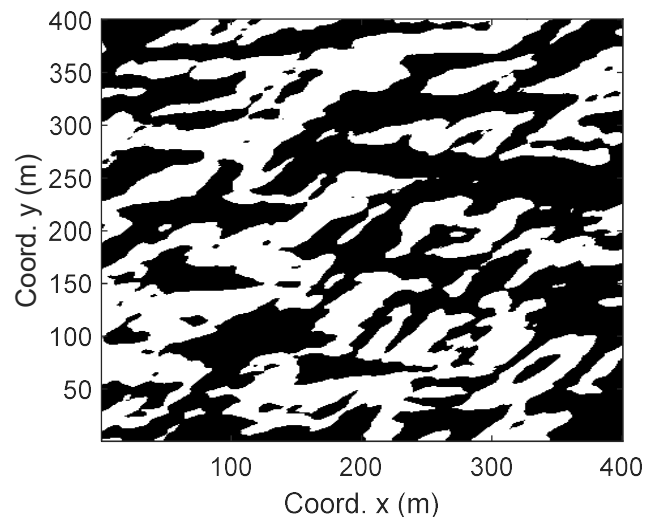
**Question 8 (suite)**

Les figures 1 à 4 montrent les réalisations obtenues en appliquant les différents codages aux champs  $Z_1$  et  $Z_2$ .

1-



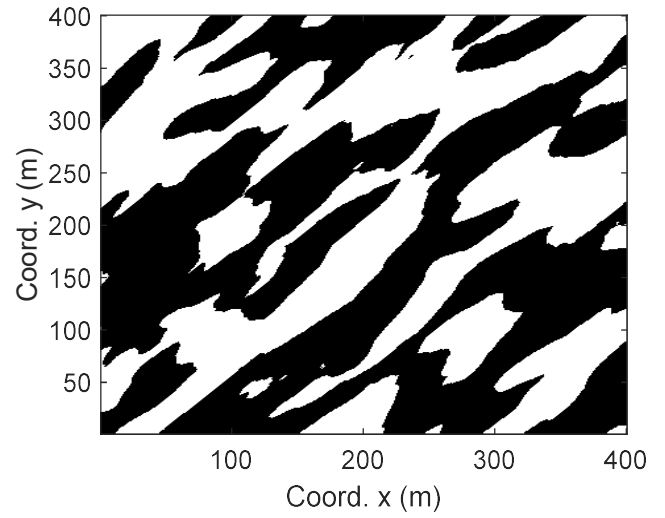
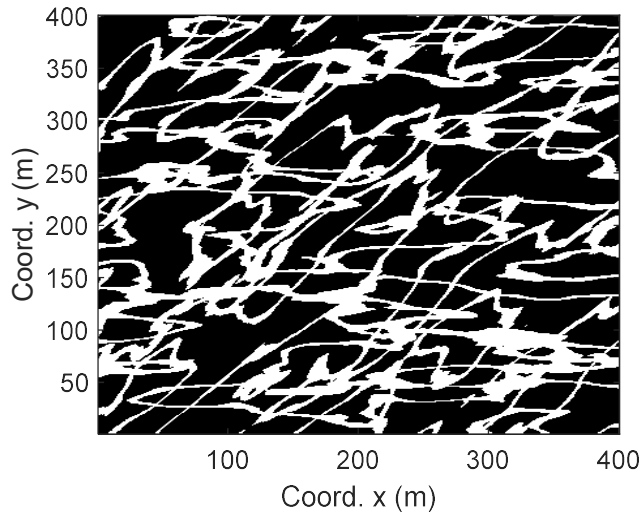
2-



3-

4-





4 pts a) Associez chaque réalisation (1 à 4) au drapeau (parmi A à D) dont elle est issue.

Réalisation	1	2	3	4
Drapeau				

**Question 8 (suite)**

4 pts b) Encercliez la réponse la plus appropriée selon ce que vous observez des champs gaussiens  $Z_1$  et  $Z_2$ :

- Le variogramme de  $Z_1$  est : sphérique cubique
- Le variogramme de  $Z_2$  est : sphérique cubique
- Le variogramme de  $Z_1$  est : isotrope anisotrope
- Le variogramme de  $Z_2$  est : isotrope anisotrope

4 pts c) En un point donné  $x_0$  on a simulé  $(-1, 2)$  pour  $(Z_1, Z_2)$ . Quel faciès est simulé selon le drapeau A ?

3 pts d) Si les faciès avaient été observés en un certain nombre de points, quel est l'algorithme qui permettrait d'incorporer cette information dans les simulations de  $Z_1$  et  $Z_2$  ? (pas besoin de décrire le fonctionnement, juste donner le nom).

Fin de l'examen

**Annexe : Fonction de répartition N(0,1).**

x	Fonction de répartition N(0,1) : P(Z<x) pour x>0. Pour x<0 prendre 1-P(Z< -x)									
	0.	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Corrigé :

1- a) i.  $K(4,2)=4.1$  devrait être égal à  $K(2,4)=1.7$

ii.  $K(1,1)$  devrait être égal à  $K(3,3)$

iii.  $K(5,5)$  devrait être 0

iv.  $K(6,3)$  devrait être 0

b) On pourrait former  $Z(x_0)^* = \text{somme}(\lambda_i Z_i) + \text{somme}(\alpha_i (Y_i - m_i))$

sous forme matricielle, on retire simplement la dernière ligne du système et la dernière colonne de la matrice.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{zz} & \mathbf{K}_{zy} & \mathbf{1} \\ \mathbf{K}_{yz} & \mathbf{K}_{yy} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}' & \mathbf{0}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \mu_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{zz0} \\ \mathbf{k}_{yz0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

c) elle sera inférieure puisque l'on a retiré une contrainte.

2- a) codage donne  $I_1=1, I_2=0, I_3=1, I_4=0$ . Les poids sont  $\frac{1}{4}$  à cause de la symétrie. Donc la probabilité est  $1 - (1/4 + 1/4) = 1/2$ .

b) codage donne  $I_1=1, I_3=1$ , les 2 autres ne sont pas déterminés, donc ne peuvent être utilisés. Les poids seront alors  $\frac{1}{2}$  pour chaque point (symétrie). La probabilité estimée est donc  $1 - (1/2 + 1/2) = 0$

c) codage est le même qu'en a), les poids sont 0.2. L'estimé de la probabilité est  $P(Z(x_0) < 0.2) = 0.2 + 0.2 + (1 - 0.8) * 0.45 = 0.49$ , donc  $P(Z(x_0) > 0.2) = 0.51$

d) Le palier devrait être  $0.45 * (1 - 0.45) = 0.2475$ .

3- a)  $\text{var} = 3 * 3 = 9$

b)  $\text{Cov}(Z_2, Z_3) = 2 * 2 + 2.2361 * 0.8944 = 6$

c)  $Z_3 = 2 * 0 + 0.8944 * 0.5 + 2.0494 * (-1.2) = -2.012$

4a) Plusieurs réponses sont possibles

La variable étudiée  $Z(x)$  est l'épaisseur de sol contaminée. On simule plusieurs réalisations sur une grille régulière de maille. Pour une réalisation donnée on fait la moyenne des  $\min(Z(x), 4\text{m})$ . En multipliant par l'aire simulée on obtient le volume à excaver. Ensuite on fait la moyenne de  $\max(0, Z(x) - 4)$ , que l'on multiplie par la surface simulée ce qui donne le volume à traiter in-situ. On refait ces calculs pour chaque réalisation. On trie les volumes obtenus et on choisit par exemple le 5<sup>e</sup> percentile et le 95<sup>e</sup> percentile pour obtenir l'intervalle de confiance. On fait la moyenne pour fournir l'estimation la plus « réaliste ».

b) SGS

- on construit une visite aléatoire des points

- on suppose  $Z$  gaussien, sinon on le transforme

- pour le point  $i$  dans cette visite, on effectue le krigeage simple en ce point. La distribution conditionnelle est normale de moyenne égale à la valeur krigée et de variance égale à la variance de krigeage.



C) $\begin{bmatrix} K_{zz} & K_{zy} & 1 \\ K_{yz} & K_{yy} & 0 \\ 1' & 0' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \mu_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{zz} \\ k_{yz} \\ 1 \end{bmatrix}$	D) $\begin{bmatrix} K_{zz} & K_{zy} & 1 & 0' \\ K_{yz} & K_{yy} & 0 & 1' \\ 1' & 0' & 0 & 0 \\ 0' & 1' & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \mu_z \\ \mu_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{zz} \\ k_{yz} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
E) $\begin{bmatrix} K_{zz} & K_{zy} & 0 \\ K_{yz} & K_{yy} & 1 \\ 0' & 1' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \mu_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{zz} \\ k_{yz} \\ 0 \end{bmatrix}$	

Complétez le tableau suivant en indiquant le système de cokrigage correspondant à l'hypothèse énoncée sur les moyennes de Z et Y et en indiquant la forme particulière de l'estimateur (utilisez la même notation que celle des cas 1 et 3)

#	Hypothèse sur les moyennes	Système (A à E)	Forme de l'estimateur
1	Les moyennes de Z et Y sont inconnues		$Z^* = \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i Z_i + \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i Y_i$
2	Les moyennes de Z et Y sont inconnues mais égales		
3	Les moyennes de Z et Y sont connues		$Z^* = m_z + \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i (Z_i - m_z) + \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i (Y_i - m_y)$
4	Seule la moyenne de Z est connue		
5	Seule la moyenne de Y est connue		

## Question 2 (12 points)

Vous voulez produire, par méthode de Choleski (LU), 1000 réalisations indépendantes de 2 variables  $Z_1$  et  $Z_2$  montrant une corrélation de 0.8 et une distribution normale. Les moyennes et variances désirées sont :

	$Z_1$	$Z_2$
Moyennes	0	0
Variances	25	100

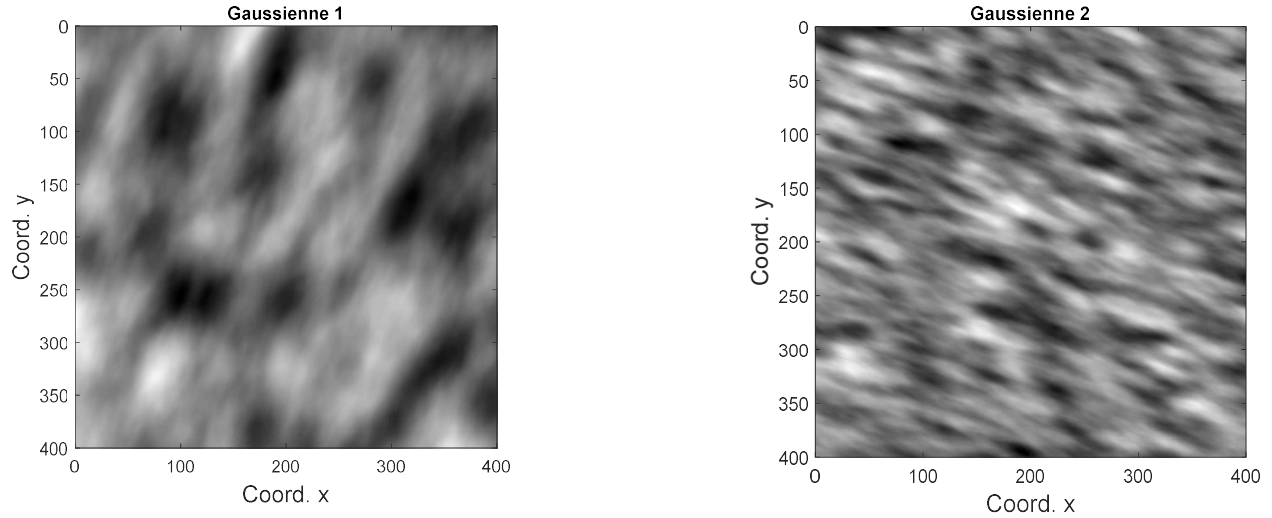
6 pts a) Calculez la matrice  $L$  permettant de réaliser cette simulation et exprimez  $Z_1$  et  $Z_2$  en fonction des valeurs aléatoires  $Y_1$  et  $Y_2$  tirées aléatoirement d'une  $N(0,1)$ . (Aide : déterminez d'abord quelle est la matrice de covariance  $K$  ( $2 \times 2$ ) correspondant à ce problème sachant que  $\text{Cov}(Z_1, Z_2) = \rho_{z_1, z_2} \sigma_{z_1} \sigma_{z_2}$ ).

3 pts b) La variable  $Z_1$  a été observée et  $z_1=10$ . Utilisant la matrice obtenue en a) écrivez l'équation de  $Z_2$  en fonction de  $Y_2$  (note : si vous n'avez pu répondre à a) remplacer les termes inconnus par des lettres ou symboles).

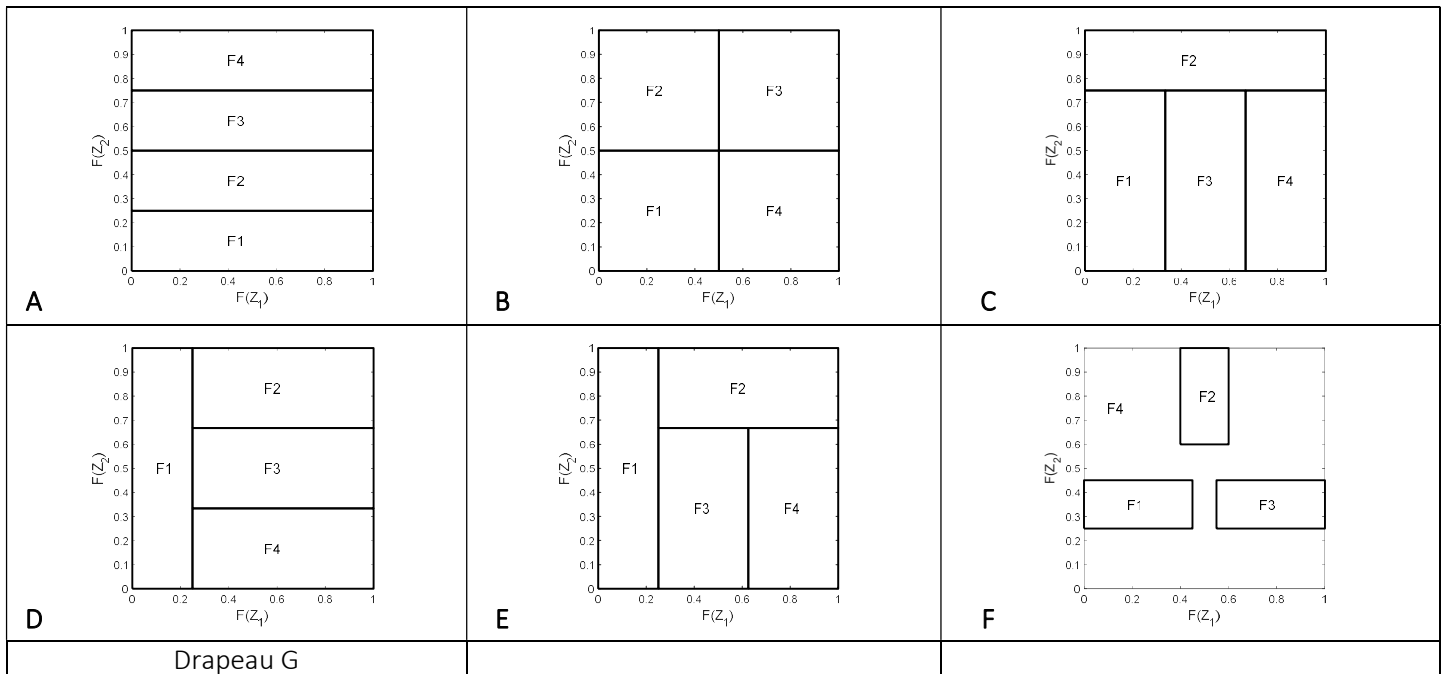
3 pts c) Quelle est la moyenne conditionnelle et la variance conditionnelle de  $Z_2$  étant donné  $Z_1=10$  ?

**Question 3 (16 points)**

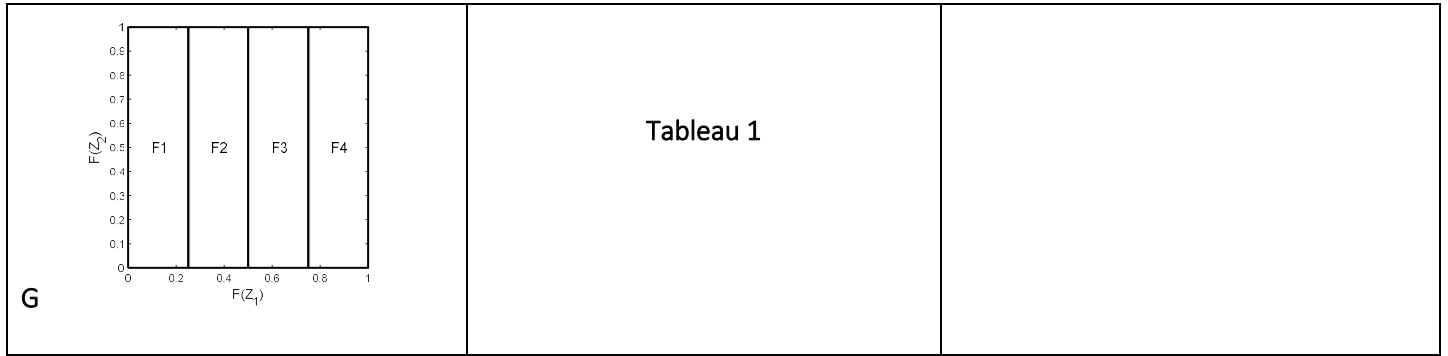
La figure 1 montre les réalisations de deux variables gaussiennes indépendantes ayant chacune une structure spatiale différente.



Le tableau 1 montre sept drapeaux de codages appliqués aux variables gaussiennes précédentes. L'axe des x est la fonction de répartition de la première gaussienne, l'axe des y est la fonction de répartition de la seconde.



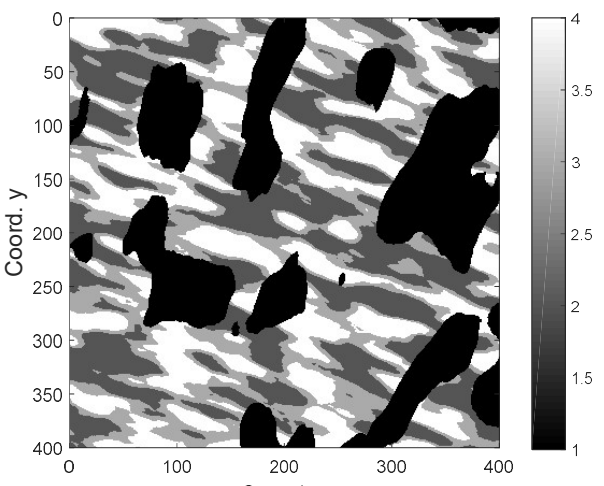
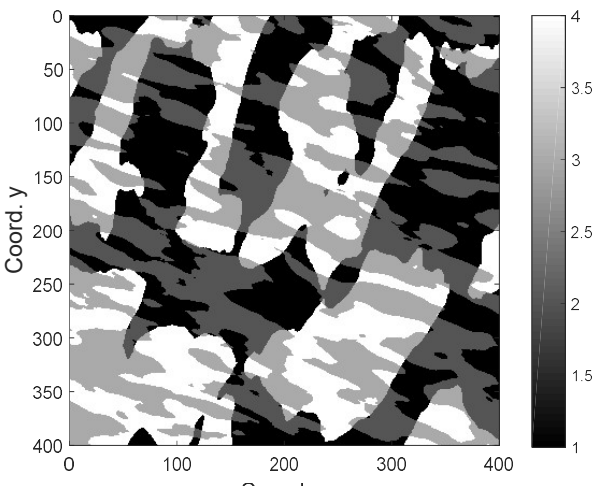
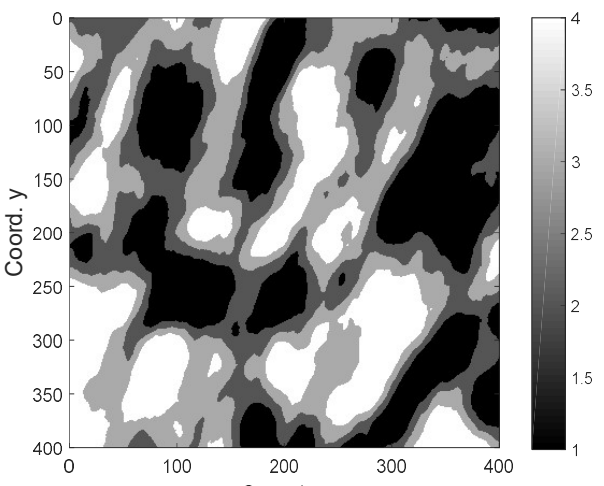


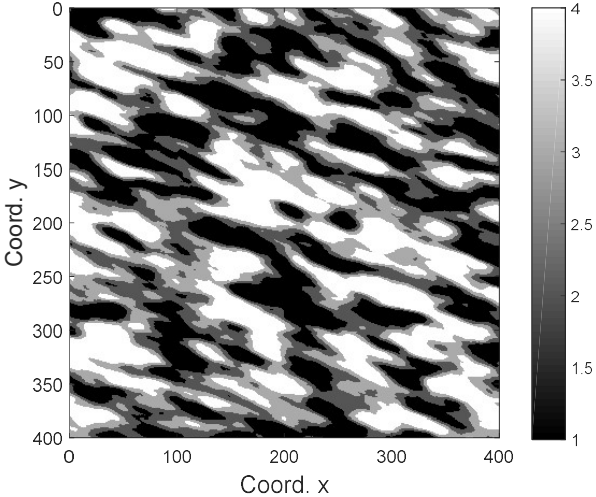
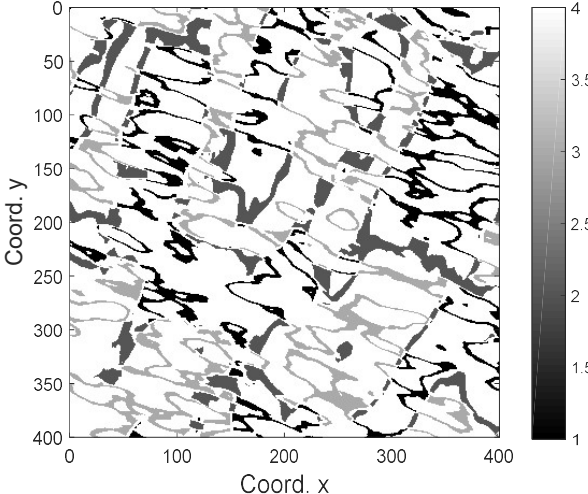


**Question 3 (suite)**

8 pts a) Associez à chacune des réalisations suivantes le drapeau de codage correspondant (A à G). L'échelle de gris identifie le faciès (1->F1, 2->F2, 3->F3, 4->F4). Il y a un drapeau par réalisation.

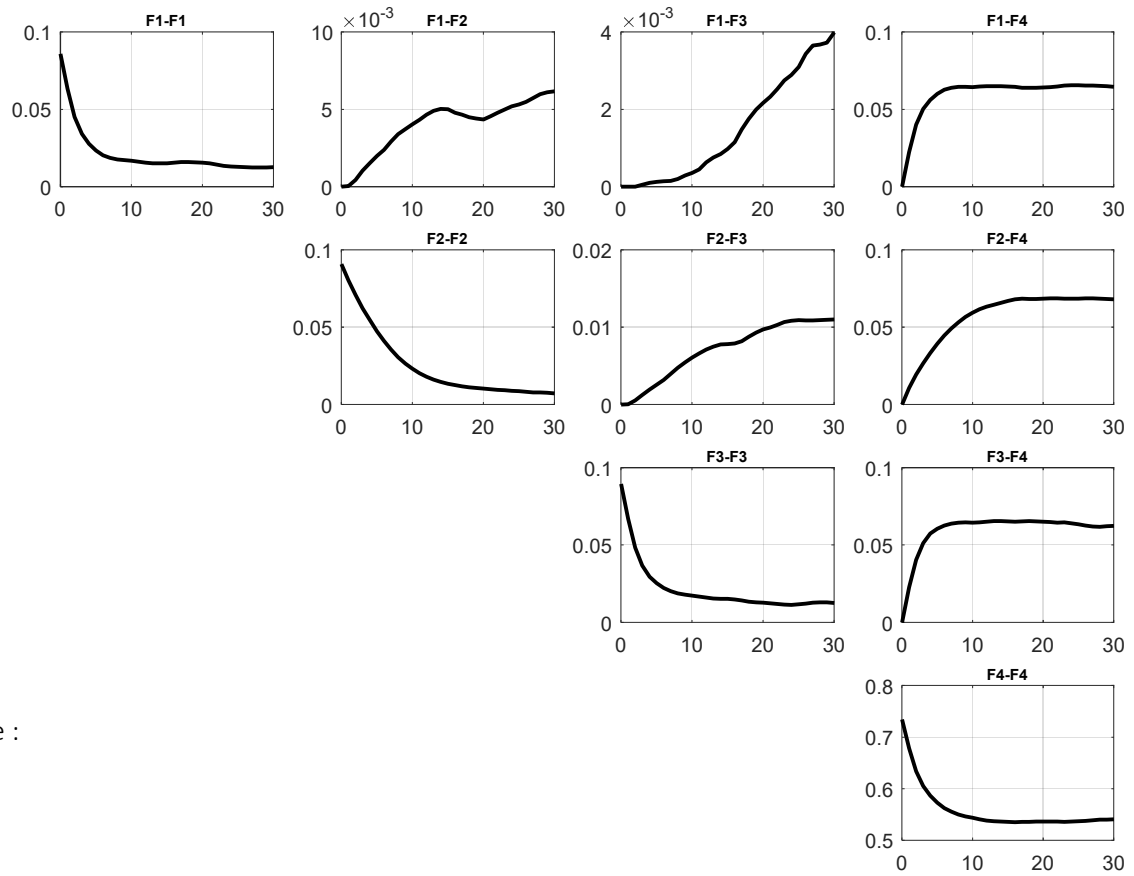
#	Réalisation	Drapeau
1		
2		

3		
#	Réalisation	Drapeau
4		
5		

6		
#	Réalisation	Drapeau
7		

4 pts b) Identifiez les deux réalisations qui auraient pu être obtenues en utilisant une seule gaussienne.

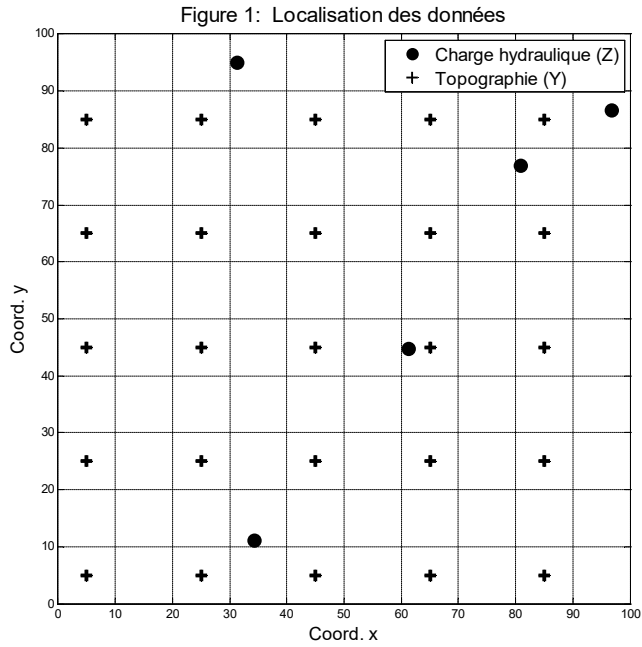
4 pts c) La figure suivante montre les covariances non-centrées d'indicateurs de faciès d'une des sept réalisations. Identifiez cette réalisation.



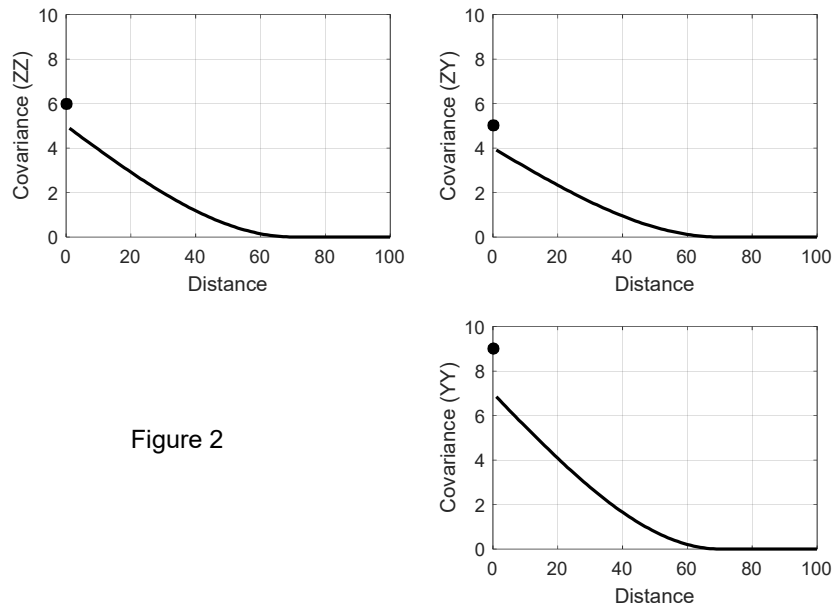
Réponse :

#### Question 4 (16 points)

La figure 1 illustre l'emplacement de points où l'on a mesuré la charge hydraulique (variable principale Z) d'un aquifère à nappe libre. On y voit aussi l'emplacement de points où l'on a mesuré l'élévation du sol (variable secondaire Y). On envisage produire une carte des charges hydrauliques par cokrigage utilisant ces 2 sources d'information.



La figure 2 montre les covariances et la covariance croisée pour Z et Y (l'on a vérifié que la covariance croisée était symétrique en h), le modèle est considéré isotrope.

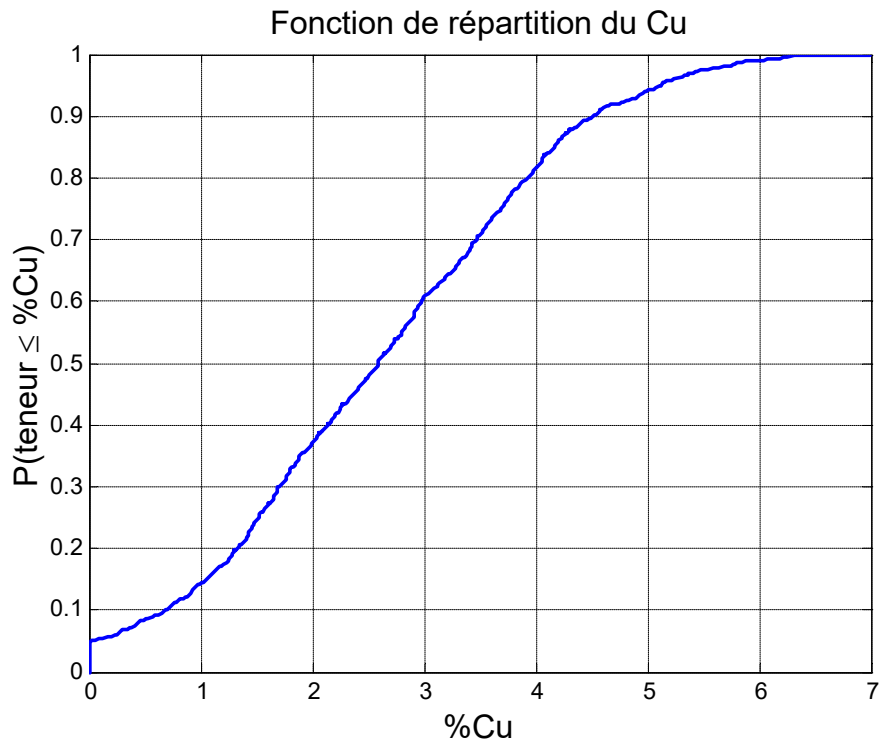


#### Question 4 (suite)

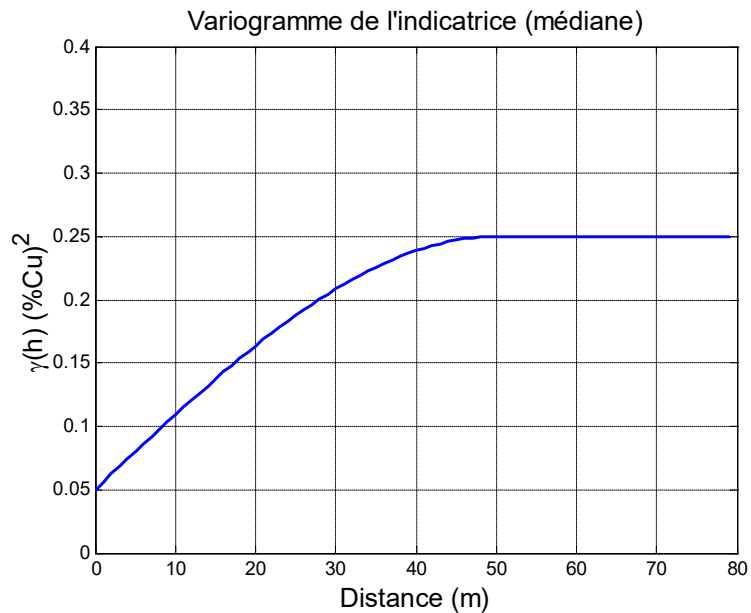
- 6 pts a) Spécifiez le modèle linéaire de corégionalisation retenu et vérifiez s'il s'agit d'un modèle admissible.
- 4 pts b) Dans le contexte illustré et avec le modèle de corégionalisation anticipe-t-on que le cokrigeage va améliorer l'estimation par rapport à un krigeage? Justifiez.
- 2 pts c) Par quelle technique pourrait-on vérifier votre réponse fournie en b) en utilisant uniquement l'information actuellement disponible ?
- 2 pts d) Commentez cet énoncé : « étant donné que la covariance croisée est symétrique en  $h$ , on aurait pu calculer le variogramme croisé expérimental, avec les données disponibles, plutôt que la covariance croisée ».
- 2 pts e) Calculez la corrélation charge-topo pour deux points espacés de 20 m. Vous pouvez lire directement les termes requis sur la figure fournie, inutile d'évaluer l'expression.

Question 5 (11 points)

La figure suivante montre la distribution des teneurs de Cu d'un gisement (fonction de répartition).



La figure suivante montre le variogramme de l'indicatrice correspondant à la médiane de la distribution. Les variogrammes des autres indicatrices sont tous proportionnels au variogramme de la médiane, ce qui fait que les poids de krigeage sont invariants avec le seuil considéré.







### Question 5 (suite)

Le tableau suivant donne l'emplacement et les valeurs en Cu de 4 observations et d'un point ( $x_0$ ) où l'on désire effectuer l'estimation par krigeage d'indicatrices.

Point	Coord. x (m)	Coord. y (m)	% Cu
$x_1$	40	40	2
$x_2$	60	80	5
$x_3$	50	65	3
$x_4$	55	45	4
$x_0$	50	50	?

Les poids obtenus pour le KI simple sont :

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0.20 \\ 0 \\ 0.25 \\ 0.45 \end{bmatrix}$$

2 pts a) Quel est le palier du variogramme attendu pour l'indicateur correspondant au seuil 1% Cu?

6 pts b) Quelle est la probabilité, obtenue par KI simple, que la teneur de Cu au point  $x_0$  soit supérieure à 3.5% Cu ?

3 pts c) Si l'on effectue le KI simple à d'autres seuils, court-on des risques de rencontrer des problèmes de relation d'ordre pour cet exemple particulier? Discutez.

### Question 6 (7 points)

Discutez les énoncés suivants (vrai, partiellement vrai, ou faux). Si vous répondez partiellement vrai ou faux, indiquez pourquoi.

- 1 pt a) Dans la méthode SGS, il est requis que les données suivent une loi normale. L'utilisateur doit donc fournir le variogramme de la variable après transformation vers la loi normale (ex. transformation graphique). La simulation reproduit le variogramme de la variable normale (en moyenne). Après transformation inverse pour revenir au domaine initial, la simulation reproduit (en moyenne) le variogramme de la variable originale si le champ transformé est initialement (multi)gaussien.
- 1 pt b) Dans un cokrigeage, les poids associés à la variable principale  $Z$  n'ont pas d'unités et les poids associés à la variable secondaire  $Y$  ont comme unités :  $\frac{\text{Unités de } Z}{\text{Unités de } Y}$
- 1 pt c) Dans la méthode de recuit simulé, si une modification permet de décroître la valeur de la fonction objectif, alors cette modification est toujours acceptée.
- 1 pt d) Dans la méthode de recuit simulé, si une modification fait croître la valeur de la fonction objectif, alors cette modification peut être acceptée. Toutefois plus cette modification augmente la fonction objectif, plus faible est la probabilité qu'elle soit retenue.

### Question 6 (suite)

- 1 pt *e) On pourrait utiliser le recuit simulé pour calibrer automatiquement un champ de transmissivité de sorte qu'il reproduise presque parfaitement les charges hydrauliques observées dans quelques piézomètres. La fonction objectif pourrait être la somme des différences au carré entre les charges hydrauliques observées et les charges hydrauliques retournées par un simulateur d'écoulement. Par contre, le facteur « temps de calcul » empêche d'envisager sérieusement cette solution lorsqu'une seule solution du simulateur d'écoulement prend plusieurs minutes à obtenir.*
- 1 pt *f) L'on peut calculer la variance conditionnelle représentant l'étalement de la distribution conditionnelle estimée par KI ordinaire. La valeur de cette variance dépend en bonne partie de la similitude des teneurs aux points utilisés dans le krigeage d'indicatrices. Plus les observations montrent des valeurs semblables, moins forte est la variance conditionnelle.*
- 1 pt *g) Pour que le krigeage d'indicatrice soit interpolateur exact à un point observé  $x_i$ , il faudrait utiliser une infinité de seuils afin d'assurer que la fonction de répartition estimée passe soudainement de 0 à 1 au seuil correspondant à la valeur observée en  $x_i$ . Donc en pratique le krigeage d'indicatrice n'est pas interpolateur exact.*

### Question 7 (12 points)

Vous voulez estimer le volume contaminé par des hydrocarbures sur le site d'une centrale électrique utilisant des génératrices au diesel. Tout sol excédant la norme 1000 ppm (huiles et graisses) doit être décontaminé. La contamination progresse à partir de la surface. Pour décontaminer le site, deux méthodes seront utilisées. La première consiste à excaver toute contamination sur les 4 premiers mètres et à traiter ex-situ à l'aide de procédés biologiques. La seconde méthode sera utilisée pour la contamination excédant 4 mètres et consiste en un bio-traitement et ventilation in-situ. Des analyses dans des forages ont montré que la contamination n'atteignait pas la nappe phréatique et qu'un sol contaminé en profondeur impliquait également une contamination allant de la surface jusqu'à la profondeur considérée. Suite à ces observations, vous décidez, pour simplifier le problème, de définir une nouvelle variable représentant l'épaisseur de sol contaminé au-delà de la norme (en un point donné en surface). Vous devez fournir des estimations des volumes contaminés qui soient réalistes et indiquer à votre employeur la précision des estimations des volumes de sol à excaver et de sol à traiter in-situ afin de planifier un budget d'intervention raisonnable.

- 6 pts a) Expliquez comment vous pourriez utiliser les simulations conditionnelles pour fournir ces estimations de volume de sols contaminés sur la tranche de 0-4m, de volume de sols contaminés à des profondeurs de 4m et plus, ainsi que les intervalles de confiance sur ces quantités.

### Question 7 (suite)

6 pts *b) Vous disposez uniquement d'un programme de krigeage simple que vous ne pouvez modifier. Décrivez l'algorithme qui vous permettrait d'utiliser ce programme pour réaliser les simulations conditionnelles en a). Indiquez clairement chaque étape de cet algorithme. Au départ les épaisseurs de sols contaminés ne suivent pas une distribution normale. Après transformation on peut considérer le champ multigaussien.*

**Question 8 (10 points)**

Supposons que l'on veuille effectuer des simulations de faciès par méthode gaussienne tronquée. On a observé les faciès en un certain nombre de points d'observation.

*Quel algorithme permet de tenir compte des observations de faciès aux points d'observation dans la simulation gaussienne tronquée? Décrire les étapes de l'algorithme.*

Corrigé

Q1-

1-D, 2-A, 3-B, 4-E, 5-C

2- même équ que 1

4-

$$Z^* = m_z + \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i (Z_i - m_z) + \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i Y_i$$

5-

$$Z^* = \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i Z_i + \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i (Y_i - m_y)$$

Q2- a) la matrice K est [25 40; 40 100]. Le 40 vient de  $0.8 * 5 * 10 = 40$ .

La matrice L est [5 0; 8 6];

$Z_1 = 5 * Y_1$

$Z_2 = 8 * Y_1 + 6 * Y_2$

b) On calcule  $y_1 = z_1 / 5 = 2$  donc  $z_2 = 16 + 6 * y_2$

c)  $E[z_2 | z_1] = 16$  et  $\text{Var}(Z_2 | Z_1) = 36$

Q3- a) C-E-D-B-A-G-F

b) Drapeaux A et G donc les réalisations 5 et 6.

c) F4 touche tous les facies et tous les facies ne touchent qu'à F4 => réalisation 7

Q4- a)  $[1 \ 1; 1 \ 2] \Delta(h) + [5 \ 4; 4 \ 7] \text{Sph}(a=70, C=1)$

Les déterminants valent respectivement 1 et 19 donc oui le modèle est admissible.

b) La corrélation à  $h=0$  vaut  $5 / (6 * 9)^{0.5} = 0.68$  et la variable Y est échantillonnée en des points différents de Z donc oui cela devrait améliorer l'estimation.

c) Par validation croisée.

d) Faux car on n'a aucun point où la charge et la topo sont disponibles simultanément ici.

e)  $r = 2.33 / (6 * 9)^{0.5} = 0.317$

Q5- a) On lit  $F(1) \sim 0.15 \Rightarrow \text{palier} = 0.15 * 0.85 = 0.1275$

b) À 3.5%  $F(3.5) = 0.7$ , les indicatrices valent : 1 0 1 0 =>  $I^* = 0.45 + (1 - 0.9) * 0.7 = 0.52$ .  $P(Z_0 > 3.5)$  est le complément => 0.48

c) Non car les poids seront les mêmes car les covariances sont proportionnelles et ils sont tous positifs. Comme le codage ne fait qu'augmenter le nombre de 1 avec seuil croissant, il est certain que  $I^*$  sera croissant.

Q6- Tous vrais sans restriction.

Q7- a) On effectue plusieurs réalisations conditionnelles de la variable épaisseur contaminée sur une grille fine. Pour chaque réalisation on note le volume contaminé obtenu sur la tranche 0-4m et le volume sur la tranche >4m. La moyenne de ces volumes donne la valeur estimée pour chacun. Pour la précision on peut

classer les différents volumes et se servir de la série classée pour définir l'intervalle de confiance sur chaque volume. On aurait pu aussi utiliser les différents volumes obtenus sur chaque réalisation pour calculer un écart-type.

b)

La méthode de simulation est le SGS. Les étapes sont :

- 1- transformer vers la loi normale, supposer que c'est multinormal
- 2- calculer et modéliser le variogramme de la v.a. normale
- 3- for  $i=1 : n_0$  où  $n_0$  est le nombre d'emplacements à simuler
  - 3.1 effectuer le krigeage simple en utilisant les points données et les points déjà simulés
- (au besoin travailler en voisinage local)
  - 3.2 Tirer une valeur d'une  $N(Z^*, var\_krigeage)$
  - 3.3 Ajouter la valeur tirée aux données existantes
- 4- fin de la boucle
- 5- Effectuer la transformation inverse

Q8- Algorithme : Échantillonneur de Gibbs

- 1- On calcule les seuils normaux correspondant aux proportions de chaque faciès
- 2- On code chaque donnée selon le faciès observée en tirant aléatoirement une valeur gaussienne tombant dans le bon interval.
- 3- On définit un trajet pour visiter tous les points à tour de rôle
- 4- On visite un point,
  - 4.1 on le retire et on effectue le KS en ce point avec les autres points  $\Rightarrow Z^*, var\_k$
  - 4.2 on tire une valeur de la distribution  $N(Z^*, var\_k)$
  - 4.3 on garde la valeur si le faciès correspondant correspond à la donnée observée, sinon on conserve l'ancienne valeur.
- 5- On passe à l'autre point
- 6- On recommence le trajet un très grand nombre de fois jusqu'à ce que l'on atteigne une forme de convergence (par ex. le variogramme expérimental correspond à celui souhaité).

Pour effectuer une 2<sup>e</sup> réalisation, soit on repart de valeurs normales différentes, soit on poursuit l'algorithme un grand nombre d'itérations de façon à s'assurer que les valeurs obtenues soient indépendantes de la première réalisation.

## Examen final 2016

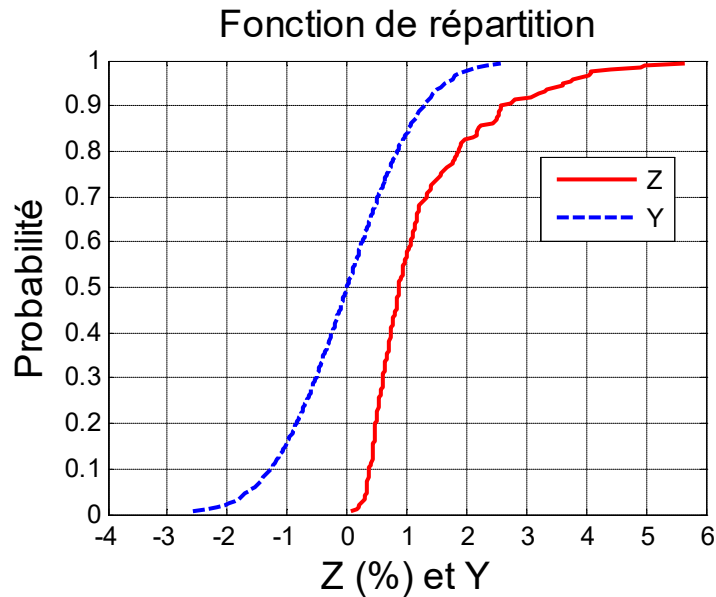
### Question 1 (11 points)

La méthode de simulation SGS consiste à :

- i. choisir au hasard un point à simuler;
- ii. estimer par krigeage simple la distribution conditionnelle de la variable en ce point compte tenu des observations connues et des points déjà simulés;
- iii. tirer aléatoirement une valeur de la distribution conditionnelle et ajouter cette valeur à l'ensemble des données observées et des données déjà simulées.



Lorsque les données (Z) ne suivent pas une distribution gaussienne, on doit au préalable les transformer (Y) pour les rendre gaussiennes. La figure suivante montre graphiquement une telle transformation.



2 pts a) Une donnée valant  $Z(x)=3\%$  aurait quelle valeur gaussienne après transformation?

2 pts b) On applique l'algorithme. À un point  $x_0$  donné, le krigeage simple retourne la valeur  $-1.2$  avec un écart-type de krigeage de  $0.3$ . Quelle est la distribution conditionnelle de  $Y(x_0)$  ?

### Question 1 (suite)

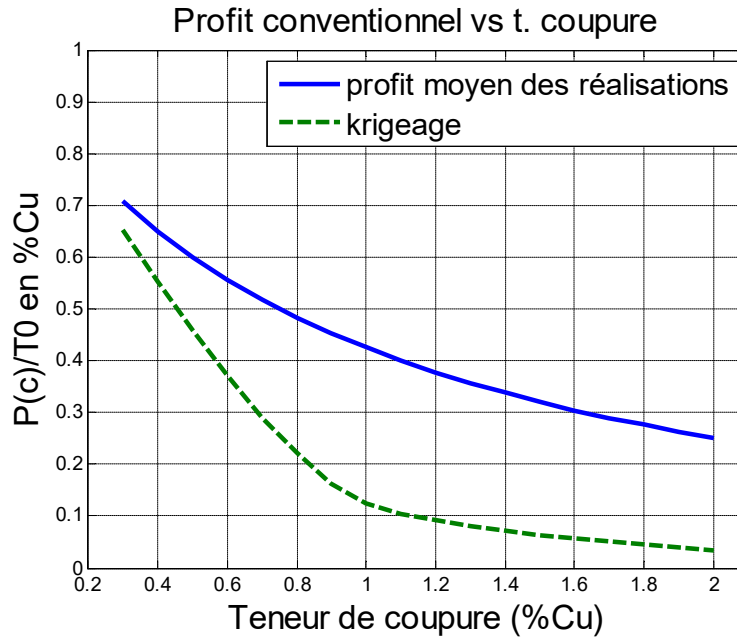
3 pts c) Toujours au point  $x_0$ , on tire aléatoirement une valeur entre  $0-1$  interprétée comme la valeur de la fonction de répartition conditionnelle. Supposons que la valeur  $0.9$  est tirée. Quelles valeurs  $Y(x_0)$  et  $Z(x_0)$  simule-t-on? (Note : une table  $N(0,1)$  est fournie en annexe).

2 pts d) Pour le krigage simple effectué au prochain point à simuler, doit-on utiliser  $Y(x_0)$  ou  $Z(x_0)$ ?

2 pts e) Suggérez et décrivez brièvement une approche qui permettrait d'utiliser le principe séquentiel du SGS, mais sans devoir transformer vers la loi normale et supposer la distribution multigaussienne de la variable transformée.

## Question 2 (10 points)

Soit la figure suivante montrant le profit conventionnel en fonction de la teneur de coupure obtenue par krigeage et le profit obtenu, en moyenne, pour les différentes réalisations d'une simulation.



4 pts a) Si l'on sélectionnait les blocs à partir des estimés actuels de krigeage, quel profit conventionnel obtiendrait-on approximativement à une teneur de coupure de 1% ?

4 pts b) Si l'on connaissait parfaitement les teneurs réelles des blocs, quel profit pourrait-on espérer obtenir à la teneur de coupure 1% ?

2 pts c) Selon les courbes présentées, devrait-on chercher à améliorer l'estimation des blocs si la teneur de coupure est 1% ? Justifiez.

**Question 3 (12 points)**

On vous fournit le tableau suivant donnant, le long d'un profil, les coordonnées, les valeurs observées, les valeurs d'une simulation non-conditionnelle, les valeurs krigées avec d'une part, les données observées et d'autre part, les valeurs simulées.

Coordonnées	Valeurs observées	Valeurs krigées avec les données	Simulation non-conditionnelle	Valeurs krigées avec les valeurs simulées aux points des données	Simulation conditionnelle (à calculer)
0	8	8	10	10	
50	-	8.9	7.5	9.7	
100	-	10	9	9.2	
150	-	11.1	11.8	8.7	
200	12	12	8	8	

6 pts a) Transformez par post-conditionnement par krigeage la simulation non-conditionnelle en une simulation conditionnelle (inscrivez vos réponses directement dans le tableau)

### Question 3 (suite)

3 pts *b) Le signal simulé représente la topographie du fond marin. Supposons que l'on veuille déterminer l'espérance de la pente maximale susceptible d'être rencontrée le long du profil. Est-il préférable de :*

A) *générer plusieurs réalisations, calculer la pente maximale pour chaque réalisation et faire la moyenne des pentes maximales sur toutes les réalisations*

*ou*

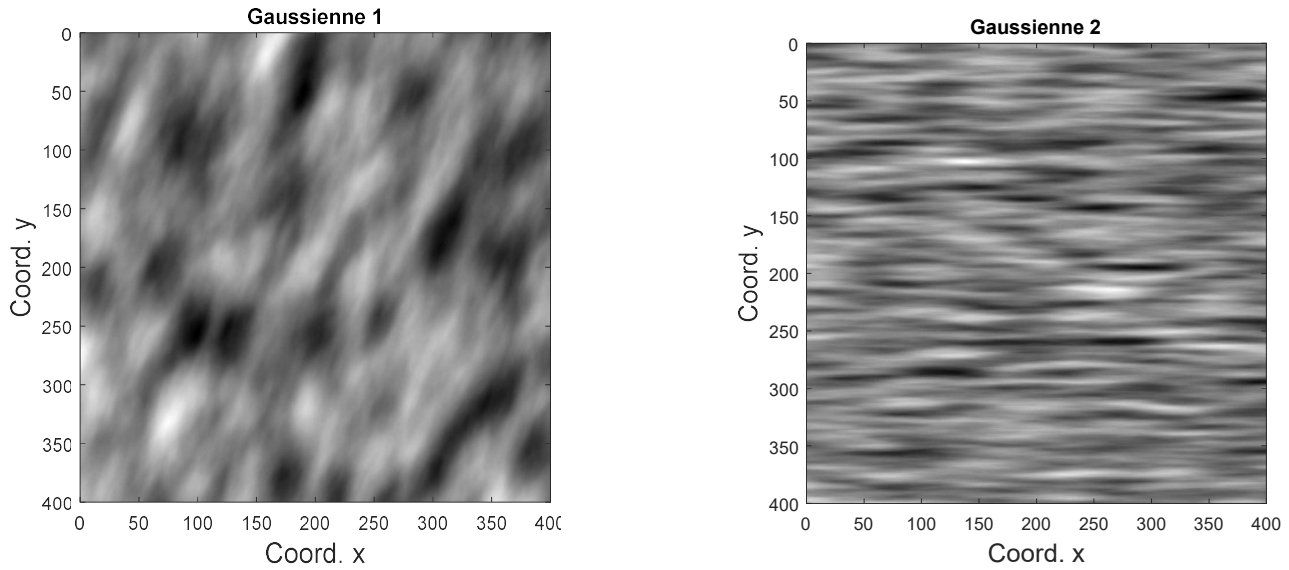
B) *générer plusieurs réalisations, calculer la moyenne des réalisations et calculer la pente maximale sur cette « réalisation » moyenne.*

*Justifier.*

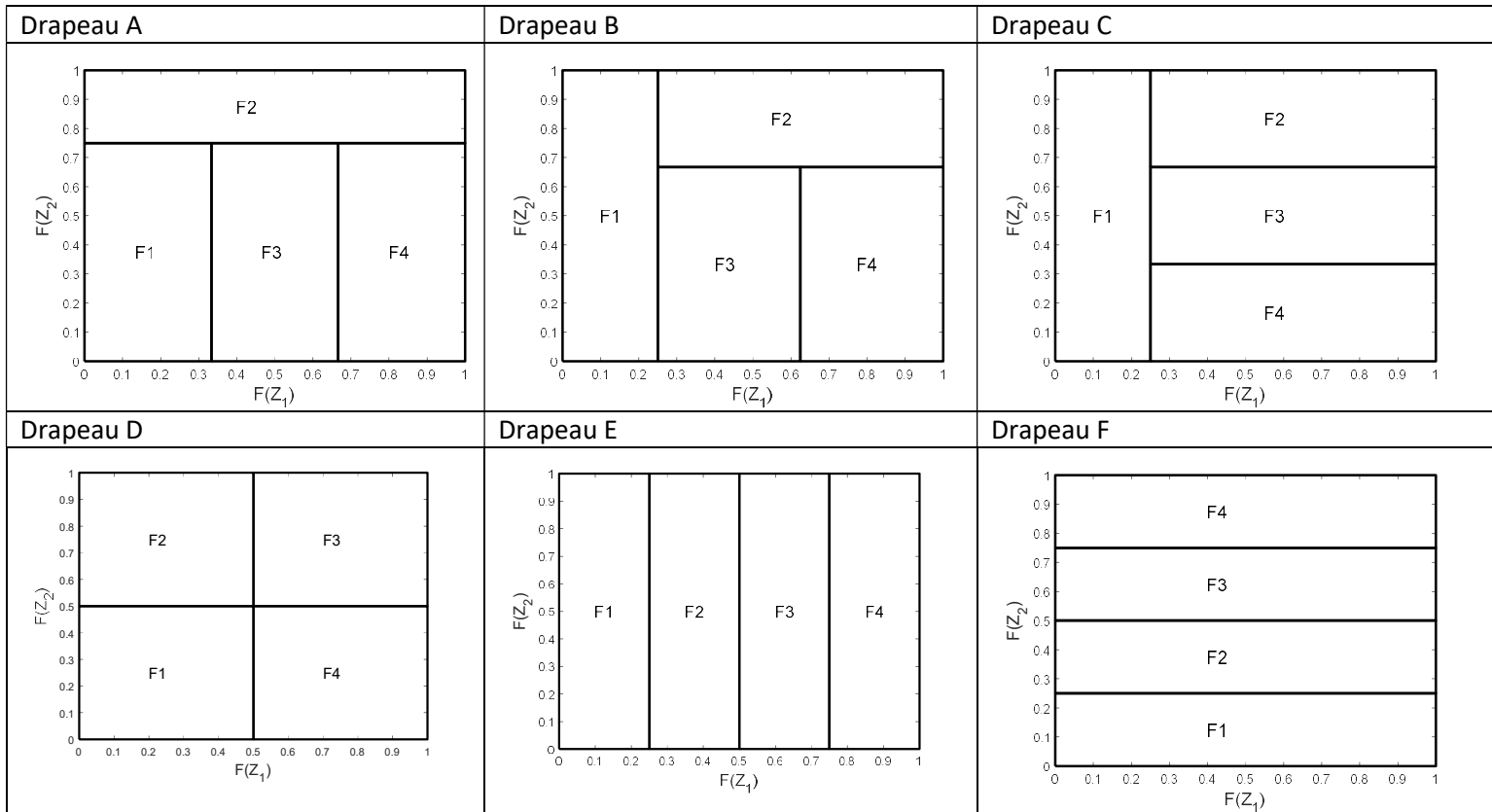
3 pts *c) Le modèle de variogramme utilisé pour la simulation est sphérique avec  $C=25$  et  $a=230$ . La variance de krigeage au point  $x=100$  vaut 17.6. Quel devrait être l'écart-type des réalisations au point  $x=100$ ?*

**Question 4 (16 points)**

La figure 1 montre les réalisations de deux variables gaussiennes indépendantes ayant chacune une structure spatiale différente.

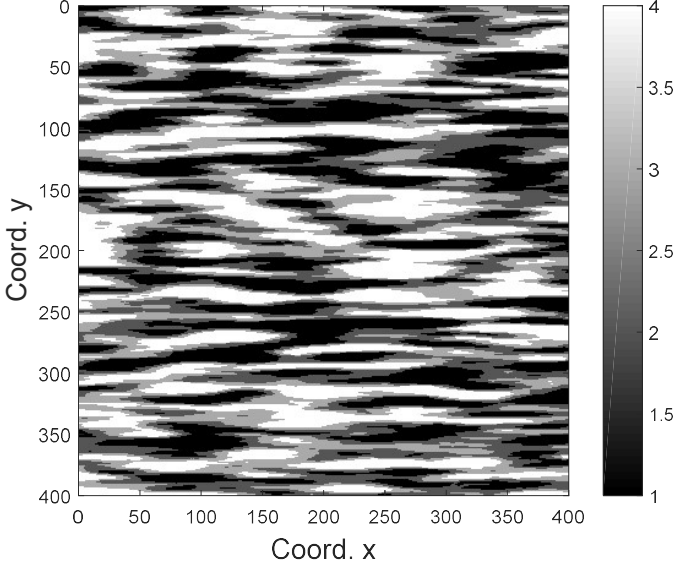
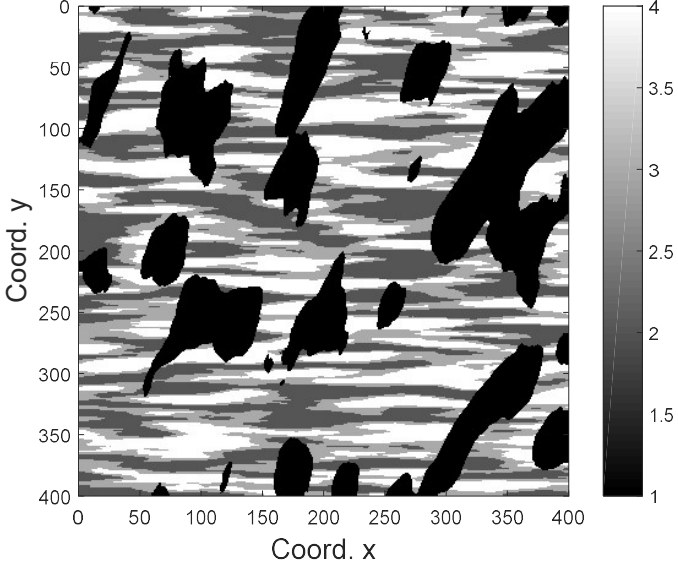


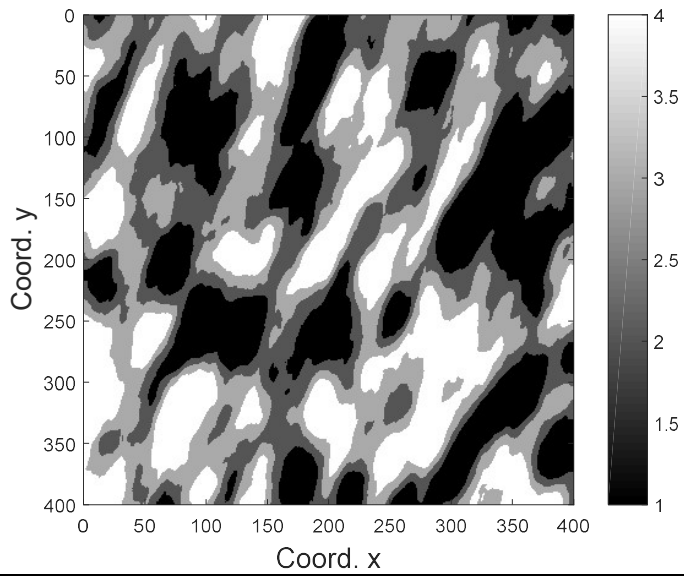
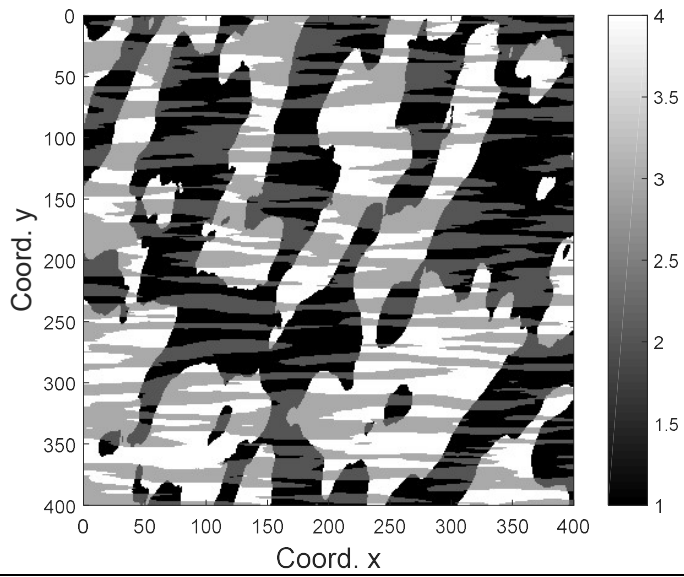
Le tableau 1 montre différents drapeaux de codages appliqués aux variables gaussiennes précédentes. L'axe des x est la fonction de répartition de la première gaussienne, l'axe des y est la fonction de répartition de la seconde.



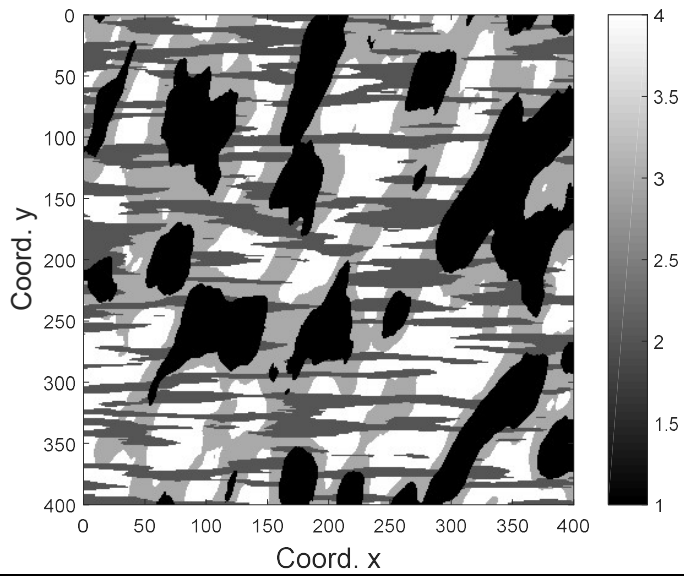
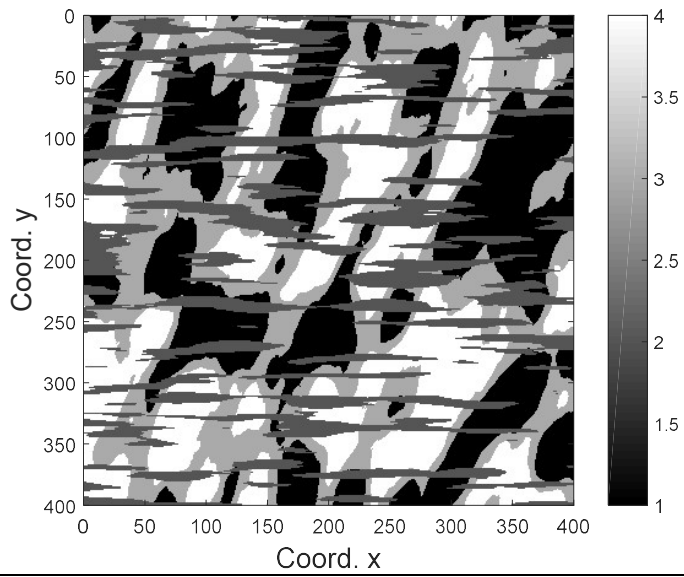
**Question 4 (suite)**

12 pts a) Associez à chacune des réalisations suivantes un des drapeaux parmi ceux illustrés à la figure 1. L'échelle de gris identifie le faciès (1->F1, 2->F2, 3->F3, 4->F4).

Réalisation	Drapeau #
	
	







**Question 4 (suite)**

2 pts *b) En un point donné on a les valeurs gaussiennes  $Z_1=1.2$  et  $Z_2=2.2$ . Utilisant le drapeau B, quel faciès est simulé à ce point ?*

2 pts *c) Quel algorithme doit-on utiliser pour imposer les faciès observés aux points d'observation? Décrivez brièvement son fonctionnement.*

**Question 5 (12 points, soit 2 points par sous-question)**

On a un champ en 2D de taille  $D$  pour lequel on génère un très grand nombre de réalisations non-conditionnelles sur une grille serrée de points. Les simulations sont effectuées avec moyenne théorique «  $m$  » et variance théorique  $\sigma^2$ .

a) *On se place en un point donné  $x_0$  et l'on examine les valeurs obtenues pour les différentes réalisations. Que valent la moyenne et la variance des valeurs simulées en ce point?*

b) *Pour la 1<sup>ère</sup> réalisation, on calcule la variance expérimentale sur l'ensemble du domaine. On répète l'exercice pour la 2<sup>e</sup> réalisation, la 3<sup>e</sup> et ainsi de suite. Que vaut la moyenne (calculée sur l'ensemble des réalisations) des variances expérimentales obtenues sur chaque réalisation?*

c) *Pour chaque réalisation, on regroupe les données en blocs de taille  $V$  (i.e. on calcule la moyenne des valeurs à l'intérieur du bloc). Pour un bloc donné, quelles seront la moyenne et la variance des teneurs de ce bloc sur l'ensemble des réalisations?*

d) *Pour la 1<sup>ère</sup> réalisation, on calcule la variance expérimentale des teneurs des blocs de taille  $V$  sur l'ensemble du domaine ( $D$ ). On répète l'exercice pour la 2<sup>e</sup> réalisation, la 3<sup>e</sup> et ainsi de suite. Que vaut la moyenne (sur les différentes réalisations) des variances expérimentales ainsi obtenues?*

### Question 5 (suite)

On considère cette fois un très grand nombre de réalisations d'une simulation conditionnelle sur une grille très serrée de points.

*e) On se place en un point donné  $x_0$  et l'on examine les valeurs obtenues pour les différentes réalisations. Que valent la moyenne et la variance des valeurs simulées en ce point?*

*f) Pour chaque réalisation, on regroupe les valeurs simulées en blocs de taille  $V$  (i.e. on calcule la moyenne des valeurs à l'intérieur du bloc). Pour un bloc donné, quelles seront la moyenne et la variance des teneurs de ce bloc sur l'ensemble des réalisations?*

### Question 6 (14 points)

On vous présente différents modèles de covariances simples et croisées pour deux variables selon la direction  $x$ .

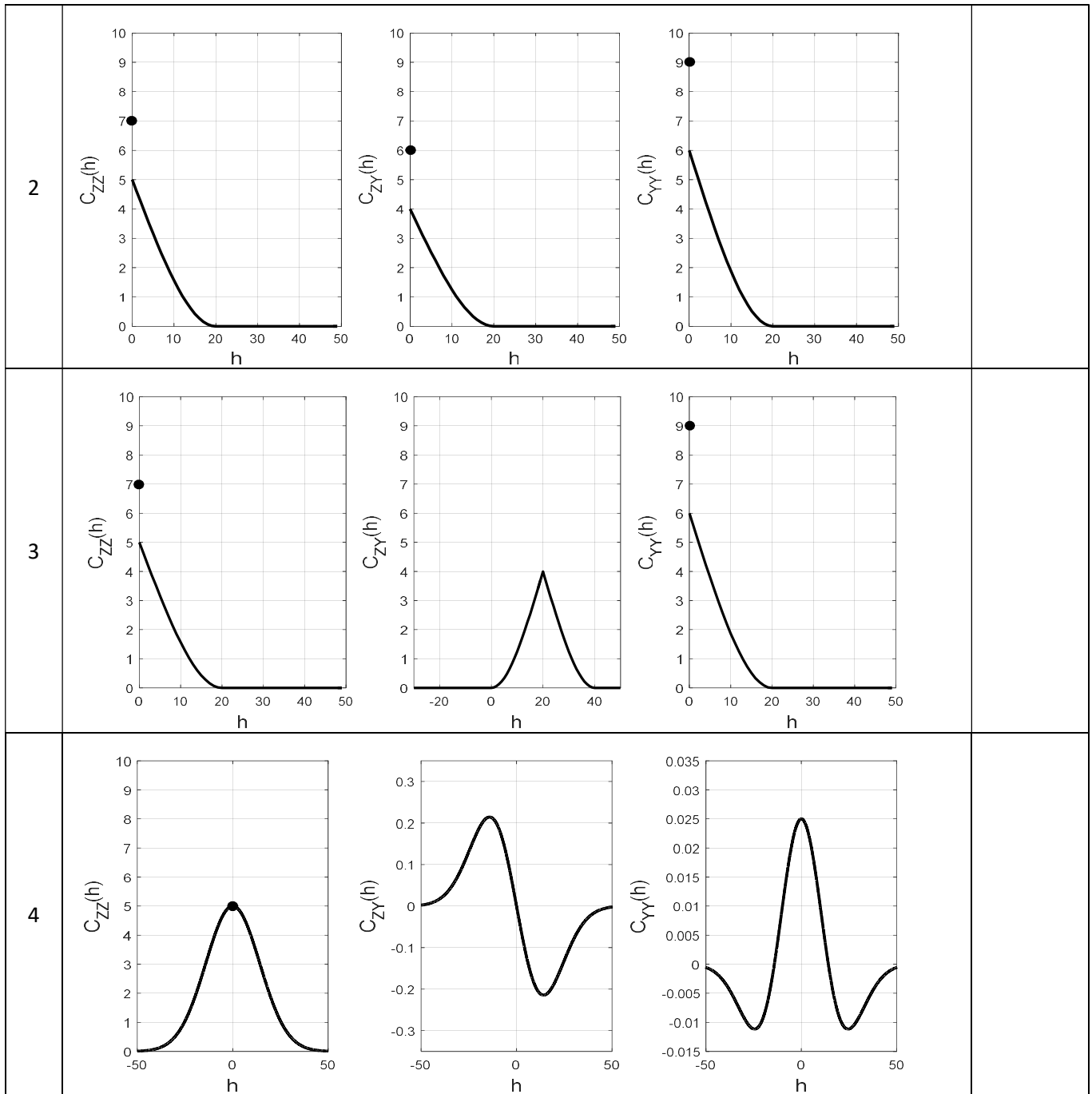
Associez à chaque cas du Tableau 2 l'énoncé parmi les énoncés A à G du Tableau 1 qui décrit le mieux le modèle illustré. Un même énoncé peut décrire plus d'un modèle et un énoncé peut ne décrire aucun modèle. À la fin du tableau 2 vous devez justifier vos choix.

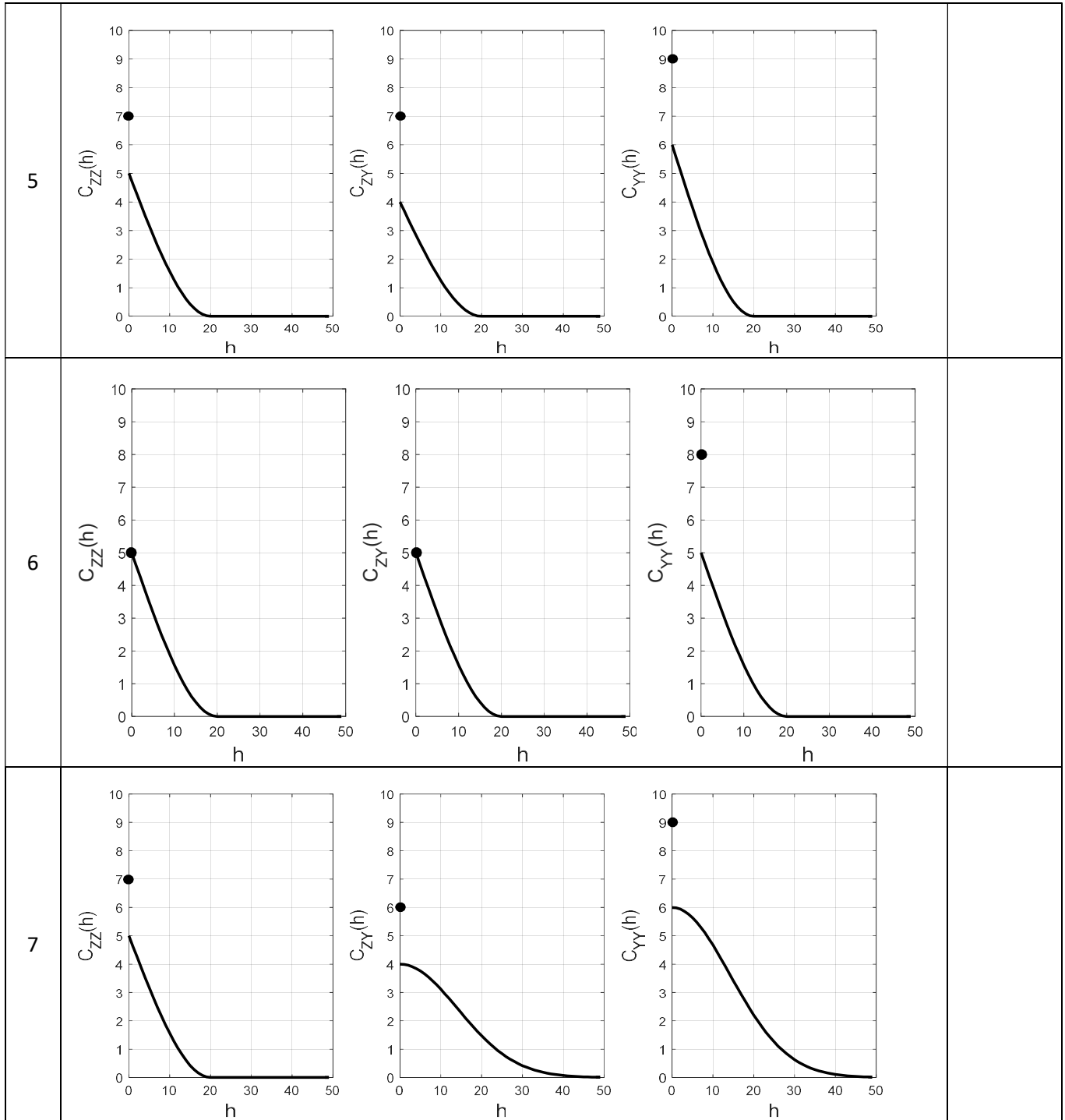
**Tableau 1 : énoncés**

A	Les variables Y et Z semblent être décalées spatialement l'une par rapport à l'autre.
B	La variable Y semble être corrélée à la dérivée de la variable Z selon la direction $x$ .
C	La variable Y semble être une version bruitée de la variable Z. Z et Y définissent un modèle linéaire de corégionalisation admissible.
D	Il s'agit d'un modèle linéaire de corégionalisation admissible.
E	Il ne s'agit certainement pas d'un modèle linéaire de corégionalisation. On ne sait pas si ce modèle est admissible.
F	Le modèle a les apparences d'un modèle linéaire de corégionalisation mais après vérification il semble qu'il ne soit pas admissible.
G	Le modèle a les apparences d'un modèle linéaire de corégionalisation mais après vérification on est certain qu'il n'est pas admissible.

**Tableau 2 : modèles. Pour chaque cas de gauche à droite :  $C_{ZZ}$ ,  $C_{ZY}$ ,  $C_{YY}$ .**

Cas	Modèle			Énoncé
1				





**Question 6 (suite)**

*Justifiez brièvement vos réponses du tableau 2.*



### Question 7 (10 points)

Le tableau suivant montre les données disponibles dans le voisinage du point  $x_0$  de coordonnées (0,0). Deux variables sont observées, Cu et Zn. On veut estimer par cokrigage ordinaire le Cu au point  $x_0$ . Un tiret indique que la valeur n'est pas disponible.

Point	Coord. X	Coord. Y	Cu(x) (en %)	Zn(x) (en %)
$x_1$	-20	-20	3.1	2.7
$x_2$	10	5	2.5	4.3
$x_3$	20	0	4.1	--
$x_4$	-10	10	--	2.1
$x_5$	0	15	2.9	3.6
$x_0$ (à estimer)	0	0	--	3.3

Le modèle de corégionalisation linéaire est décrit par :

$$\begin{bmatrix} C_{zz}(h) & C_{zy}(h) \\ C_{yz}(h) & C_{yy}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \delta(h) + \begin{bmatrix} 4 & 4.5 \\ 4.5 & 6 \end{bmatrix} \exp(-|h|/50)$$

où  $\delta(h) = 1$  si  $h = 0$ , 0 sinon,

3 pts a) Est-ce que le modèle obtenu et les données utilisées laissent présager une meilleure performance du cokrigage ordinaire du Cu au point  $x_0$  par rapport au krigeage ordinaire à ce même point? Justifiez.

**Question 7 (10 points)**

7 pts b) Complétez le système de cokrigage ordinaire en indiquant les valeurs correspondantes pour chaque lettre de A à N.

	Cu(x1)	Zn(x1)	Cu(x2)	Zn(x2)	Cu(x3)	Zn(x4)	Cu(x5)	Zn(x5)	Zn(x0)	uz	uy		Cu(x0)
Cu(x1)	G	I	1.83	2.06	1.64	2.39	1.79	2.01	2.56	A	B	$\lambda_1$	2.27
Zn(x1)	I	H	2.06	2.75	1.84	3.19	2.01	2.68	3.41	C	D	$\alpha_1$	2.56
Cu(x2)	1.83	2.06	7.00	5.50	3.20	2.98	3.01	3.39	3.60	E	F	$\lambda_2$	3.20
Zn(x2)	2.06	2.75	5.50	8.00	3.60	3.97	3.39	4.52	4.80	0	1	$\alpha_2$	3.60
Cu(x3)	1.64	1.84	3.20	3.60	7.00	2.39	2.43	2.73	3.02	1	0	$\lambda_3$	J
Zn(x4)	2.39	3.19	2.98	3.97	2.39	8.00	3.60	4.80	4.52	0	1	$\alpha_4$	3.39
Cu(x5)	1.79	2.01	3.01	3.39	2.43	3.60	7.00	5.50	3.33	1	0	$\lambda_5$	2.96
Zn(x5)	2.01	2.68	3.39	4.52	2.73	4.80	5.50	8.00	4.44	0	1	$\alpha_5$	K
Zn(x0)	2.56	3.41	3.60	4.80	3.02	4.52	3.33	4.44	8.00	0	1	$\alpha_0$	L
uz	A	C	E	0	1	0	1	0	0	0	0	uz	M
uy	B	D	F	1	0	1	0	1	1	0	0	uy	N

### Question 8 (15 points)

La figure 1 montre la fonction de répartition obtenue pour l'ensemble d'un gisement de Cu (en %). La figure 2 montre les variogrammes obtenus pour les indicatrices codées par rapport à différents quantiles de la distribution du Cu (10%, 50%, 90%).

Figure 1

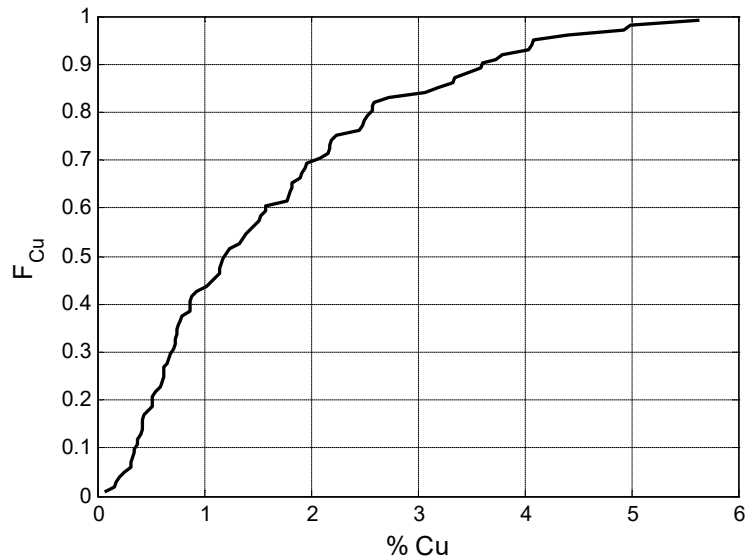
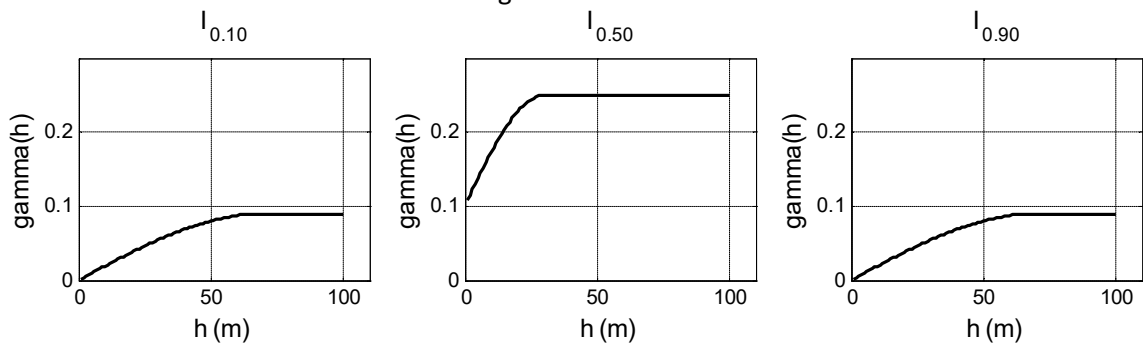


Figure 2



3 pts a) L'hypothèse d'une distribution multinormale (après transformation vers la loi normale du %Cu) vous semble-t-elle réaliste à première vue ? Justifiez votre réponse.

### Question 8 (suite)

- 3 pts b) Quel lien y a-t-il entre les indicatrices codées par rapport aux quantiles 10%, 50% et 90% de la distribution du %Cu et les indicatrices codées par rapport aux mêmes quantiles, mais cette fois de la distribution de  $Y$ , où  $Y$  est la variable normale obtenue par transformation graphique du %Cu ? (Note on suppose que toutes les valeurs du %Cu sont distinctes).

On veut effectuer le krigeage simple d'indicatrices au point  $x_0$  en utilisant les points  $x_1$  à  $x_3$ . Les poids de krigeage simple obtenus pour différents seuils sont donnés au tableau suivant.

Point	% Cu au point $x_i$	poids $K_s$ , au seuil 0.5% Cu	poids $K_s$ , au seuil 1.0 % Cu	poids $K_s$ , au seuil 2.0% Cu
$x_1$	1.2%	0.3	0.2	0.21
$x_2$	3%	0.45	0.3	0.4
$x_3$	0.3%	0.15	0.2	0.23

- 6 pts c) Estimez par krigeage simple d'indicatrices au point  $x_0$  la fonction de répartition conditionnelle du %Cu. (Note : Il n'y a pas de correction d'ordre à effectuer).

- 3 pts d) Selon les résultats en c) quelle est  $P(\%Cu \text{ au point } x_0 \leq 1.5\%)$  ?

Annexe :

Fonction de répartition de la  $N(0,1)$ , i.e.  $P(Z \leq z)$ . L'entier et la 1<sup>ère</sup> décimale de « z » sont lus en ligne, la 2<sup>e</sup> décimale est lue en colonne.

Exemple d'utilisation :

i. Trouver  $p=F(z)$  à « z » spécifié :  $F(1.37)=P(N(0,1)<1.37)=0.9147$

ii. Trouver z à « p » spécifié :  $F(z)=0.9904 \Rightarrow z=2.34$

Fonction de répartition $N(0,1)$										
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

## Corrigé

### Q1

a) environ 1.3

b)  $Y(x_0) \sim N(-1.2, (0.3)^2)$

c) On cherche  $y$  tel que  $P(Y_0 < y) = 0.9 \rightarrow P(N(0,1) < (y+1.2)/0.3) = 0.9$ . La table  $N(0,1)$  indique que cette valeur est 1.28, donc  $y = 1.28 * 0.3 - 1.2 = -0.82$ . La valeur de  $Z$  correspondante est environ 0.5.

d)  $Y(x_0)$

e) Séquentielle d'indicatrice. On garde la même approche qu'en SGS sauf que l'on estime la distribution conditionnelle au point  $x_0$  par un krigeage d'indicatrices. On visite un point à simuler choisi au hasard. On effectue le krigeage d'indicatrice pour obtenir la distribution conditionnelle. On tire de cette distribution conditionnelle et on ajoute cette valeur aux données et points déjà simulés, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les points à simuler aient été visités.

### Q2

a) Environ 0.12

b) environ 0.42

c) oui, la simulation démontre que l'on multiplierait le profit actuel par un facteur allant jusqu'à 3.5.

### Q3

a) Dans l'ordre : 8, 6.7, 9.8, 14.2, 12

b) option A. La fonction de transfert est ici non-linéaire. Il faut donc l'appliquer à chaque réalisation avant de faire la moyenne.

c)  $17.6^{0.5} = 4.2$

### Q4

a) Dans l'ordre : F, C, D, E, A, B

b) On trouve  $F(1.2) = 0.885$  et  $F(2.2) = 0.986$ . Ceci nous donne  $F_2$ .

c) L'échantillonneur de Gibbs. On commence par prendre des valeurs de gaussiennes compatibles avec les faciès observés. Ensuite, un très grand nombre de fois, et pour chaque gaussienne séparément ou conjointement (si elles sont corrélées) on visite un point au hasard, on le retire et on l'estime chaque gaussienne par krigeage ou cokrigeage simple. Ceci définit une distribution conditionnelle pour chaque gaussienne. On tire une valeur de cette distribution. Si elle respecte le faciès observé, cette nouvelle valeur ou ces nouvelles valeurs remplacent les anciennes. Sinon, on ne fait rien, i.e. on conserve les anciennes valeurs et l'on passe au point suivant.

### Q5

a)  $m$  et  $\sigma^2$

b)  $D^2(\cdot | D)$

c)  $m$ ,  $\sigma_V^2$

d)  $D^2(V | D)$

e) La valeur obtenue par krigeage simple et la variance de krigeage simple.

f) La valeur obtenue par krigeage simple de bloc et la variance de krigeage simple de bloc.

### Q6

1-F, 2-D, 3-A, 4-B, 5-G, 6-C, 7-E

Justifications

1-F le modèle est  $[2 \ 1; 1 \ 3]$  pépite +  $[5 \ 6; 6 \ 6]$ spher( $a=20$ ). La 2e matrice montre un déterminant négatif, donc la condition suffisante n'est pas respectée. Le modèle est probablement non admissible. La réponse on est certain qu'il est non-admissible est aussi acceptée.

2-D le modèle est  $[2 \ 2; 2 \ 3]$ pépite +  $[5 \ 4; 4 \ 6]$ spher( $a=20$ ). les deux matrices ont un déterminant positif, le modèle est admissible.

3-A La covariance croisée est décalée de 20.

4-B La covariance croisée est anti-symétrique et la covariance simple montre des covariances négatives comme on attend pour la dérivée d'une variable.

5-G le modèle est  $[2 \ 3; 3 \ 3]$ pépite +  $[5 \ 4; 4 \ 6]$ spher( $a=20$ ). La première matrice a un déterminant négatif. Comme  $c$ , est l'effet de pépite, la condition de Cauchy-Schwartz n'est pas respectée et donc on est certain que le modèle n'est pas admissible.

6-C. On a la même structure sur le croisé et la variable secondaire sauf pour une effet de pépite supplémentaire correspondant au bruit.

7-E. Ce n'est pas un modèle linéaire de corégionalisation car la structure gaussienne n'apparaît pas sur la variable Z. La vérification de l'admissibilité ne peut être faite facilement.

Q7

a) oui car les données Cu et Zn ne sont pas disponibles aux mêmes points. Entre autres Zn est observé au point  $x_0$ . De plus Zn montre une corrélation de  $5.5/(7*8)^{0.5} = 0.73$ , ce qui est assez élevé.

b)

A=1, B=0, C=0, D=1, E=1, F=0, G=7, H=8, I=5.5, J= $4\exp(-20/50)=2.68$ , K= $4.5\exp(-15/50)=3.33$ , L=4.5, M=1, N=0 .

Q8

a) Non car la médiane apparaît moins structurée que les quantiles plus extrêmes 0.1 et 0.9 (par l'effet de pépite relatif plus élevé et par la portée plus courte. Dans un champ gaussien, c'est à la médiane que la structure devrait être maximale.

b) Elles sont identiques car la transformation monotone ne change pas l'ordre.

c) De la fonction de répartition, on trouve 0.2, 0.44 et 0.7 pour les trois seuils.

Pour 0.5% Cu, les indicatrices sont 0 0 1 => estimé par KS vaut  $0.15 + (1-0.9)*0.2 = 0.17$

Pour 1% Cu, les indicatrices sont 0 0 1 => estimé vaut  $0.2 + (1-0.7)*0.44 = 0.33$

Pour 2% Cu, les indicatrices sont 1,0,1 => estimé vaut  $0.44 + (1-0.84)*0.7 = 0.55$

d) Par interpolation linéaire,  $(0.33+0.55)/2 = 0.44$

**Examen 2015**

**Question 1 (15 points)**

*a) Expliquez pourquoi le post-conditionnement par krigeage des simulations non-conditionnelles peut être effectué beaucoup plus rapidement que le SGS sachant que l'on simule dans les deux cas le même nombre de points, et ce, en utilisant les mêmes données.*

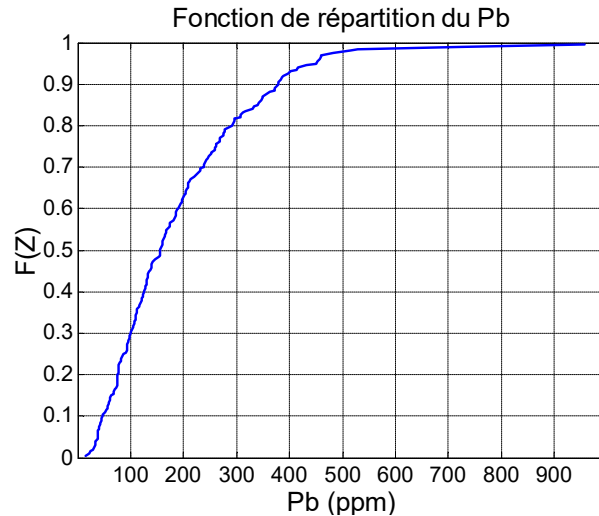
*b) Par recuit simulé, on peut simuler des données dont le variogramme expérimental colle presque parfaitement au modèle souhaité. Expliquez en quoi ceci pourrait être en fait problématique?*

*c) La méthode SGS permet la simulation de variables continues gaussiennes. Proposez une modification à la méthode SGS qui permette la simulation avec de données non-gaussiennes (comme pour les données de contamination au Pb de Dallas).*



## Question 2 (12 points)

Un sol de la région de Montréal est contaminé au plomb dû à la présence d'une usine de recyclage de batteries automobiles. Deux cents analyses de la concentration en plomb sont disponibles et la fonction de répartition est illustrée à la figure suivante :



3 pts a) Quel devrait être approximativement le palier pour l'indicatrice correspondant au seuil 300 ppm?

Lors de l'estimation d'un point  $x_0$ , le krigeage simple de l'indicatrice correspondant au seuil 200ppm retourne les poids suivants :

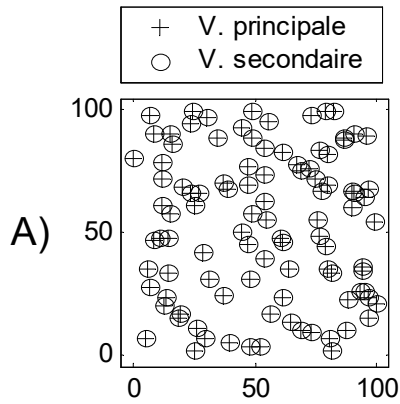
$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.11, \lambda_3 = 0.22, \lambda_4 = 0.70$$

Les valeurs observées en ces points sont respectivement (en ppm) :  $Z_1=127$ ,  $Z_2=210$ ,  $Z_3=185$ ,  $Z_4=233$

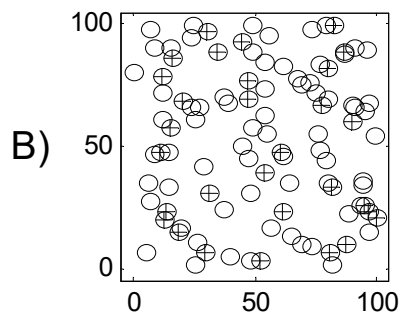
9 pts b) Quelle est la probabilité (estimée par KI simple) que la concentration au point  $x_0$  soit supérieure à 200 ppm ?

### Question 3 (15 points)

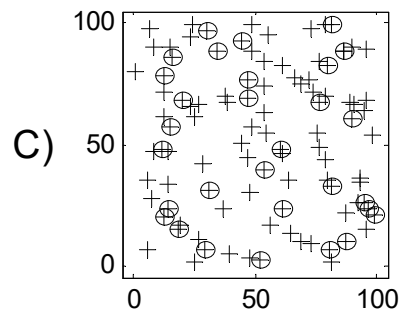
Le tableau suivant présente, dans la colonne de gauche, le plan de localisation d'observations d'une variable principale ( $Z$ ) et d'une variable secondaire ( $Y$ ). Dans la colonne de droite, on donne le modèle linéaire de corégionalisation ajusté à ces données. Dans les matrices,  $Z$  apparaît en premier,  $Y$  en second.  $\delta(h)$  représente la covariance effet de pépité.



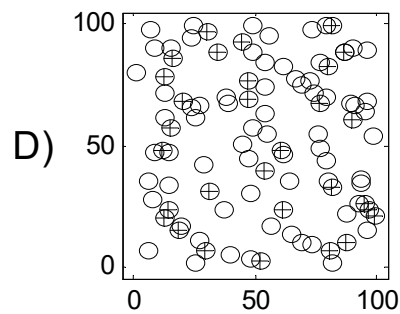
$$C(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 0.9 \end{bmatrix} \delta(h) + \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} Sph(a=50, C=1)$$



$$C(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 0.9 \end{bmatrix} \delta(h) + \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} Sph(a=50, C=1)$$



$$C(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 0.9 \end{bmatrix} \delta(h) + \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} Sph(a=50, C=1)$$



$$C(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 0.9 \end{bmatrix} \delta(h) + \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} Sph(a=50, C=1)$$

### Question 3 (suite)

12 pts a) Indiquez pour chaque cas A) à D) si le cokrigeage de  $Z(x)$  (par  $Z$  et  $Y$ ) est susceptible d'améliorer de façon importante la précision des estimations par rapport au seul krigeage de  $Z(x)$ . Justifiez vos réponses.

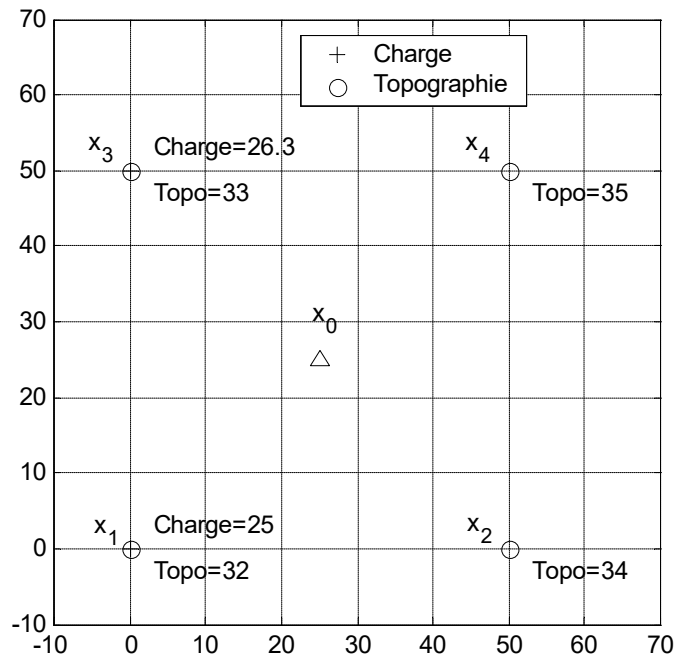
3 pts b) Indiquez quelle méthode vous permettrait, avec les mêmes données, de confirmer ou d'infirmer vos réponses en a) ?

#### Question 4 (18 points)

On désire estimer la charge hydraulique d'un aquifère à nappe libre. On observe une excellente corrélation entre la charge hydraulique et la topographie. Le modèle linéaire de corégionalisation pour ces deux variables (dans l'ordre : charge, topographie) est :

$$C(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 \\ 0.8 & 1.2 \end{bmatrix} \delta(h) + \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} Sph(a = 100m, C = 1)$$

La figure suivante (coordonnées en m) montre les quatre points ou les données (charge et/ou topographie, les deux en m) sont disponibles pour l'estimation de la charge au point  $x_0$ .



3 pts a) Quelle est la corrélation (à  $h=0$ ) entre charge et topographie selon le modèle de corégionalisation?

**Question 4 (suite)**

10 pts b) Construisez (sans le résoudre) le système de cokrigage ordinaire pour l'estimation de la charge hydraulique au point  $x_0$ . Identifiez clairement les entrées de la matrice et des vecteurs. Le tableau suivant pourrait vous éviter des calculs :

Distance (m)	0	$25*2^{0.5}$	50	$50*2^{0.5}$
C(h), Sph(a=100m, C=1)	1	0.4918	0.3125	0.1161

Les poids de cokrigage et les multiplicateurs de Lagrange obtenus pour la question b) sont :

$$\lambda_{1, \text{ch arg } e} = \lambda_{3, \text{ch arg } e} = 1/2 \quad \lambda_{1, \text{topo}} = \lambda_{3, \text{topo}} = -0.19 \quad \lambda_{2, \text{topo}} = \lambda_{4, \text{topo}} = 0.19 \quad \mu_{\text{ch arg } e} = -0.03 \quad \mu_{\text{topo}} = 0.31$$

5 pts c) Quelle est la valeur estimée et la variance de cokrigage pour la charge au point  $x_0$ ?

**Question 5 (12 points)**

On effectue une simulation de moyenne 0 par méthode de Choleski. La matrice L obtenue est :

$$L = \begin{bmatrix} 7.75 & & & & \\ 3.82 & 6.74 & & & \\ 4.59 & 3.23 & 5.34 & & \\ 4.36 & 1.45 & 2.20 & 5.84 & \\ 4.77 & 1.79 & 2.42 & 2.86 & 4.48 \end{bmatrix}$$

3 pts a) *Quelle est la covariance entre les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> variables aléatoires?*

3 pts b) *On a observé  $Z_1=5$ . Que vaut  $Y_1$ ?*

**Question 5 (suite)**

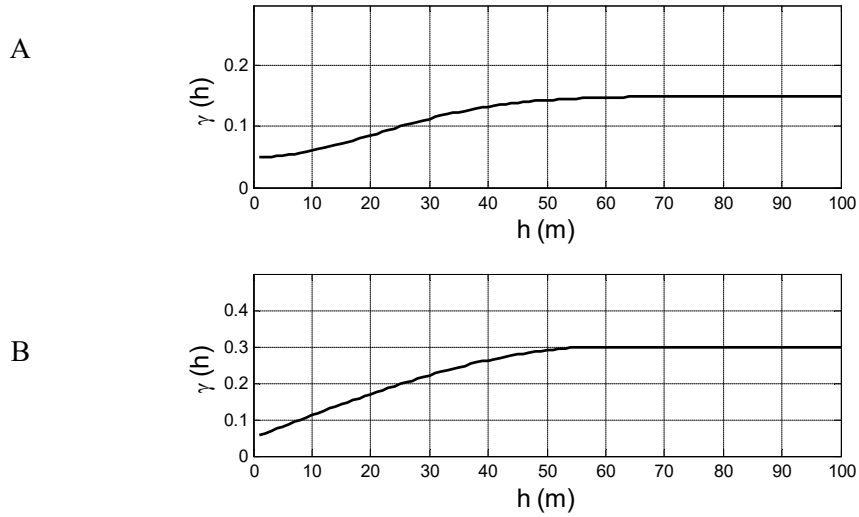
3 pts c) *Quelle est l'espérance conditionnelle de  $Z_2$  sachant que  $Z_1=5$ ?*

3 pts d) *En pratique, quelle est la principale limitation touchant la méthode de Choleski ?*



**Question 6 (10 points)**

La figure suivante montre des modèles de variogramme sensés être ajustés aux variogrammes des indicatrices correspondant à des seuils A et B pour la teneur en Pb (mesurée en ppm) du site de Dallas.

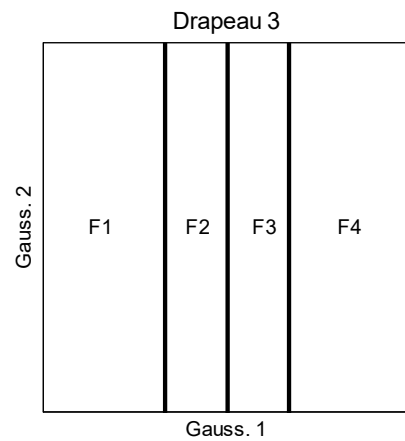
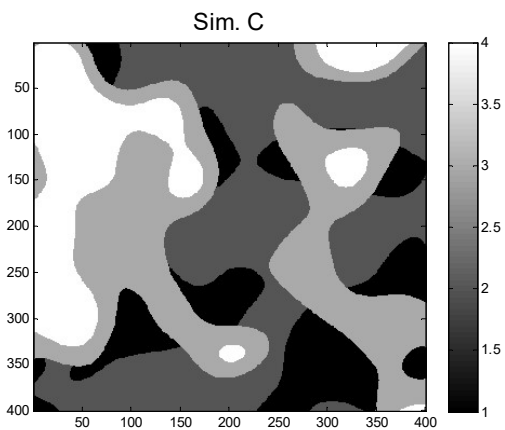
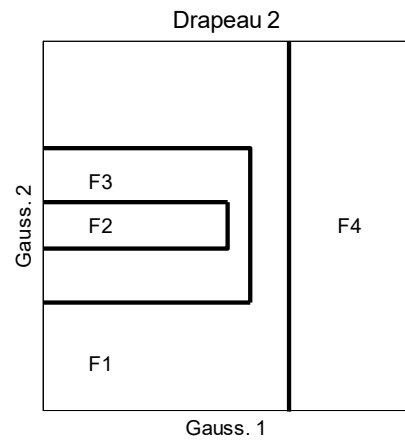
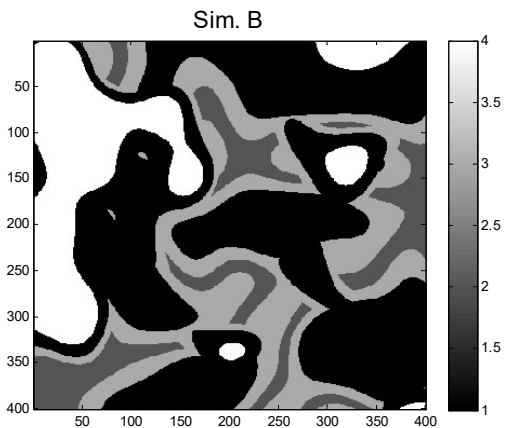
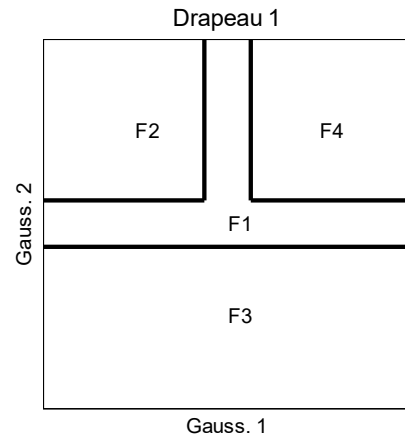
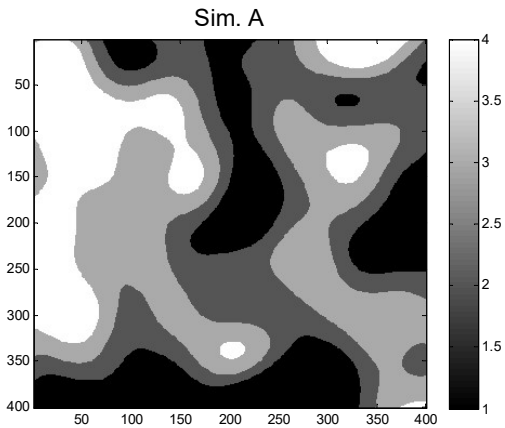


8 pts a) *Quelles erreurs flagrantes ont été commises dans l'ajustement des variogrammes (justifier)?*

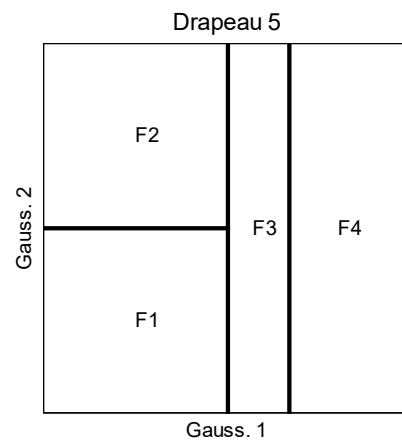
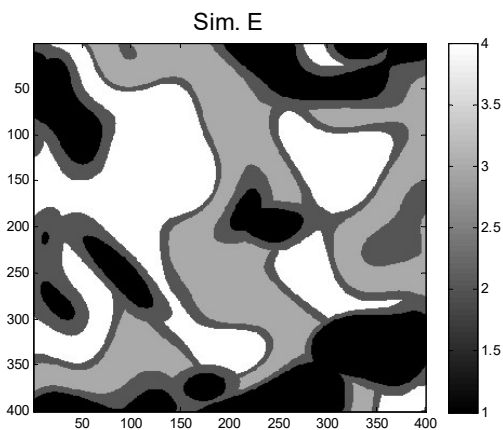
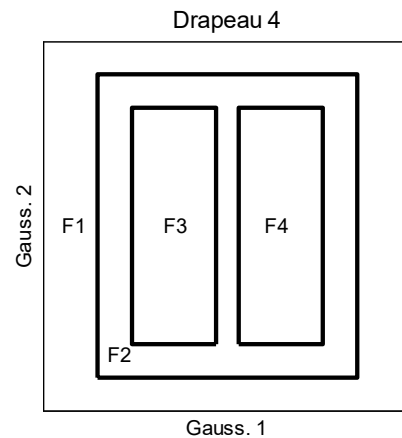
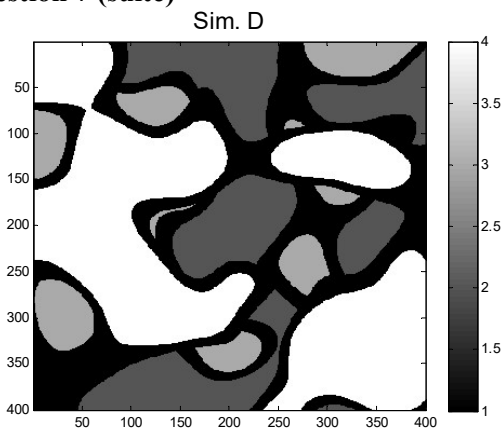
2 pts b) *Quelles sont les unités des variogrammes illustrés?*

**Question 7 (18 points)**

Les figures suivantes montrent 5 différentes simulations plurigaussiennes (A à E) et 5 différents drapeaux de codage (1 à 5) illustrés dans l'espace gaussien (entre -2 et 2). Dans chaque simulation, on retrouve 4 faciès représentés par des niveaux de gris différents (F1=1, F2=2, F3=3, F4=4). Les drapeaux ont été placés dans un ordre quelconque. On désire associer le bon drapeau à chaque image simulée.



**Question 7 (suite)**



10 pts a) Associez à chaque simulation le drapeau de codage (de 1 à 5) correspondant. Indiquez « aucun » si aucun drapeau de codage ne correspond selon vous à la simulation considérée.

Simulation	A	B	C	D	E
Drapeau					

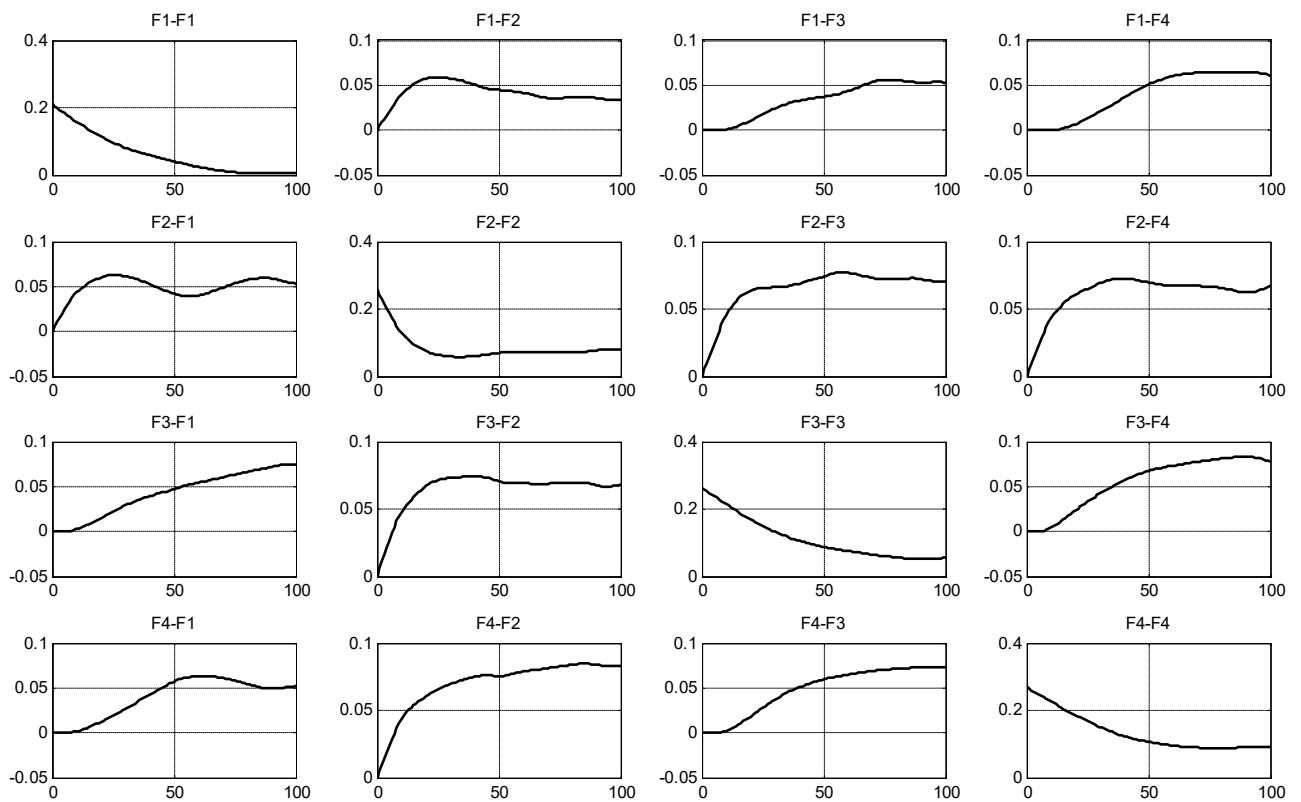
2 pts b) Une seule simulation de deux variables gaussiennes a été utilisée pour produire les simulations de faciès précédentes. Le modèle de variogramme utilisé pour les deux variables est le même. Identifiez le modèle utilisé parmi les modèles suivants (justifiez votre choix) :

- i. Gaussien isotrope avec portée de 100 pixels
- ii. Sphérique isotrope avec portée de 100 pixels
- iii. Gaussien anisotrope avec portées 100 horizontalement et 10 verticalement
- iv. Sphérique anisotrope avec portées 100 horizontalement et 10 verticalement

**Question 7 (suite)**

3 pts c) Identifiez la simulation (parmi A à E) qui aurait pu être obtenue par la méthode gaussienne tronquée plutôt que par la méthode plurigaussienne?

Les covariances non centrées expérimentales des indicatrices de faciès sont calculées pour l'une des simulations A à E. La figure suivante montre le résultat obtenu selon la direction verticale (positive vers le bas). On a considéré séparément  $I_i(x) I_j(x+h)$  et  $I_j(x) I_i(x+h)$ .



3 pts d) Identifiez la simulation (parmi A à E) ayant fourni ces covariances non-centrées d'indicatrices. Justifiez votre choix.

## Corrigé

### Question 1

a) le post-conditionnement par krigeage est effectué avec toujours les mêmes données, si le nombre n'est pas trop grand, on peut faire le krigeage globalement et donc inverser la matrice de krigeage une seule fois. Avec SGS, le nombre de données inclut le nombre de points déjà simulés. Ce nombre normalement devient trop grand pour permettre l'inversion d'un seul coup.

b) Comme on l'a vu au cours, on doit s'attendre à voir des fluctuations du variogramme expérimental par rapport au modèle. Ne pas voir de fluctuations implique que statistiquement quelque chose n'est pas respecté.

c) au lieu de faire le KS, on effectue le krigeage d'indicatrices (seuils) et l'on tire une valeur de la distribution conditionnelle ainsi obtenue. On ajoute cette valeur aux données simulées et l'on poursuit.

### Question 2

a) Au seuil 300 ppm la fonction de répartition vaut approximativement 0.82. Le palier devrait donc être assez près de  $0.82 * 0.18 = 0.15$ .

b) On code les valeurs par rapport au seuil 200, on a  $I_1=1, I_2=0, I_3=1, I_4=0$ . La somme des  $\lambda$  donne 0.81. La valeur estimée vaut donc  $0.22 + (1-0.81) * 0.63 = 0.34$ .  $P(Z_0 < 200) = 0.34$ , donc  $P(Z_0 > 200) = 1 - 0.34 = 0.66$ .

### Question 3

4- A) Même si la corrélation entre les 2 variables est forte, le fait que la variable secondaire soit connue aux mêmes emplacements devrait faire que le gain de précision sera assez limité.

B) La variable secondaire est plus abondante et l'on a une forte corrélation selon le modèle (0.92). Le cokrigeage devrait améliorer beaucoup la précision des prédictions.

C) La variable principale est connue en plus d'endroits que la variable secondaire, le cokrigeage apportera très peu;

D) La disposition est comme en B) mais ici la corrélation est seulement de 0.07, ce qui indique que la variable secondaire n'est pas utile pour déterminer la variable principale.

b) En effectuant une validation croisée où l'on enlèverait les deux informations (var. principale et var. secondaire) au point d'estimation, on pourrait apprécier le gain procuré par le cokrigeage.

### Question 4

6- a) corrélation :  $9.8 / (8 * 13.2)^{0.5} = 0.95$ .

b) La matrice de cokrigeage est :

	Z <sub>1</sub>	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Z <sub>3</sub>	Y <sub>3</sub>	Y <sub>4</sub>		
Z <sub>1</sub>	8	9.8	2.8125	2.1875	2.8125	1.045	1	0
Y <sub>1</sub>	9.8	13.2	3.75	2.8125	3.75	1.3934	0	1
Y <sub>2</sub>	2.8125	3.75	13.2	1.045	1.3934	3.75	0	1
Z <sub>3</sub>	2.1875	2.8125	1.045	8	9.8	2.8125	1	0
Y <sub>3</sub>	2.8125	3.75	1.3934	9.8	13.2	3.75	0	1
Y <sub>4</sub>	1.045	1.3934	3.75	2.8125	3.75	13.2	0	1
	1	0	0	1	0	0	0	0
	0	1	1	0	1	1	0	0

Le vecteur de droite est :

$$\begin{array}{r} Z_0 \\ Z_1 \quad 3.4424 \\ Y_1 \quad 4.4259 \\ Y_2 \quad 4.4259 \\ Z_3 \quad 3.4424 \\ Y_3 \quad 4.4259 \\ Y_4 \quad 4.4259 \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

c) valeur estimée :  $(25+26.3)/2 - 0.19*(33+32)+0.19*(34+35) = 26.41$  m  
 variance de krigeage :  $8-(3.44*.5-.19*.443+.19*4.43+.5*3.44-.19*4.43+.19*4.43-.03) = 4.59$

### Question 5

a) on multiplie la 2<sup>e</sup> ligne de L avec la 3<sup>e</sup> colonne de L' soit :  $3.82*4.59+6.74*3.23=39.30$

b)  $Y_1=5/7.75=0.65$

c)  $3.82*0.65=2.48$

d) On ne peut simuler de grands champs pour des raisons d'espace mémoire. La matrice de covariance est en effet de taille  $n \times n$ , où  $n$  est le nombre de points à simuler.

### Question 6

a) erreurs flagrantes : A : pour une variable indicatrice, l'on doit ajuster un modèle avec comportement linéaire à l'origine, jamais un gaussien

B : le palier maximal ne devrait pas dépasser 0.25 en théorie.

b) sans unité puisque ce sont des variogrammes d'indicatrice.

### Question 7

a) Associez à chaque simulation le drapeau de codage correspondant.

Simulation	A	B	C	D	E
Drapeau	3	2	5	1	4

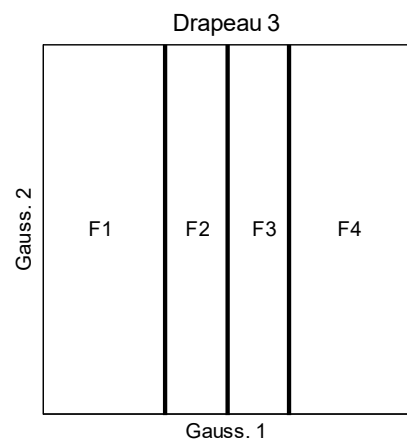
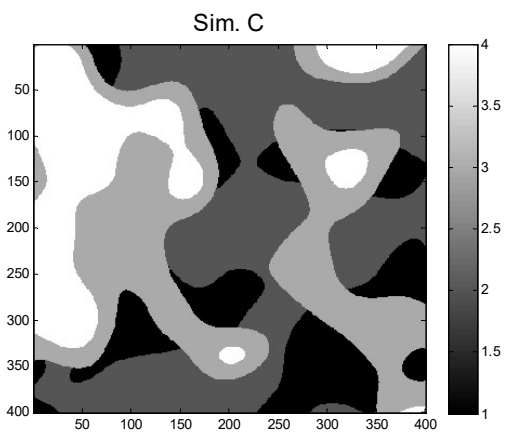
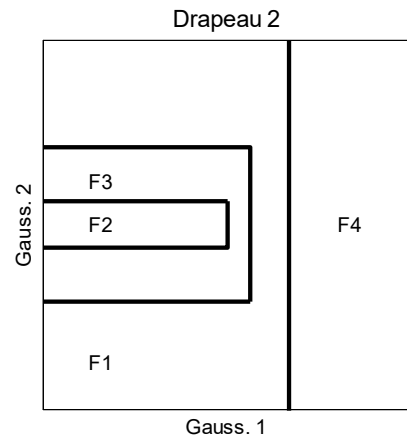
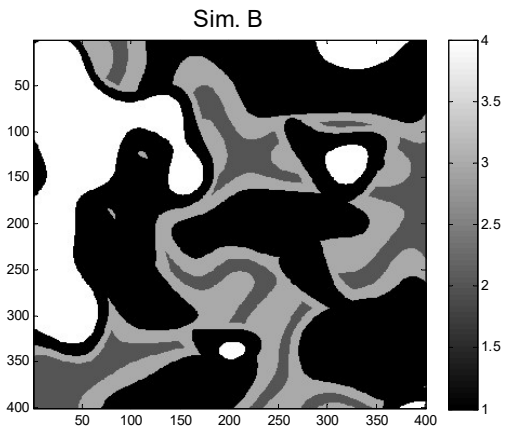
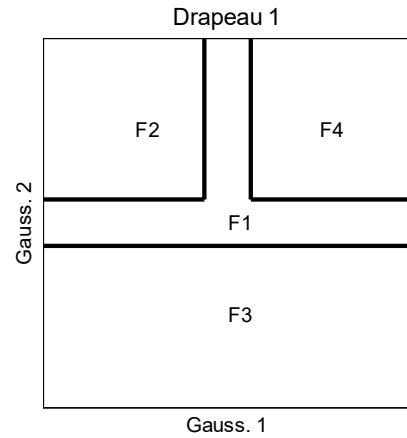
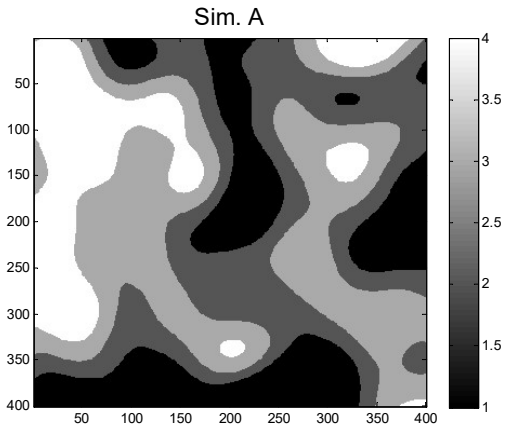
b) Gaussien isotrope. On ne voit aucun étirement indicateur d'anisotropie et la texture est clairement celle d'un gaussien en raison de la régularité des contours des facies.

c) Celle correspondant au drapeau 3, donc A.

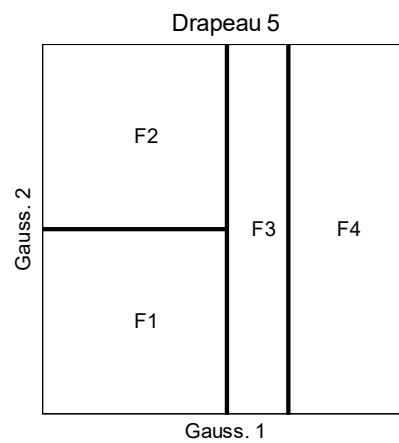
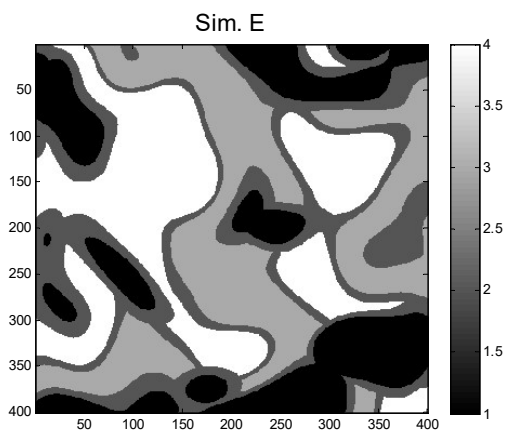
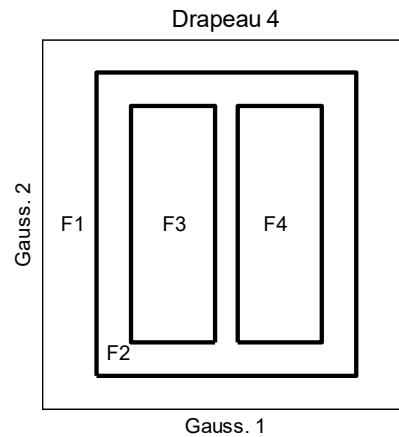
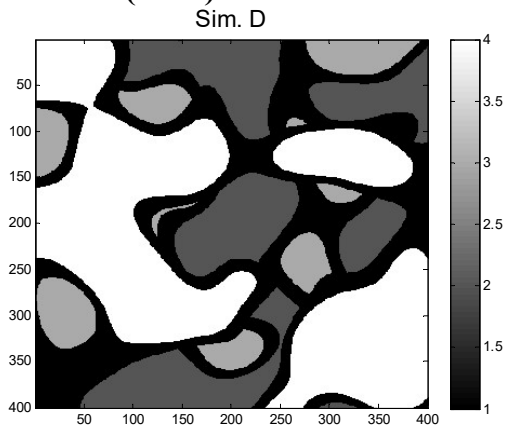
d) Pas de contact F3-F4, F1-F3 et F1-F4 => simulation E (drapeau 4)

**Examen 2014**  
**Question 1 (12 points)**

Les figures suivantes montrent 5 différentes simulations plurigaussiennes (A à E) et 5 différents drapeaux de codage (1 à 5) placés dans un ordre quelconque. Dans chaque simulation, on retrouve 4 faciès représentés par des niveaux de gris différents (F1=1, F2=2, F3=3, F4=4). On désire associer un drapeau à chaque image simulée.



**Question 1 (suite)**



10 pts a) Associez à chaque simulation le drapeau de codage correspondant. Indiquez « aucun » si aucun drapeau de codage ne correspond à la simulation considérée.

Simulation	A	B	C	D	E
Drapeau					

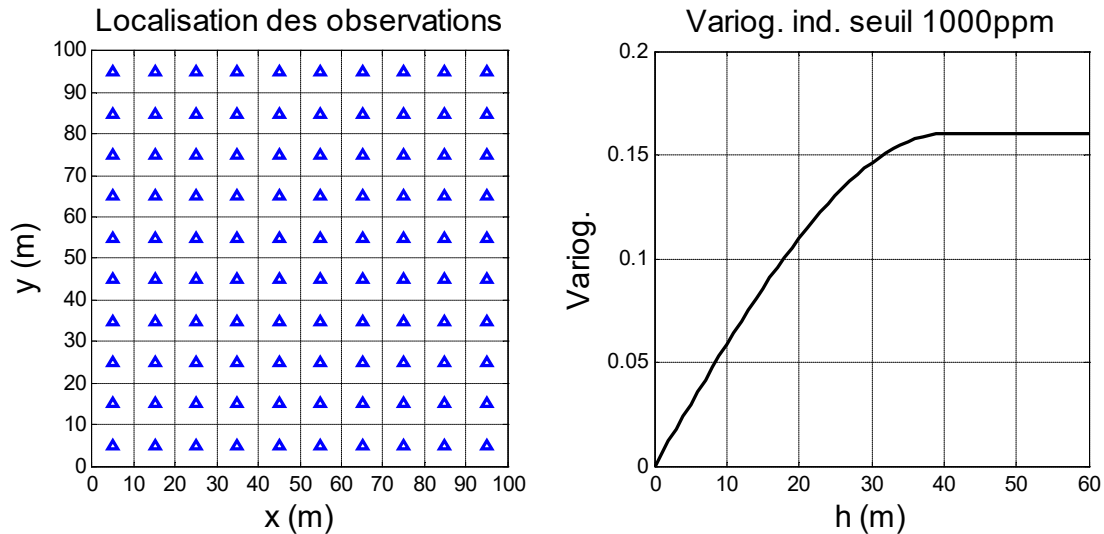
2 pts b) Une seule simulation de deux variables gaussiennes a été utilisée pour produire les simulations de faciès précédentes. Le variogramme utilisé pour les deux variables est le même. Identifiez le modèle utilisé parmi les modèles suivants (justifiez votre choix) :

- i. Gaussien isotrope avec portée de 100 pixels
- ii. Sphérique isotrope avec portée de 100 pixels
- iii. Gaussien anisotrope avec portées 100 horizontalement et 10 verticalement
- iv. Sphérique anisotrope avec portées 100 horizontalement et 10 verticalement



## Question 2 (12 points)

À l'aide d'une grille régulière de points, on veut estimer la proportion de sols contaminés aux hydrocarbures sur la zone indiquée à la figure suivante. Un sol est considéré contaminé si sa valeur est supérieure à 1000 ppm. La figure montre aussi le variogramme (isotrope) de l'indicateur définie au seuil 1000 ppm d'hydrocarbures.



3 pts a) *Quel est le modèle de variogramme de l'indicateur ?*

3 pts b) *Considérant seulement le variogramme de l'indicateur, approximativement quelle proportion de l'ensemble de la zone étudiée est contaminée (aide : deux réponses sont possibles) ?*

6 pts c) *Trouvez l'écart-type de l'erreur d'estimation de la proportion de sols contaminés sur l'ensemble de la zone (un abaque est fourni en annexe).*

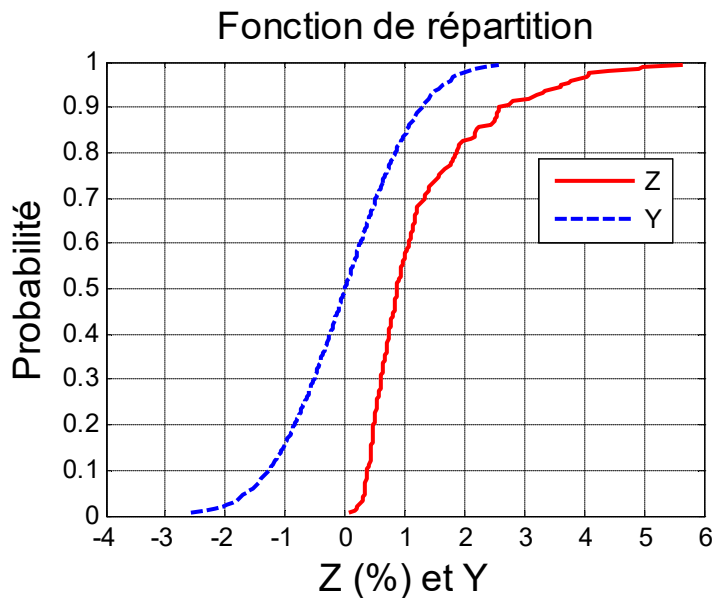
### Question 3 (14 points)

La méthode de simulation SGS consiste à :

- iv. choisir un point à simuler;
- v. estimer par krigeage simple la distribution conditionnelle de la variable en ce point compte tenu des observations connues;
- vi. tirer aléatoirement une valeur de la distribution conditionnelle et ajouter cette valeur à l'ensemble des données observées et des données déjà simulées.

3 pts a) Expliquez pourquoi cet algorithme assure que chaque réalisation respectera les données observées aux points échantillons.

Lorsque les données ( $Z$ ) ne suivent pas une distribution gaussienne, on doit au préalable les transformer ( $Y$ ) pour les rendre gaussiennes. La figure suivante montre graphiquement une telle transformation.



### Question 3 (suite)

- 3 pts    b) Une donnée valant  $Z(x)=3\%$  aurait quelle valeur gaussienne après transformation?
- 5 pts    c) On applique l'algorithme. À un point donné, le krigeage simple retourne la valeur  $-1.2$  avec un écart-type de krigeage de  $0.3$ . Le générateur de nombres aléatoires distribués suivant une loi uniforme  $(0,1)$  retourne la valeur  $0.9$ . Que vaut  $Z(x)$  (simulé) à ce point ?
- 3 pts    d) Suggérez une approche qui permettrait d'utiliser le principe séquentiel du SGS mais sans devoir transformer vers la loi normale et supposer la distribution multigaussienne de la variable transformée.

#### Question 4 (15 points)

On vous fournit le tableau suivant donnant, le long d'un profil, les coordonnées, les valeurs observées, les valeurs d'une simulation non-conditionnelle, les valeurs krigées avec d'une part, les données observées et d'autre part, les valeurs simulées.

Coordonnée	Valeurs observées	Simulation non-conditionnelle	Valeur krigée avec les données	Valeurs krigées avec les valeurs simulées aux points des données	Simulation conditionnelle (à calculer)
0	10	6	10	6	
100	-	7.5	9	8	
200	-	7	8	10	
300	-	10	7	12	
400	6	14	6	14	

6 pts a) Transformez par post-conditionnement la simulation non-conditionnelle en une simulation conditionnelle (inscrivez vos réponses dans le tableau)

3 pts b) Le signal simulé représente la topographie du fond marin. Supposons que l'on veuille déterminer la pente moyenne susceptible d'être rencontrée le long du profil. Est-il préférable de :

C) générer plusieurs réalisations, calculer la pente moyenne pour chaque réalisation et faire la moyenne sur toutes les réalisations de ces pentes moyennes

ou

D) générer plusieurs réalisations, calculer la moyenne des réalisations et calculer la pente moyenne sur cette « réalisation » moyenne.

Justifier.

#### Question 4 (suite)

3 pts c) L'on effectue un grand nombre de réalisations et l'on calcule la moyenne des valeurs conditionnelles simulées au point  $x=100$ . Quelle devrait être cette valeur moyenne ?

3 pts d) Le modèle de variogramme utilisé pour la simulation est sphérique avec  $C=25$  et  $a=30$ . La variance de krigeage au point  $x=100$  vaut 12. Quel devrait être l'écart-type des réalisations au point  $x=100$ ?

### Question 5 (12 points)

On simule par la méthode de Cholesky  $Z_2$  et  $Z_3$  conditionnellement à la valeur  $Z_1=2$  et suivant un variogramme donné. La matrice triangulaire inférieure issue de la décomposition de la matrice de covariance est (les variables sont placées dans l'ordre  $Z_1, Z_2$  et  $Z_3$ ) :

$$L = \begin{bmatrix} 2.236 & 0 & 0 \\ 1.342 & 1.789 & 0 \\ 0.447 & 1.901 & 1.09 \end{bmatrix}$$

3 pts a) *Quel est le palier du variogramme simulé ?*

3 pts b) *Que vaut la valeur  $Y_1$  ?*

3 pts c) *On tire  $Y_2 = -1$  et  $Y_3 = 1.5$ . Quelles sera la valeur simulée pour  $Z_2$  ?*

3 pts d) *Quelle est la covariance théorique entre  $Z_2$  et  $Z_3$ , conditionnelle à  $Z_1=2$  ? (Aide :  $Y_1$  n'est pas aléatoire; exprimez  $Z_2$  et  $Z_3$  en fonction de  $Y_2$  et  $Y_3$ ; en déduire la covariance recherchée)*

### Question 6 (15 points)

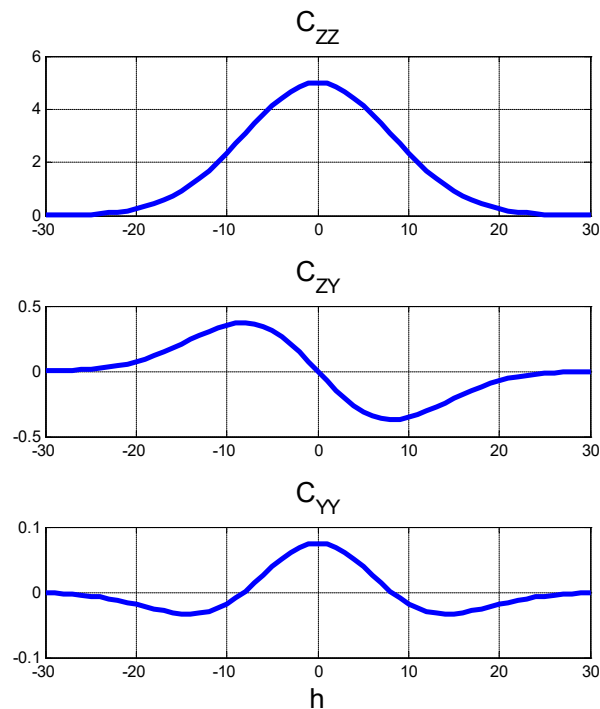
Le long d'un profil (axe « x »), on veut estimer l'élévation du sommet  $Z(x)$  d'une formation géologique. Soit la dérivée  $Y(x)=dZ(x)/dx$  décrivant l'accroissement de l'élévation en se déplaçant le long du profil. La covariance de  $Z$  est un modèle gaussien de portée effective 20 et de palier  $C=5$ . On a alors :

$$C_{ZZ}(h) = 5 \exp(-3h^2 / 400)$$

$$C_{ZY}(h) = -3/40 h \exp(-3h^2 / 400)$$

$$C_{YY}(h) = 3/40 \exp(-3h^2 / 400) - 9/8000 h^2 \exp(-3h^2 / 400)$$

Ces trois fonctions de covariance sont présentées à la figure suivante :



Le tableau suivant fournit les valeurs des fonctions de covariance pour quelques valeurs particulières de « h ».

	h						
	-10	-7	-3	0	3	7	10
$C_{ZZ}(h)$	2.362	3.462	4.674	5	4.674	3.462	2.362
$C_{ZY}(h)$	0.354	0.364	0.210	0	-0.210	-0.364	-0.354
$C_{YY}(h)$	-0.018	0.014	0.061	0.075	0.061	0.014	-0.018

### Question 6 (suite)

8 pts a) On connaît la valeur de  $Z$  et de sa dérivée  $Y$  aux points  $x_1=0$  et  $x_2=10$ . On désire effectuer l'estimation, par cokrigage simple, au point  $x_0=3$ . Construisez le système de cokrigage simple sous forme matricielle (ne pas résoudre). Indiquez clairement la signification des colonnes et lignes de la matrice de gauche et du vecteur de droite de ce système.



### Question 6 (suite)

- 3 pts b) Est-ce un contexte où l'on s'attend à ce que le cokrigeage permette d'améliorer sensiblement l'estimation? Justifier.

On a résolu le système de krigeage simple et celui de cokrigeage simple. On a obtenu :

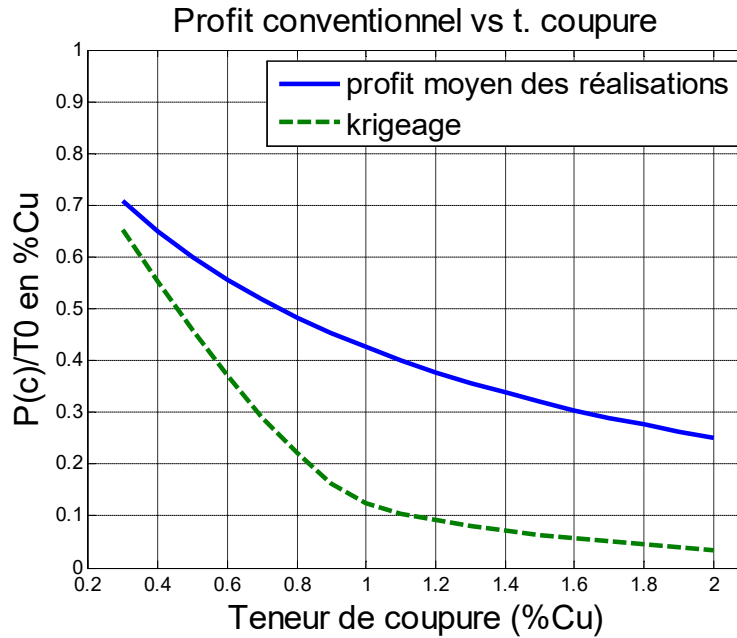
$$\text{KS} : \lambda_1 = 0.782 \quad \lambda_2 = 0.323$$

$$\text{CO\_KS} : \lambda_{1,Z} = 0.789 \quad \lambda_{2,Z} = 0.200 \quad \alpha_{1,Y} = 1.691 \quad \alpha_{2,Y} = -0.719$$

- 4 pts c) Calculez la variance de krigeage simple et la variance de cokrigeage simple. Discutez.

### Question 7 (10 points)

Soit la figure suivante montrant le profit conventionnel, en fonction de la teneur de coupure, obtenu par krigeage et aussi le profit obtenu, en moyenne, pour les différentes réalisations d'une simulation.



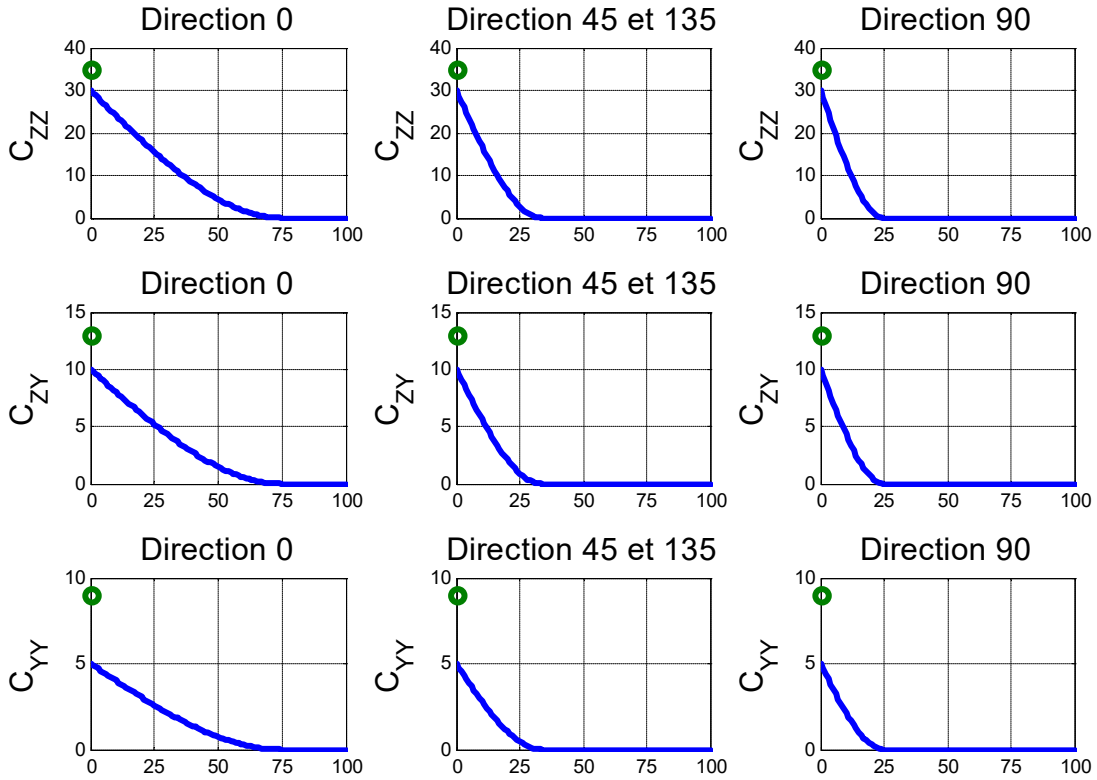
4 pts a) Si l'on sélectionnait les blocs à partir des estimés actuels de krigeage, quel profit conventionnel obtiendrait-on approximativement à une teneur de coupure de 1% ?

4 pts b) Si l'on connaissait parfaitement les teneurs réelles des blocs, quel profit pourrait-on espérer obtenir à la teneur de coupure 1% ?

2 pts c) Selon les courbes présentées, devrait-on chercher à améliorer l'estimation des blocs si la teneur de coupure est 1% ? Justifier.

### Question 8 (10 points)

Soit le modèle linéaire de corégionalisation indiqué aux figures suivantes.



Décrivez entièrement le modèle linéaire de corégionalisation (en 2D) et déterminez s'il est admissible.

Annexe :

Fonction de répartition de la  $N(0,1)$ , i.e.  $P(Z \leq z)$ . L'entier et la 1<sup>ère</sup> décimale de « z » sont lus en ligne, la 2<sup>e</sup> décimale est lue en colonne.

Exemple d'utilisation :

i. Trouver  $p=F(z)$  à « z » spécifié :  $F(1.37)=P(N(0,1)<1.37)=0.9147$

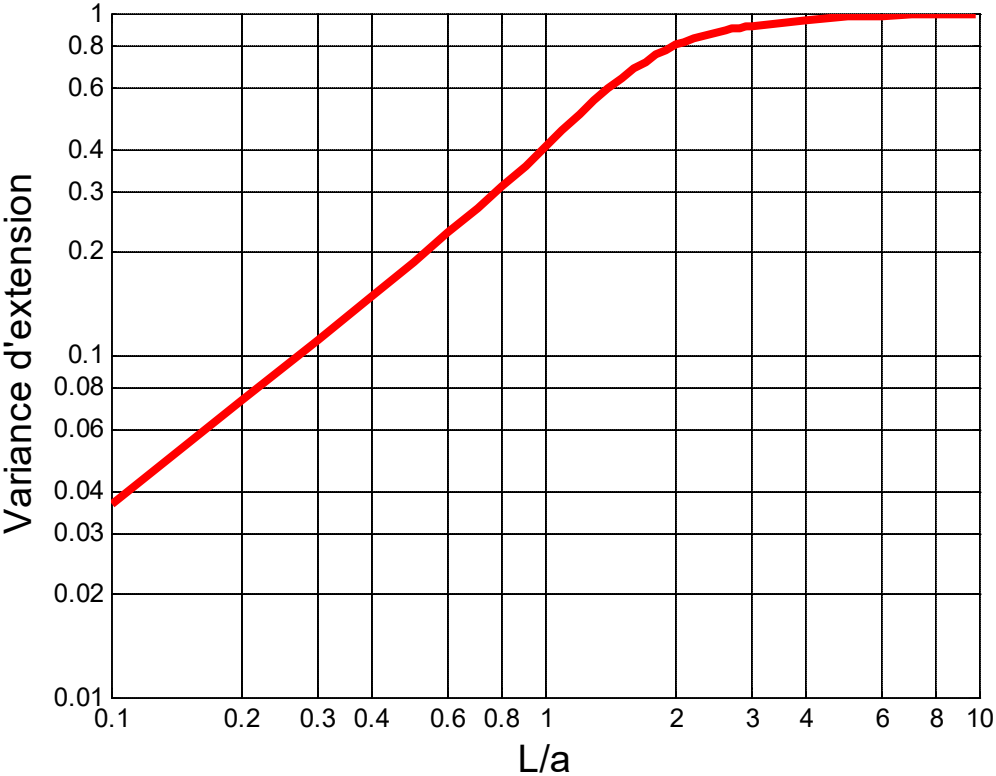
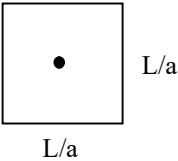
ii. Trouver z à « p » spécifié :  $F(z)=0.9904 \Rightarrow z=2.34$

Fonction de répartition N(0,1)										
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Annexe :

### Abaque

Variance d'extension d'un point à un carré, modèle sphérique avec  $C=1$  (abaque 7, courbe E3)



## Corrigé

Q 1a) Associez à chaque simulation le drapeau de codage correspondant.

<i>Simulation</i>	A	B	C	D	E
<i>Drapeau</i>	3	2	5	1	4

b) Gaussien isotrope. On ne voit aucun étirement indicateur d'anisotropie et la texture est clairement celle d'un gaussien en raison de la régularité des contours des facies.

Q2-

a) Sphérique, sans effet de pépite, avec portée de 40m et  $C=0.16$

b) comme  $C=p*(1-p)$ , la proportion peut donc être de 0.2 ou de 0.8.

c) On utilise l'abaque 7, courbe à 10/40, on trouve un facteur de 0.093, donc  $0.093*0.16=0.0149$  pour l'ensemble de la zone, la variance d'estimation sera :  $0.0149/100=0.000149$ .

L'écart-type d'estimation est donc 0.012.

3- a) si le point que l'on veut simuler est une observation, le krigeage simple retourne la valeur observée et une variance de krigeage nulle (interpolateur exact). La valeur que l'on tire est donc nécessairement la valeur krigée, soit la valeur de l'observation.

b)  $p(3\%)=0.91$   $Y(0.91)=1.3$  environ

c) On cherche la valeur t correspondant à  $p=0.6$  pour une distribution normale de moyenne -1.2 et d'écart-type 0.3.  $P((Y_s - (-1.2))/0.3 < t) = 0.9$ . Dans la table  $N(0,1)$ , on trouve que t vaut 1.28. Donc  $Y_s(x)$  est :  $1.28*0.3 - 1.2 = -0.816$ . Du graphique, on trouve un p de 0.21 environ et une valeur correspondante pour Z de 0.5% environ.

d) Il suffirait de remplacer le krigeage simple par un krigeage d'indicatrice pour estimer la distribution conditionnelle, on tirerait une valeur de cette distribution et l'on ajouterait cette valeur aux données avant de passer à la donnée suivante.

4- a) On fait  $Z_{sc} = Z^* + (Z_s - Z_s^*)$

Coordonnée	Valeurs observées	Simulation non-conditionnelle	Valeur krigée avec les données	Valeurs krigées avec les valeurs simulées aux points des données	Simulation conditionnelle
0	10	6	10	6	$10 + (6 - 6) = 10$
100	-	7.5	9	8	$9 + (7.5 - 8) = 8.5$
200	-	7	8	10	$8 + (7 - 10) = 5$
300	-	10	7	12	$7 + (10 - 12) = 5$
400	6	14	6	14	$6 + (14 - 14) = 6$

b) La méthode A. La méthode B revient à appliquer une fonction de transfert non-linéaire aux valeurs krigées, ce que l'on sait être incorrect.

c) La valeur krigée, soit 9.

d) La racine de l'écart-type de krigeage  $12^{0.5}$

Q5- a) On calcule  $K=L*L' = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ . Sur la diagonale, on a le palier du variogramme soit 5.

b) Comme  $Z_1=2$ ,  $Y_1=Z_1/L_{11}=2/2.236=0.894$

c)  $Z_2=1.342*0.894+1.789*(-1) = -0.589$

d)  $Z_2 = cte + 1.789*Y_2$ ;  $Z_3 = 1.901*Y_2 + 1.09*Y_3$ .  $Cov(Z_2, Z_3 | Z_1) = 1.789*1.901 = 3.40$

Q6

a)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2.362 & 0 & -0.354 \\ 2.362 & 5 & 0.354 & 0 \\ 0 & 0.354 & 0.075 & -0.18 \\ -0.354 & 0 & -0.18 & 0.075 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.674 \\ 3.462 \\ 0.210 \\ -0.364 \end{bmatrix}$$

b) Oui car il y a une relation déterministe entre les variables principales et secondaires.

c) pour ks :  $5 - 0.782*4.674 - 0.323*3.462 = 0.2267$

pour coks :  $5 - 0.789*4.674 - 0.2*3.462 - 1.691*0.210 + 0.364*(-0.719) = 0.003$

On a réduit la variance d'estimation d'un facteur 7!

Q7-

a)  $\sim 0.12\%$  Cu (valeur prédite par le krigeage)

b)  $0.42\%$  Cu (valeur moyenne prédite par les simulations).

c) On a évidemment intérêt à améliorer les estimations des blocs afin d'accroître nos profits. Les estimés actuels sont beaucoup trop imprécis.

Q8-  $C(h) = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  effet de pépite (avec  $C=1$ ) +  $\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$  Sphérique avec anisotropie géométrique

( $a_0=75$  et  $a_{90}=25$ ;  $C=1$ )

les deux déterminants valent 11 et  $50 > 0$  donc le modèle est admissible.