Polytechnique Montréal
Département des génies civil, géologique et des mines (CGM)

GLQ3401-3651 - GÉOSTATISTIQUE et GÉOLOGIE MINIÈRES
Examen intra - Automne 2018

Date : 2 novembre 2018

L'examen comprend 8 questions, sur 12 pages, valant 100 points.
Des pages d'annexes sont fournies
Les questions valent dans l'ordre : 11, 17, 12, 12, 12, 14, 10, 12.

- **Le professeur ne répond à aucune question en cours d'examen.**
- Vous répondez sur le questionnaire, utilisez le verso au besoin.
- La table N(0,1) est fournie en page 13
- Des abaques F sont fournis en page 14-15
- Une abaque E est fournie en page 16
- Deux feuilles recto-verso de documentation sont permises; toute calculatrice permise.
- **Bien indiquer les unités dans chaque réponse finale**

Prénom ____________________ Nom__________________________________ Matricule : ____________
(lettres carrées)

Signature : ____

Question 1 (11 points)

Un ingénieur géologue dispose *de valeurs estimées* de teneurs de Cu pour des blocs de 20 m x 20 m x 10 m qui représentent les unités de sélection de la mine. La méthode par laquelle ces estimés ont été obtenus n'est pas spécifiée. Les statistiques élémentaires calculées sur ces valeurs estimées sont :

Statistique	Valeurs estimées pour les blocs
Moyenne	1%
Variance	$3.8\%^2$
Minimum	0%
Maximum	7%

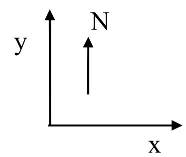
Le gisement est grand par rapport à la portée du variogramme et homogène statistiquement, les données ponctuelles montrent un variogramme sphérique (3D) isotrope avec $C_0=2\ \%^2$, $C=4\ \%^2$ et a=100 m.

8 pts *a) Pourquoi pouvons-nous affirmer que les valeurs estimées ont nécessairement un biais conditionnel? Justifiez en faisant le calcul approprié.*

3 pts *b) On sélectionne les blocs à une teneur de coupure 1.1% en se basant sur ces teneurs estimées. Est-ce que la teneur réelle du minerai sera probablement supérieure ou probablement inférieure à la teneur moyenne estimée du minerai? Justifiez.*

Question 2 (17 points)

Le tableau suivant donne les emplacements des observations servant à l'estimation de la teneur en Au au point de coordonnée x = 50 m, y = 39 m. Le variogramme est sphérique avec $C_0 = 25$ ppm^2 , $C = 65$ ppm^2. On a une anisotropie géométrique, la meilleure continuité étant observée selon la direction 22° (azimut). Les portées principales sont de 35 m (selon 22°) et 15 m (selon 112°) respectivement. Le repère de coordonnées est orienté suivant :



Observation	coordonnée x (m)	coordonnée y (m)	teneur (ppm)
1	45	30	7.1
2	53	29	3.7
3	38	43	1.2
4	55	45	5.4

10 pts *Complétez le système de krigeage ordinaire suivant (A à F)* :

(note : les équations sont placées dans le même ordre que les observations)

$$\begin{vmatrix} 90 & 18.669 & 3.506 & A & 1 \\ 18.669 & 90 & 0 & 18.597 & 1 \\ 3.506 & 0 & 90 & 0 & 1 \\ A & B & 0 & C & 1 \\ 1 & 1 & 1 & D & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 36.285 \\ 20.788 \\ 2.307 \\ 39.722 \\ F \end{vmatrix}$$

Question 2 (suite)

2 pts *b) Que deviendrait le système de krigeage si au lieu d'avoir observé la teneur 3.7 ppm au point 2, on avait observé plutôt 9.3 ppm ?*

On réalise après coup que les observations 1 et 2 ont été obtenues par une méthode d'analyse moins précise que pour les observations 3 et 4. L'effet de pépite pour ces observations s'en trouve doublé.

3 pts *c) Que doit-on modifier dans le système de krigeage ordinaire pour tenir compte de ce fait ?*

2 pts *d) Décrivez <u>qualitativement</u> l'effet anticipé de la modification proposée en d) sur les poids du krigeage ordinaire λ_1 à λ_4 ?*

Question 3 (12 points)

Une veine d'or (plan) est recoupée par des forages. La veine est d'épaisseur constante. Les teneurs sont obtenues pour toute la longueur de l'intersection du forage avec la veine. On calcule le variogramme 2D avec ces teneurs et on retient un modèle de variogramme donné par la somme des 3 composantes décrites au tableau suivant :

Composante	Portée	C_0 ou C
Pépite	-	5 ppm^2
Sphérique 1 (isotrope)	20 m	40 ppm^2
Sphérique 2 (isotrope)	80 m	20 ppm^2

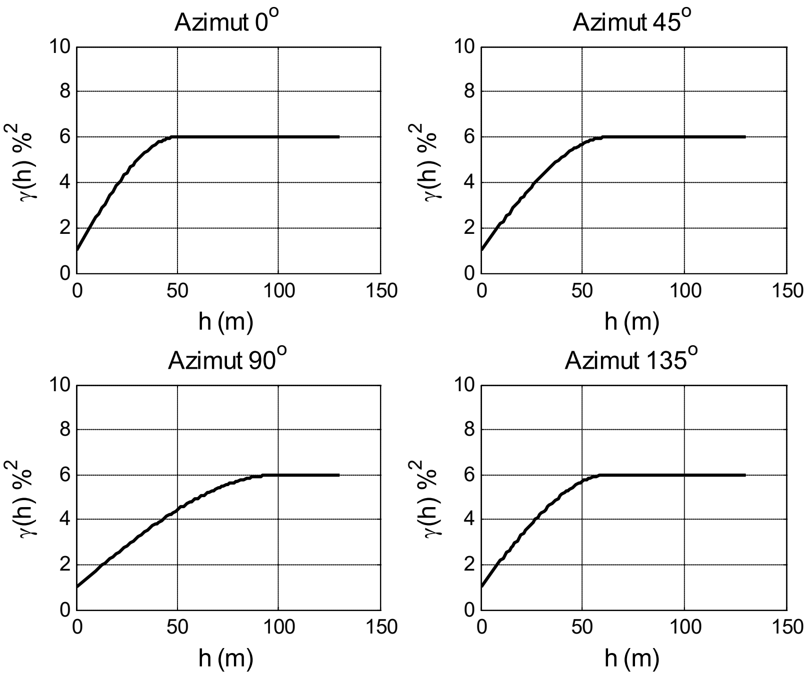
Les forages ne sont pas sur une grille régulière mais leur disposition est telle qu'on retrouve en moyenne un forage par cellule de 20 m x 10 m et qu'on peut considérer l'emplacement du forage dans chaque cellule comme étant choisi au hasard.

10 pts *a) Quelle est la variance d'estimation pour la teneur moyenne sur la zone étudiée si on dispose de 57 forages?*

2 pts *b) À partir de quelle distance deux points peuvent-ils être considérées comme non-corrélés selon l'azimut 40°?*

Question 4 (12 points)

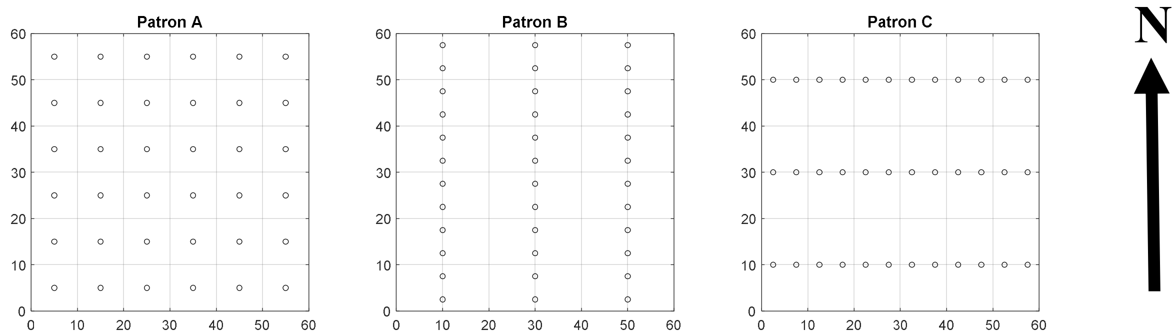
Soit les variogrammes suivants tracés selon 4 directions différentes.



6 pts a) *Décrivez* ***le*** *modèle de variogramme* ***2D*** *(en spécifiant tous les paramètres du modèle, type, etc.), que l'on peut ajuster à ces variogrammes directionnels.*

Question 4 (suite)

6 pts *b) Compte tenu des variogrammes de la question a) et du modèle 2D ajusté, lequel des patrons d'échantillonnage suivant serait à* ***déconseiller*** *si l'objectif est d'estimer la teneur moyenne du bloc de 60 m x 60 m avec le plus de précision ? Justifiez à l'aide de l'abaque approprié.* Note : chaque patron possède le même nombre d'observations, soit 36.



Question 5 (12 points)

Répondez par vrai ou faux (aucune justification requise; 1 point par bonne réponse, -0.5 par mauvaise réponse et 0 pour une absence de réponse). Dans tous les cas, supposez qu'un modèle admissible de variogramme est utilisé.

#	Énoncé	Vrai	Faux
1	Dans une validation croisée (des résultats d'un krigeage), on peut toujours ajuster les paramètres du variogramme pour que l'écart-type des résidus normalisés soit exactement 1.		
2	On peut effectuer une estimation équivalente à la méthode polygonale par krigeage ordinaire en limitant le voisinage utilisé pour le krigeage à une seule observation.		
3	On peut effectuer une estimation équivalente à une moyenne locale des données en effectuant un krigeage ordinaire avec voisinage local et un variogramme effet de pépite pur.		
4	La variance de krigeage ordinaire ne peut jamais être supérieure au palier du variogramme.		
5	La variance de krigeage ordinaire n'est jamais nulle en raison de la présence du multiplicateur de Lagrange		
6	Comme il peut y avoir des poids négatifs dans le krigeage, il est possible que l'on obtienne des teneurs estimées par krigeage qui soient négatives.		
7	Comme il y a des poids négatifs dans le krigeage, il est possible que l'on obtienne des variances de krigeage négatives.		
8	Pour les modèles de covariance vus au cours, la variance de dispersion $D^2(v\|V)$ (avec v inclus dans V) est toujours inférieure à $Var(Z_v)$.		
9	La détermination précise du palier du variogramme est requise pour calculer correctement les variances de dispersion $D^2(v\|V)$ lorsque « V » est grand par rapport à la portée du variogramme.		
10	Avec un modèle sphérique de variogramme, plus l'effet de pépite est important, plus l'effet d'écran du krigeage est prononcé.		
11	Plus l'effet de pépite est important, plus le krigeage montre de fortes discontinuités aux points échantillons.		
12	Le krigeage ordinaire est sans biais, et ce, indépendamment du fait que l'on ait, ou pas, le bon modèle de variogramme.		

Question 6 (14 points)

Une mine de fer charge son minerai par bateau. Chaque bateau peut transporter 30 000 t de minerai représentant à la mine un bloc de 30 m x 30 m x 10 m. La compagnie minière doit payer une pénalité de 5 $/t sur son minerai si celui-ci montre une teneur en phosphore dépassant 1 %. Le variogramme ponctuel 3D du phosphore est sphérique isotrope avec une portée de 200 m, C_0= 0.3 $\%^2$, C=0.2 $\%^2$.

Afin de minimiser le risque de devoir payer la pénalité, la mine considère trois alternatives d'exploitation de son gisement :

A1: Exploiter le bloc 30 m x 30 m x 10 m à partir d'un seul bloc;

A2: Exploiter le même tonnage avec deux blocs séparés spatialement d'une distance supérieure à la portée de 200 m. On considère alors que chaque bloc sera de dimension 21.2 m x 21.2 m x 10 m;

A3 : Utiliser une pile d'homogénéisation d'une capacité de 270 000 t correspondant à la mine à un bloc de 90 m x 90 m x 10 m. On considère négligeable la variabilité intra-pile.

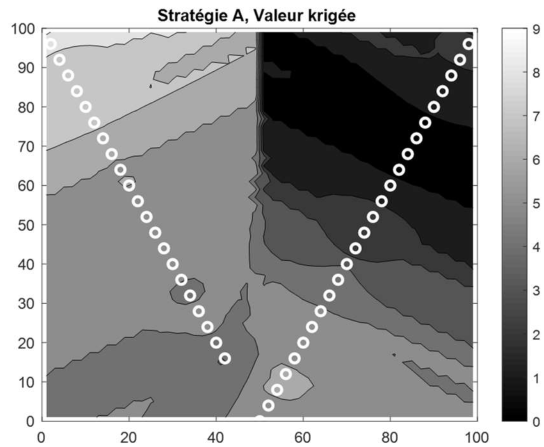
9 pts *a) Calculez la variance de la teneur en phosphore du chargement dans le bateau selon les trois alternatives (sur un long horizon de temps et en considérant que le gisement est grand par rapport à la portée).*

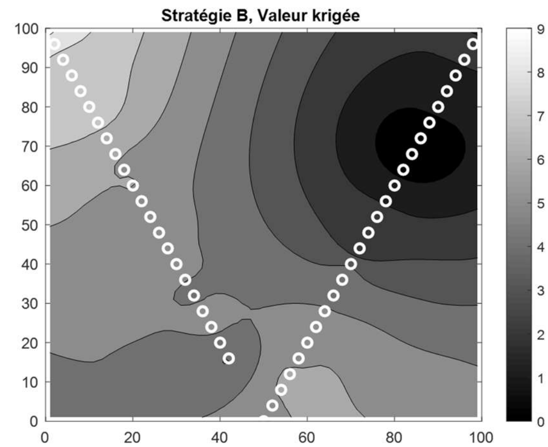
Question 6 (suite)

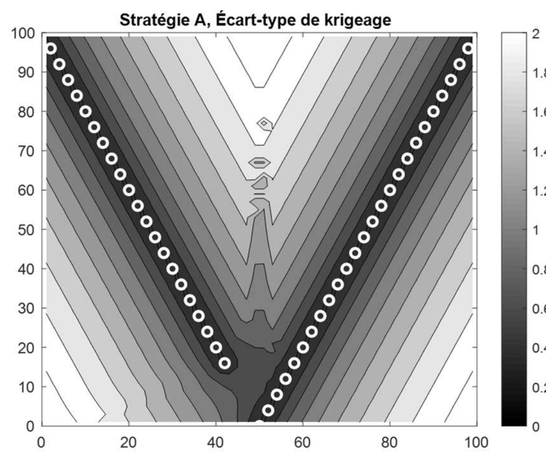
5 pts *b) Si la teneur moyenne du gisement de fer en phosphore est de 0.4 % et en supposant une distribution normale de la teneur moyenne du minerai dans un bateau, quelle est la probabilité que la mine doive payer une pénalité pour le minerai dans un bateau si elle exploite selon la méthode ayant fournie la plus faible variance en a) ?* (Si vous n'avez pu répondre à la question a) utilisez comme variance 0.02 $\%^2$).

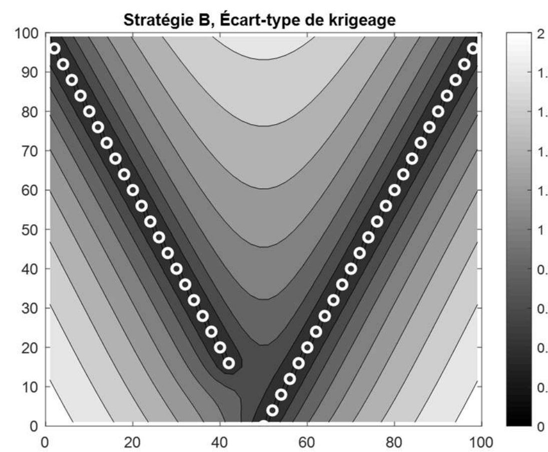
Question 7 (10 points)

On vous présente les cartes de krigeage et d'écart-type de krigeage obtenues avec un même modèle de variogramme et les mêmes données provenant de deux forages. Les données sont représentées par les cercles blancs sur les figures. Les krigeages sont effectués selon deux stratégies différentes pour la définition du voisinage à utiliser.

<table>
<tr><td>Stratégie A
Recherche circulaire, les 5 points les plus proches du point à estimer sont utilisés</td><td>Stratégie B
Tous les points sont utilisés</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
</table>

Commentez les résultats obtenus. Quelle stratégie recommanderiez-vous? Justifiez.

Question 8 (12 points)

Le tableau suivant montre la position de trois points x_1, x_2 et x_3 utilisés pour estimer la teneur au point x_0 ainsi que les poids utilisés pour l'estimation. Le modèle est sphérique avec portée 25 m et C=10 %^{2} et un effet de pépite C_0=3 %^{2}.

Points	Coord est (m)	Coord nord (m)	Poids
x_1	0	0	1/3
x_2	20	0	1/3
x_3	0	20	1/3
x_0	10	10	-

10 pts *a) Calculez la variance d'estimation de la teneur au point x_0*

2 pts *b) Si l'effet de pépite était supérieur à 3 %^{2}, les autres paramètres et les poids demeurant inchangés, quel serait l'effet sur la variance d'estimation (augmente, diminue, ou demeure inchangée) ?*

Fin de l'examen

Corrigé

Q1 a) $Var(Z_v)$=C(1-F(10/100,20/100))=4*(1-0.17)=3.32 %^2

Comme les valeurs estimées montrent une variance supérieure à celle des blocs qu'ils estiment on est certain qu'il y a un biais conditionnel.

b) On va récupérer une teneur plus faible que prévue => on va faire moins de profits que prévus.

Q2- a) La seule covariance à évaluer est A=Cov(Z1,Z4). On a h=(100+225)^0.5=18 m

l'azimut défini par la paire Z1-Z4 est atan(10/15)= 33.7 deg

l'angle theta avec ag est 33.7-22=11.7

a_theta est 35*15/sqrt(35^2 sin(11.7)^2 + 15^2 cos(11.7)^2) =32.2 m

A= 65(1-(1.5(18/32.2) – 0.5 (18/32.2)^3)) = 16.2 ppm^2

B=18.597 par symétrie

C= 90; D=1; E=0; F=1

b) Aucun changement puisque le système de krigeage ne dépend pas des teneurs.

c) On doit augmenter les deux premiers termes diagonaux dans la matrice de gauche de C0=25, donc deviennet 115 ppm^2

d) les points étant moins précis ils recevront un poids plus faibles alors que les 2 autres points vont recevoir un poids plus élevé.

Q3- a) Var(e_g) = D^2(.|v)/57 = [5 + 40 F(20/20, 10/20) + 20 F(20/80,10/80)]/57 = [5+40 (0.55) +20 (0.15)]/57 = 0.53 ppm^2

b) 80 m i.e la portée maximale des modèles qui se combinent

Q4- a) modèle sphérique avec anisotropie géométrique. Les portées principales sont selon 90 (ag=100 m) et 0 (ap=50 m), avec un effet de pépite de 1%^2 et C=5 %^2.

b) Il suffit de regarder var(e) pour une cellule puisque pour l'ensemble c'est (C0+C F(v))/36

Avec A : F(10/100,10/50) avec B : F(20/100, 5/50) et avec C : F(5/100, 20,50). Les valeurs pour A et B sont les mêmes (0.058 environ) alors que pour C c'est 0.1. Donc on déconseile le patron C.

Q5- V V V F F V F V V F V V

Q6- a) On calcule les variances de bloc 3D pour chaque scenario

A1 : 0.2 (1- F(10/200, 30/200)) = 0.2 (1-0.13) = 0.174 %^2

A2 : 0.2 (1-F(10/200, 21.2/200)/2= 0.2(1-0.09)/2 = 0.09 %^2

A3 : 0.2 (1-F(10/200, 90/200)) = 0.2 (1-0.35) = 0.13 %^2

b) on a (Zv-m)/sigma_v ~N(0,1) et P(Zv>1)=P((Zv-0.4)/0.3>(1-0.4)/0.3)=P(N(0,1)>2) => 1-0.977 = 0.023 ou 2.3% de chances

---

Q7- On a clairement une discontinuité de voisinage avec la stratégie A. Les points à gauche sont estimés avec les données du forage de gauche, ceux à droite avec les données du forage de droite. L'écart-type de krigeage sur les figures du bas montre le caractère défavorable de ces configurations (valeurs plus élevées à gauche qu'à droite). Au contraire la stratégie B ne montre pas de discontinuités. Il faut recommander cette stratégie.

Q8- a) Selon les distances on a Cov(Z1,Z2)=Cov(Z1,Z3)=10(1-(1.5(20/25)-0.5(20/25)^3)) = 0.56

h(Z1,Z3)= 28 m > 25 m => C(Z1,Z3)=0

C(Zi,Zi)=13 pour i=1,2,3

h(Zi,Z0)= 200^0.5 = 14.14 m

et Cov(Z1,Z0)=Cov(Z2,Z0)=Cov(Z3,Z0)= 10 (1-(1.5 (14.14/25) -0.5 (14.14/25)^3)) = 2.42

Finalement Var(e) =13+ (3*13+4*0.56)/9 -2 (3*2.42)/3 = 12.74

b) comme les données seraient moins précises, la variance d'estimation ne peut qu'augmenter. On le voit clairement dans la formule puisque C0 intervient uniquement du côté des termes positifs.

École Polytechnique
Département des génies civil, géologique et des mines (CGM)

GLQ3401-3651 - GÉOSTATISTIQUE et GÉOLOGIE MINIÈRES
2e contrôle périodique - Automne 2017

Date : 2 novembre 2017, heure : 13h45 à 16h15

L'examen comprend 8 questions, sur 15 pages, valant 100 points.
Quatre pages d'annexes sont fournies
Les questions valent dans l'ordre : 10, 10, 10, 10, 17, 20, 8, 15.

- **Le professeur ne répond à aucune question en cours d'examen.**
- Vous répondez sur le questionnaire, utilisez le verso au besoin.
- Les abaques sont fournis aux dernières pages du questionnaire.
- Deux feuilles recto-verso permises; toute calculatrice permise.
- **Bien indiquer les unités dans chaque réponse finale**

Prénom ____________________ Nom__________________________________ Matricule : ____________
(lettres carrées)

Signature : ____

Question 1 (10 points)

Un ingénieur géologue dispose *de valeurs estimées* de teneurs de Cu pour des blocs de 20 m x 20 m x 10 m qui représentent les unités de sélection de la mine. La méthode par laquelle ces estimés ont été obtenus n'est pas spécifiée. Les statistiques élémentaires calculées sur ces valeurs estimées sont :

Statistique	Valeurs estimées pour les blocs
Moyenne	1%
Variance	$3.8\%^2$
Minimum	0%
Maximum	7%

Le gisement est grand par rapport à la portée du variogramme et homogène statistiquement, les données ponctuelles montrent un variogramme sphérique (3D) isotrope avec $C_0=2\ \%^2$, $C=4\ \%^2$ et a=100 m.

Question 1 (suite)

7 points a) Pourquoi pouvons-nous affirmer que les valeurs estimées ont un biais conditionnel? Justifiez en faisant le calcul approprié.

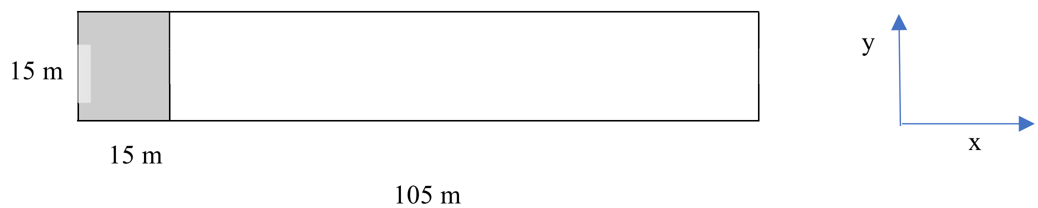
3 points b) Quelle est la conséquence pratique d'utiliser ces valeurs estimées pour sélectionner le minerai à traiter?

Question 2 (10 points)

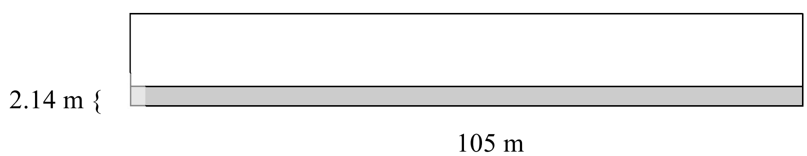
L’exploitant d’une carrière veut minimiser la variabilité quotidienne de la teneur en C3S du ciment sur un horizon d’une semaine. Durant la semaine, il exploite un bloc de 105 m x 15 m x 5 m (en x, y et z). On considère, pour simplifier le problème, que le bloc reste en place lors du sautage. Le gisement montre un variogramme sphérique (2D car les teneurs sont mesurées sur toute l’épaisseur du banc de 5 m) avec C_0=150 %^{2}, C=600 %^{2} et une anisotropie géométrique. Les portées principales sont orientées selon x, y et valent a_x=100 m, a_y=30 m. La pelle peut charger les camions soit en se déplaçant perpendiculairement au tas de roche, soit en se déplaçant parallèlement. On suppose que le coût d’exploitation est le même dans les deux cas.

Schématiquement, *vu en plan* :

Déplacement perpendiculaire à l’allongement :



Déplacement parallèle à l’allongement :



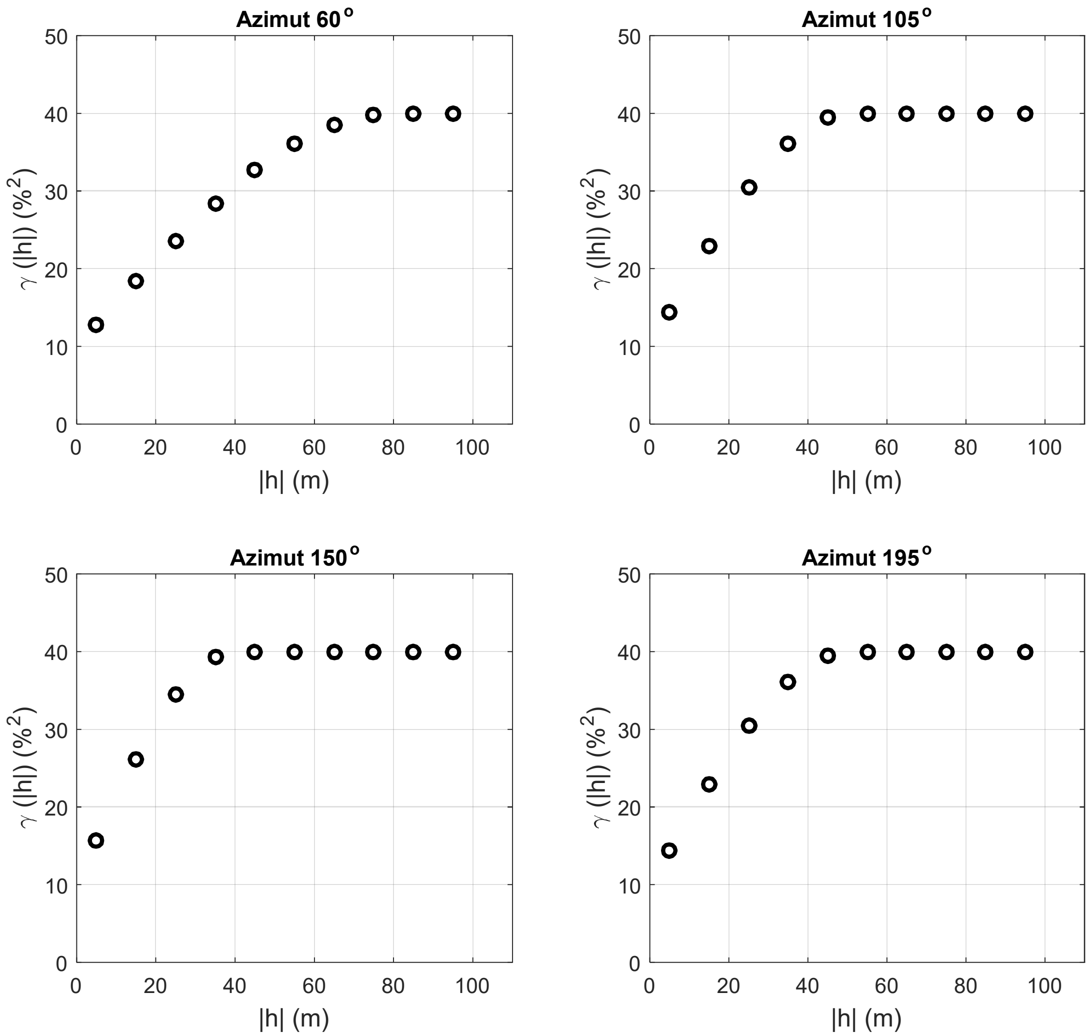
(Note : Les dessins ne sont pas à l’échelle, en gris la zone exploitée quotidiennement)

Quel déplacement de la pelle recommanderiez-vous pour minimiser la variabilité de la teneur quotidienne en C3S au cours de la semaine ? Justifiez en effectuant les calculs requis.

Question 2 (suite)

Question 3 (10 points)

Soit les 4 variogrammes expérimentaux suivants obtenus pour un gisement 2D de Cu :



5 points a) Décrivez <u>le modèle</u> 2D de variogramme (en spécifiant tous les paramètres du modèle et leurs unités), permettant un ajustement adéquat de ces variogrammes expérimentaux.

Question 3 (suite)

5 points *b) Soit les points situés en (x=0, y=0) et (x=20, y=0). Calculez la valeur du variogramme théorique entre ces deux points avec le modèle décrit en a).* (Note; x croît vers l'est et y vers le nord).

Question 4 (10 points)

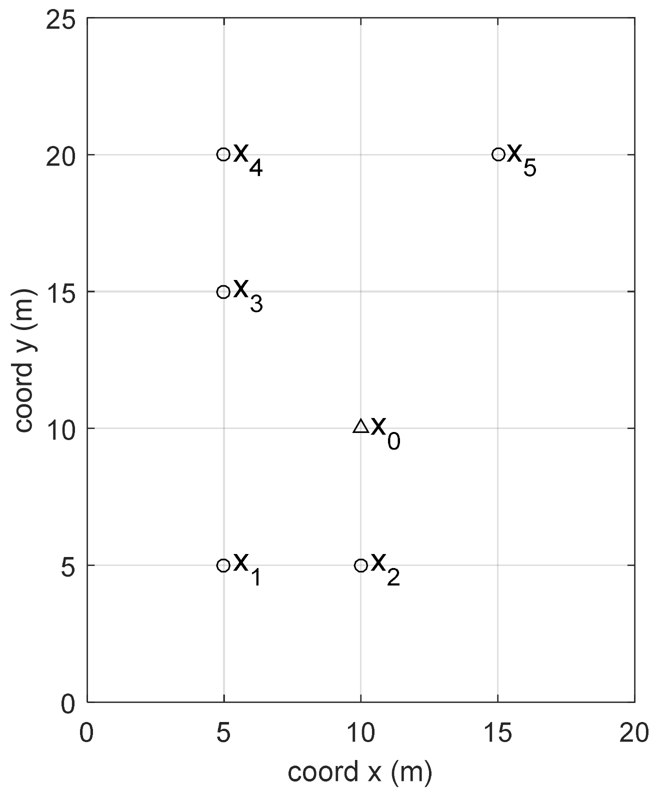
Une mine de sel (NaCl) livre son sel par bateau. Le minerai livré au bateau doit présenter par contrat une teneur supérieure à 94% NaCl. La mine échantillonne le flux de minerai entrant au bateau en prenant un échantillon ponctuel d'un kilogramme à chaque heure en débutant à la première demi-heure de chargement. L'échantillon est prélevé sans biais. Le modèle de variogramme du NaCl montre C_0=0.7 %^{2}, il comprend une composante sphérique de portée a_1=1 heure et ayant C_1=1.3 %^{2} et une deuxième composante sphérique de portée a_2=5 heures et ayant C_2=2.1 %^{2}. Le chargement du bateau prend en tout 48 heures.

7 points *a) Quelle est la variance d'estimation de la teneur moyenne en NaCl du minerai livré au bateau ?*

3 points *b) Utilisant la variance d'estimation calculée en a) et supposant une distribution normale de la teneur du minerai livré (table en annexe), si la moyenne des 48 échantillons est de 94.3 % NaCl, quelle est la probabilité que la teneur moyenne réelle du minerai livré soit inférieure à 94 % ?* (Note : si vous n'avez pu déterminer la variance d'estimation en a) supposez Var(e)=0.024 %^{2}).

Question 5 (17 points)

Dans un gisement de Zn, on veut estimer le point x_0 avec les points x_1 à x_5 (voir figure). Le variogramme est sphérique, isotrope, avec C_0=4 %^{2}, C=9 %^{2} et a=10m.



Les valeurs qui suivent peuvent vous être utiles

h	C(h)[1]
5	2.81
$(50)^{1/2}$	1.05
10	0

[1]arrondi à la 2^e décimale

8 points *a) Construisez le système de krigeage ordinaire pour ce problème. Exprimez les équations du krigeage sous leur forme matricielle (<u>ne pas résoudre</u>).*

Question 5 (suite)

La solution du système de krigeage ordinaire est :

$$\begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \mu \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} 0.1675 \\ 0.3410 \\ 0.2166 \\ 0.1140 \\ 0.1609 \\ -2.0915 \end{matrix}$$

3 points *b) Calculez la variance de krigeage ordinaire.*

3 points *c) Si l'on avait plutôt effectué un krigeage simple, y aurait-il eu un ou plusieurs poids de krigeage simple exactement 0? Si oui, lequel ou lesquels?*

3 points *d) Quelle serait la variance d'estimation si l'on avait estimé le point x_0 par méthode polygonale?*

Question 6 (20 points)

Répondez par vrai ou faux (aucune justification requise; 1 point par bonne réponse, -0.5 par mauvaise réponse et 0 pour une absence de réponse). Dans tous les cas, supposez qu'un modèle <u>admissible</u> de variogramme est utilisé.

#	Énoncé	Vrai	Faux
1	Dans une validation croisée (des résultats d'un krigeage), on peut toujours ajuster les paramètres du variogramme de façon à ce que l'écart-type des résidus normalisés soit exactement 1.		
2	Si l'on effectue le krigeage en une série de points en utilisant toutes les données disponibles et qu'un échantillon ultérieur confirme la valeur krigée en un point donné, alors un nouveau krigeage incluant cette donnée modifierait les valeurs estimées aux autres points sans toutefois changer la variance de krigeage.		
3	À cause de l'effet d'écran du krigeage, le choix du voisinage utilisé pour le krigeage n'a <u>jamais</u> beaucoup d'importance.		
4	La mesure d'efficacité du krigeage $\frac{[\boldsymbol{Var}(\boldsymbol{Z_v})-\boldsymbol{\sigma_k^2}]}{\boldsymbol{Var}(\boldsymbol{Z_v})}$ permet d'évaluer la précision du krigeage tout en assurant une certaine robustesse face au choix de modèle de variogramme. On pourrait s'en servir pour déterminer les catégories de ressource.		
5	On peut effectuer une estimation équivalente à la méthode polygonale par krigeage ordinaire en limitant le voisinage utilisé pour le krigeage à une seule observation.		
6	On peut effectuer une estimation équivalente à une moyenne locale des données en effectuant un krigeage avec voisinage local et un variogramme effet de pépite pur.		
7	La variance de krigeage ordinaire ne peut jamais être supérieure au palier du variogramme.		
8	La variance de krigeage ordinaire n'est jamais nulle en raison de la présence du multiplicateur de Lagrange		
9	Comme il peut y avoir des poids négatifs dans le krigeage, il est possible que l'on obtienne des teneurs estimées par krigeage qui soient négatives.		
10	Comme il y a des poids négatifs dans le krigeage, il est possible que l'on obtienne des variances de krigeage négatives.		

Question 6 (suite)

#	Énoncé	Vrai	Faux
11	Si l'on estime par krigeage les teneurs sur une grille ponctuelle et que l'on calcule le variogramme des valeurs krigées, on doit s'attendre à retrouver le même variogramme que celui utilisé pour le krigeage en autant que l'hypothèse de stationarité soit valide et que le « bon » modèle de variogramme ait été utilisé.		
12	Le modèle gaussien de variogramme ne devrait pas être utilisé pour décrire le comportement de teneurs ponctuelles d'un gisement car il exprime une trop grande continuité spatiale pour ce type de variable.		
13	Pour les modèles de covariance vus au cours, la variance de dispersion $D^2(v\|V)$ (avec v inclus dans V) est toujours inférieure à $\boldsymbol{\sigma_v^2}$.		
14	La détermination précise du palier du variogramme est requise pour calculer correctement les variances de dispersion $D^2(v\|V)$ lorsque « V » est grand par rapport à la portée du variogramme.		
15	Pour un variogramme sphérique avec palier $C+C_0$ et portée a, la variance de bloc augmente avec l'augmentation de l'effet de pépite C_0.		
16	Dans un contexte minier, il est souhaitable afin de détecter d'éventuelles anisotropies de calculer les variogrammes expérimentaux le long des directions prises par les forages en allouant une faible tolérance angulaire.		
17	Avec un modèle sphérique de variogramme, plus l'effet de pépite est important, plus l'effet d'écran du krigeage est marqué.		
18	Plus l'effet de pépite est important, plus le krigeage montre de fortes discontinuités aux points échantillons.		
19	Le krigeage ordinaire est sans biais, et ce, indépendamment du fait que l'on ait, ou pas, le bon modèle de variogramme.		
20	L'anisotropie identifiée sur les variogrammes expérimentaux calculés suivant différentes directions devrait, en raison de la tolérance angulaire appliquée, surestimer la véritable anisotropie.		

Question 7 (8 points)

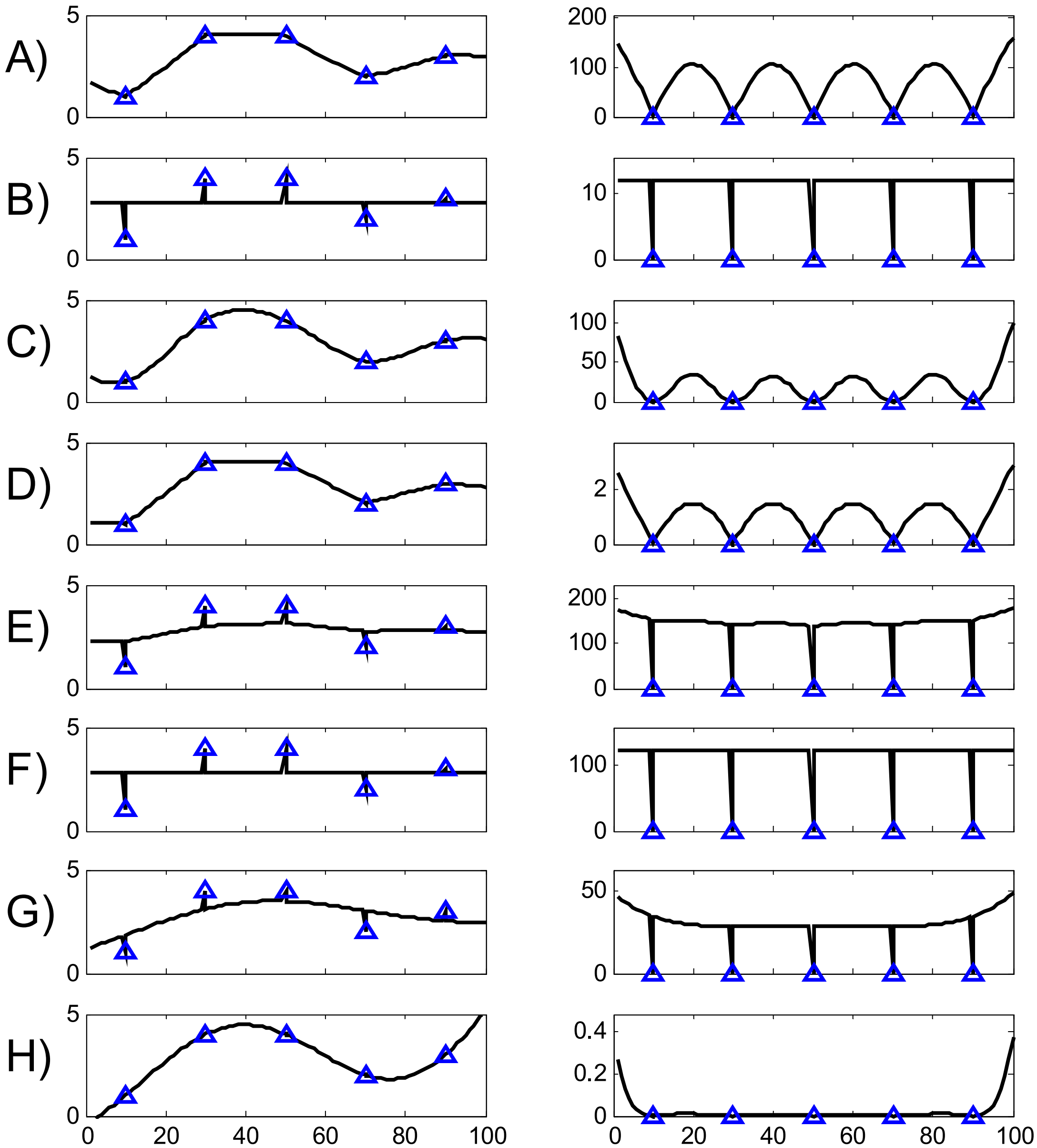
Le tableau suivant présente 8 modèles de variogramme. La figure de la page suivante montre les résultats d'un krigeage en 1D effectué avec les mêmes points échantillons et chacun des modèles du tableau. Les figures de gauche donnent la valeur estimée en fonction de la coordonnée x et les figures de droite donnent la variance de krigeage en fonction de la coordonnée x.

Modèle #	Description	Figure associée (A à H)
1	Sphérique a = 100, C =10	
2	Sphérique a = 30, C = 200	
3	Sphérique, a=100, C_0 = 100, C = 100	
4	Gaussien $a_{effectif}$ = 100, C = 200	
5	Gaussien $a_{effectif}$ = 100, C_0 = 20, C = 180	
6	Gaussien $a_{effectif}$ = 30, C = 200	
7	Effet de pépite pur avec C_0 = 10	
8	Effet de pépite pur avec C_0 = 100	

Tableau

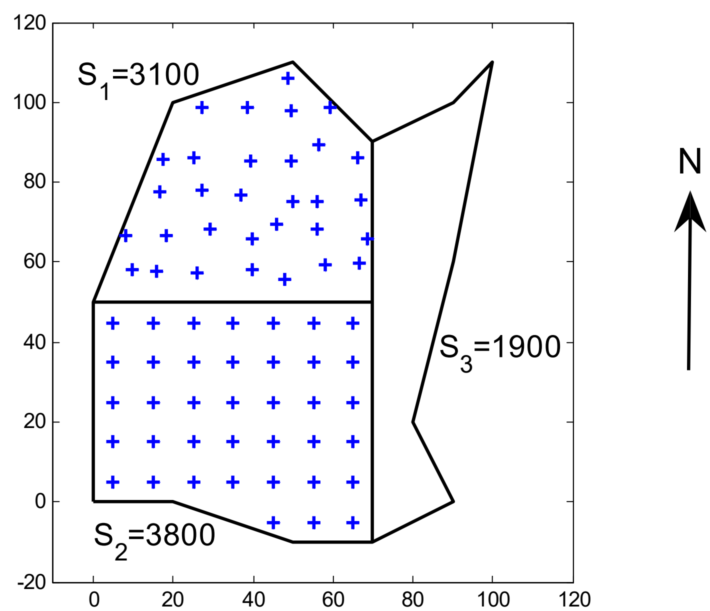
Associez une figure (de A à H) à chacun des modèles du tableau (répondez dans le tableau)

Valeurs estimées par KO Variance de krigeage



Question 8 (15 points)

La figure suivante montre trois zones différentes de surface S_1, S_2 et S_3 dans une zone d'une mine de Cu. On a 31 observations dans S_1 et 38 observations dans S_2. L'échantillonnage pour la zone S_1 peut être considéré aléatoire stratifié sur une maille de 10 m x 10 m alors qu'il est sur une grille régulière de 10 m x 10 m pour la zone S_2. La variance d'estimation pour la teneur moyenne de la zone S_3, estimée avec des données se retrouvant uniquement dans S_3, vaut $0.1\%^2$ (calculée avec un programme de krigeage). Le variogramme est sphérique avec $C_0=0.5\%^2$, $C=6\%^2$ et a=50m.



12 points a) Quelle est la variance d'estimation pour la teneur moyenne de l'ensemble constitué des 3 zones?

Question 8 (suite)

3 points *b) Pourquoi dans l'énoncé du problème est-il important de spécifier que la zone S_3 a été estimée en utilisant uniquement les données s'y retrouvant et donc sans utiliser les données de S_1 et S_2 ?*

Fin de l'examen

Corrigé

Q1 a) Var(Z_v)=C(1-F(10/100,10/100))=4*(1-0.17)=3.32 %^2

Comme les valeurs estimées montrent une variance supérieure à celle des blocs qu'ils estiment on est certain qu'il y a un biais conditionnel.

b) On va récupérer une teneur plus faible que prévue => on va faire moins de profits que prévus.

Q2- Soit S : semaine, L : bloc parallèlement et P : bloc perpendiculairement

D2(P|S)=C(F(S)-F(P))=600(F(105/100,15/30)-F(15/100,15/30))=600*(0.55-0.27) =168 %^2

D2(L|S)= 600(F(105/100,15/30)-F(105/100,2.14/30))=600(0.55-0.45)=60 %^2

Comme 60<168, on doit prendre le bloc parallèlement.

Q3- a) Modèle sphérique avec anisotropie géométrique. Les directions principales sont 60 et 150 avec des portes de 80 m et 40 m respectivement. C0=10$\%^2$ et C=30 $\%^2$

b) La direction reliant les deux points est selon x. Forme un angle de 30 degrés avec a_g. On calcule a_{30}=40*80/(cos(30)^2*40^2+sin(30)^280^2)^0.5 = 60.47

gamma(20)=10+30*(1.5(20/60.47-0.5*(20/60.47)^3) = 24.34 %^2.

Q4- a) Pour 1 segment : C0+C1 E(1/1)+C2*E(1/5)=0.7+1.3*0.27+2.1*0.05=1.156

Pour les 48 heures : 1.156/48=0.0241 %^2

b) Zréel<94 signifie e= Zréel-Zest<-0.3

on a e ~N(0,0.024) Donc P(e<-0.3)=P(N(0,1)<-0.2/0.024^(0.5))=P(N(0,1)<-1.93 =>0.027

Q5-

a) K lambda=k

K= 13.00	2.81	0.00	0.00	0.00	1.00	a1		1.05
2.81	13.00	0.00	0.00	0.00	1.00	a2		2.81
0.00	0.00	13.00	2.81	0.00	1.00	a3	=	1.05
0.00	0.00	2.81	13.00	0.00	1.00	a4		0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	13.00	1.00	a5		0.00
1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.00	mu		1.00

b) lambda'k = 13.73

c) oui lambda 5 car le point x5 n'est corrélé à aucun autre point.

d) On estime par le point x2, C(x0,x2)=2.81. Soit avec la formule de covariance : 13+13 – 2*2.81 =20.38, soit avec formule de variogramme 2* (13-2.81)=20.38.

Q6-

V F F V V V F F V F

F V V V F V F V V F

Q7- D A E H G C B F

Q8 a) Zone S1 : (0.5+ 6 F(10/50, 10/50))/31 =(0.5+6*0.16)/31 = 0.047

Zone S2 : (0.5+ 6 E(10/50,10/50))/38 = (0.5+6* 0.075)/38 = 0.025

Pour S3 = 0.1

Globalement: (3100^2*Var(S1)+3800^2*Var(S2)+1900^2*0.1)/(3100+3800+1900)^2 = 0.015 %^2

b) Pour que l'on puisse combiner ainsi les variances d'estimation par zone, il faut pouvoir négliger les covariances des erreurs. Celles-ci sont négligeables lorsque les estimations sont effectuées avec des ensembles différents de données.

École Polytechnique
Département des génies civil, géologique et des mines (CGM)

GLQ3401-3651 - GÉOSTATISTIQUE et GÉOLOGIE MINIÈRES
2e contrôle périodique - Automne 2016

Date : 3 novembre 2016, heure : 13h45 à 16h15

L'examen comprend 7 questions, sur 11 pages, valant 100 points.
Quatre pages d'annexes sont fournies
Les questions valent dans l'ordre : 12, 16, 12, 16, 16, 14, 14.
Bien indiquer les unités dans chaque réponse finale

- **Le professeur ne répond à aucune question en cours d'examen.**
- Vous répondez sur le questionnaire, utilisez le verso au besoin.
- Les abaques sont fournis aux dernières pages du questionnaire.
- Deux feuilles recto-verso permises; toute calculatrice permise.

Prénom ___________________ Nom________________________________ Matricule : ____________
(lettres carrées)

Signature : ____

Question 1 (12 points)

Un gisement d'or présente un variogramme constitué de trois composantes (qui s'additionnent) :

1-un effet de pépite C_0 = 1.5 ppm^2,

2- une composante sphérique isotrope de portée 20 m avec C_1 = 10 ppm^2

3- une composante exponentielle isotrope avec portée effective de 150 m et C_2 = 36 ppm^2 (note : la covariance exponentielle est obtenue par la formule $C(h)= C \exp(-3|h|/a)$ où a est la portée effective).

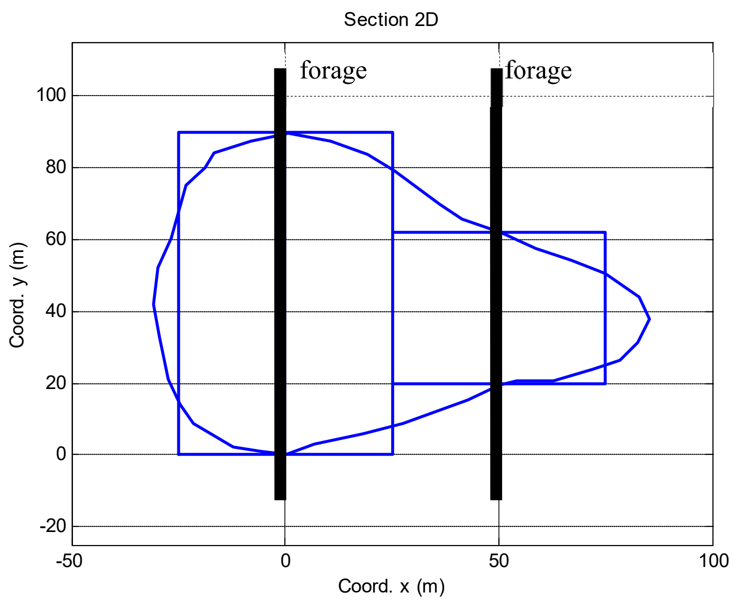
Quelle est la covariance de la teneur en or pour deux points espacés de 10 m suivant la direction (azimut) 142^o ?

Question 2 (16 points)

Dans un gisement de zinc, on estime le gisement par la méthode des sections. Les carottes individuelles ayant servies à établir le variogramme font 3 m. Le variogramme des carottes est sphérique avec $C_0 = 3\ \%^2$, $C = 20\%^2$ une portée de 50 m selon x et de 100 m selon y (anisotropie géométrique).

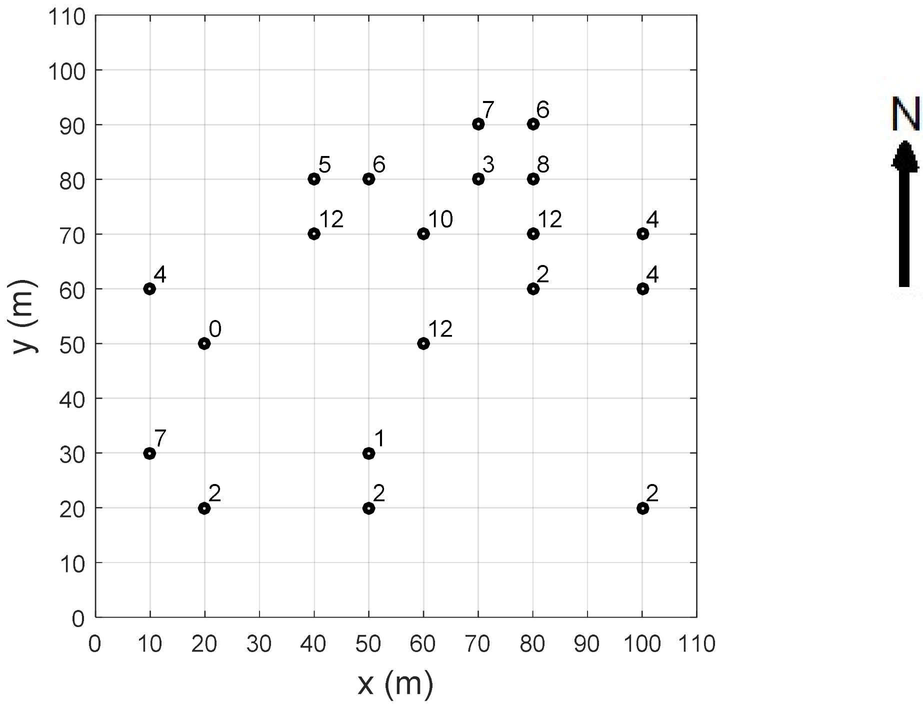
Aide : afin de pouvoir utiliser l'abaque, la surface minéralisée sur la section peut être approchée par deux rectangles tels que dessinés sur la figure.

Quelle est la variance d'estimation pour la teneur moyenne sur cette section ?



Question 3 (12 points)

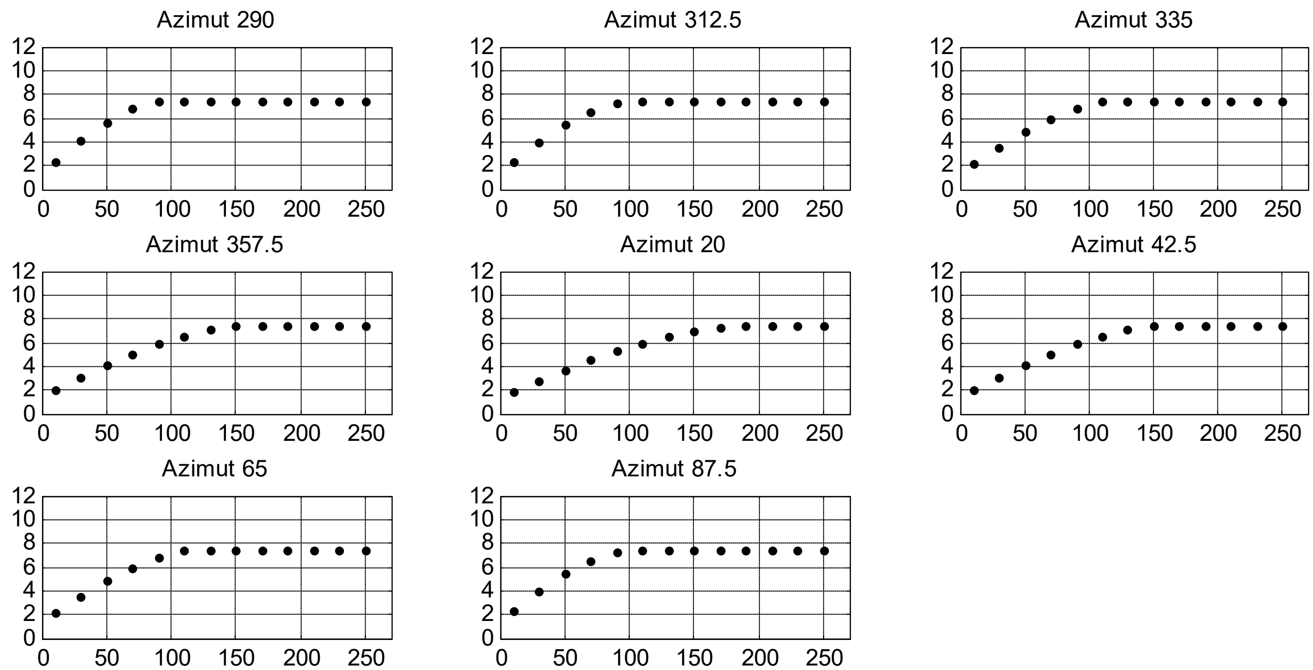
La figure suivante montre une vue en plan donnant la teneur en or (ppm) en certains points.



6 pts *a) Quelle est la valeur du variogramme expérimental selon <u>l'azimut</u> 90° pour la distance 20 m <u>exactement</u> ?* (indiquez toutes les paires retenues)

Question 3 (suite)

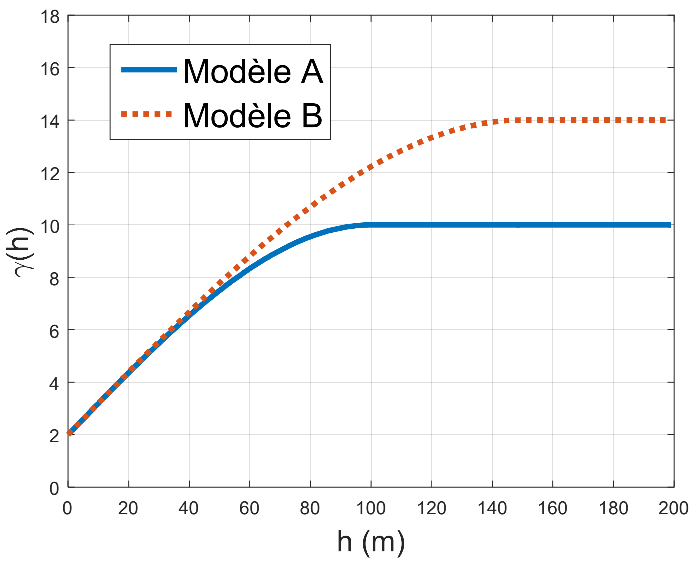
Sur l'ensemble du gisement, les variogrammes expérimentaux ont été calculés selon différentes directions avec une tolérance angulaire de 5°. L'on a obtenu (|h| (m) en abscisse et $\gamma_e(|h|)$ (ppm²) en ordonnée) :



6 pts *b) Décrivez un modèle de variogramme 2D qui s'ajuste bien à ces variogrammes expérimentaux* ***simultanément*** *dans toutes les directions. Bien indiquer tous les paramètres.*

Question 4 (16 points)

Soit les deux modèles de variogramme présentés sur la figure suivante.

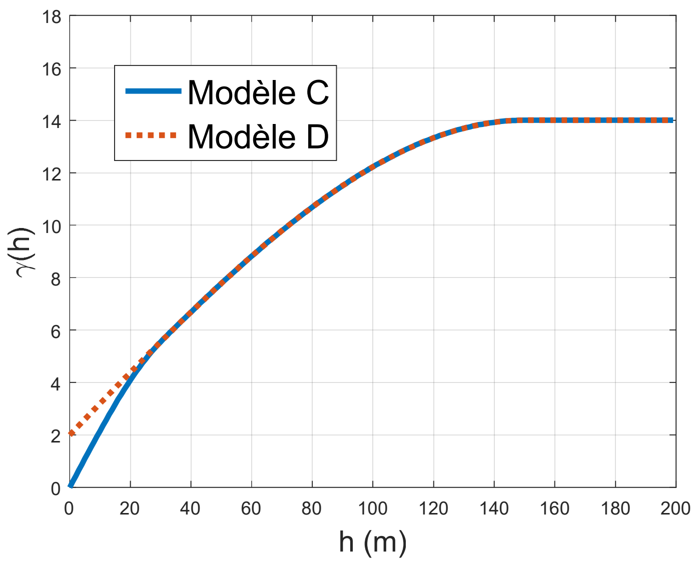


Indiquez si les valeurs obtenues pour les éléments décrits dans le tableau suivant seront très semblables (O) ou non (N) lorsque calculés avec les modèles A et B. (un point par bonne réponse, zéro pour l'absence de réponse et -0.5 pour une mauvaise réponse).

		Semblable Oui ou Non
a)	La variance de la teneur d'un bloc de 20 m x 20 m	
b)	La variance de dispersion pour un bloc de 10 m x 10 m dans un bloc 40 m x 40 m	
c)	La variance d'un krigeage ordinaire ponctuel où tous les points, incluant le point à estimer, présentent entre eux des distances < 20 m	
d)	La variance de dispersion des valeurs ponctuelles dans un bloc de 40 m x 40 m	
e)	La variance de la teneur d'un bloc de 200 m x 200 m	
f)	La variance de dispersion pour un bloc de 10 m x 10 m dans un bloc 200 m x 200 m	
g)	La variance de krigeage ordinaire où tous les points du krigeage, incluant le point à estimer, présentent entre eux des distances > 80 m	
h)	La variance de dispersion des valeurs ponctuelles dans un bloc de 200 m x 200 m	

Question 4 (suite)

On compare cette fois les valeurs obtenues avec les deux modèles de variogramme C et D suivants :

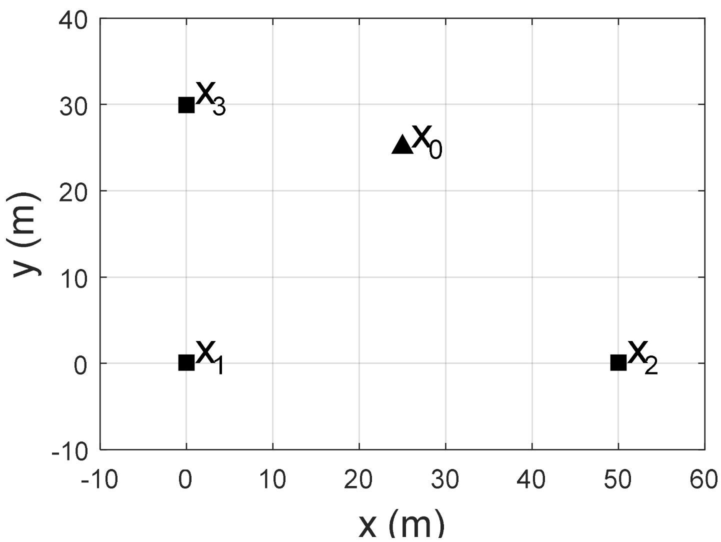


Indiquez si les valeurs obtenues pour les éléments décrits dans le tableau suivant seront très semblables (O) ou non (N) lorsque calculés avec les modèles C et D. (un point par bonne réponse, zéro pour l'absence de réponse et -0.5 pour une mauvaise réponse).

		Semblable Oui ou Non
i)	La variance de la teneur d'un bloc de 20 m x 20 m	
j)	La variance de dispersion pour un bloc de 10 m x 10 m dans un bloc 40 m x 40 m	
k)	La variance d'un krigeage ordinaire ponctuel où tous les points, incluant le point à estimer, présentent entre eux des distances < 20 m	
l)	La variance de dispersion des valeurs ponctuelles dans un bloc de 40 m x 40 m	
m)	La variance de la teneur d'un bloc de 200 m x 200 m	
n)	La variance de dispersion pour un bloc de 10 m x 10 m dans un bloc 200 m x 200 m	
o)	La variance de krigeage ordinaire où tous les points du krigeage, incluant le point à estimer, présentent entre eux des distances > 80 m	
p)	La variance de dispersion des valeurs ponctuelles dans un bloc de 200 m x 200 m	

Question 5 (16 points)

La figure suivante montre la localisation de trois données (x_1 à x_3) utilisées pour estimer la teneur du Cu (en %) au point x_0 (situé en x=25, y=25) par krigeage ordinaire. Le modèle de variogramme est sphérique avec anisotropie géométrique. Les axes principaux sont orientés parallèlement aux coordonnées x et y. La portée selon x est de 100 m et elle est de 20 m selon y. La composante sphérique a comme paramètre C=7 %^{2}. On retrouve aussi un effet de pépite de valeur C_0 = 1%^{2}.



Construisez le système de krigeage ordinaire sous forme matricielle (ne pas résoudre). Indiquez clairement tous vos calculs.

Question 5 (suite)

Question 6 (14 points)

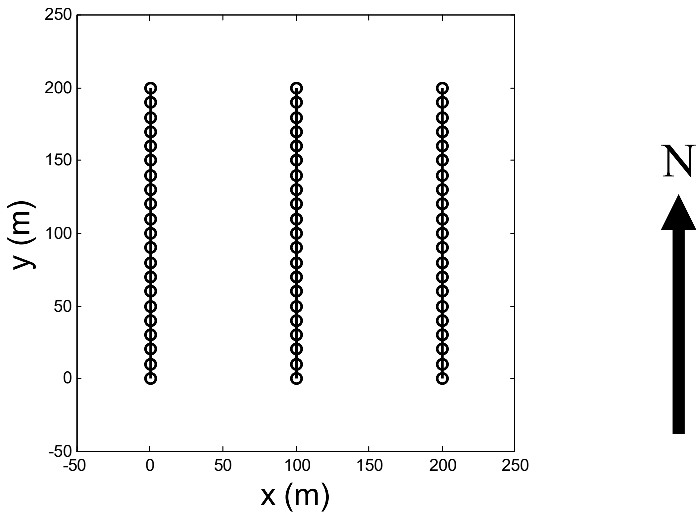
Une mine opère un gisement de fer (FeO) dont le variogramme ponctuel 3D est sphérique avec anisotropie géométrique. On a C_0=5%^{2}, C=23%^{2} et a_x=a_y=200 m et a_z=40 m. Chaque jour, on mine 30 kt de minerai correspondant approximativement à un bloc de 30 m (selon x) x 30 m (selon y) x 10 m verticalement. Au cours d'un mois, on prévoit miner approximativement un bloc de 165 m x 165 m x 10 m.

10 pts *a) Quelle sera la variance de la teneur moyenne quotidienne en FeO que l'on s'attend à observer au cours du mois?*

4 pts *b) Suggérez une modification* *<u>simple</u>* *au bloc exploité quotidiennement qui permettrait de diminuer la variance de la teneur quotidienne au cours du mois (le bloc correspondant au mois ne change pas; vous ne pouvez pas utiliser de pile de pré-homogénéisation ni recourir à plus d'un point de minage)*

Question 7 (14 points)

La figure suivante illustre l'emplacement de lignes de levés géophysiques nord-sud espacées de 100 m. Les données sont prises aux 10 m sur chaque ligne. Le variogramme est sphérique avec anisotropie géométrique et portées principales a_x=300 m et a_y=100 m. On effectue le krigeage pour estimer les valeurs ponctuelles sur une grille régulière de points espacés de 5 m.



Le tableau suivant décrit différentes stratégies de recherche pour définir le voisinage pour le krigeage de chaque point. Le nombre de données indiqué est un nombre maximal. Si l'on a plus de données que ce nombre, on ne prend pas les données excédentaires. On prend les données les plus proches du point à estimer parmi celles respectant la stratégie de recherche.

Stratégie	Description
A	Recherche circulaire de rayon 150 m; 50 points
B	Recherche circulaire de rayon 150 m; 3 points par quadrant.
C	Recherche circulaire de rayon 50 m; 50 points
D	Recherche circulaire de rayon 150 m; 6 points
E	Recherche elliptique 150 m selon x, 60 m selon y; 10 points
F	Recherche elliptique, 150 m selon x, 60 m selon y; 50 points
G	Recherche elliptique, 150 m selon x, 50 m selon y; 3 points par quadrant
H	Recherche elliptique, 60 m selon x, 150 m selon y; 50 points
I	Recherche elliptique, 60 m selon x, 150 m selon y; 3 points par quadrant

8 pts *a) Identifiez la ou les stratégies de recherche qui semblent à priori acceptables.*

Question 7 (suite)

3 pts *b) Indiquez comment la variance de krigeage obtenue avec les différents voisinages pourrait être utile pour sélectionner la meilleure stratégie de recherche?*

3 pts *c) Indiquez une autre méthode statistique permettant de sélectionner la meilleure stratégie de recherche. Expliquez très brièvement comment vous l'appliqueriez dans ce cas particulier compte tenu de la disposition des données.*

Corrigé CP2-2016

Question 1

$C(h)=10\,(1-1.5\text{x}10/20+0.5\text{x}(10/20)^3\,) + 36\exp(-30/150) = 32.60\ ppm^2$

Question 2

1er rectangle : $Var(e1)= 3/30 + 20\text{x}E(50/50,90/100)= 0.1+20\text{x}0.1 = 2.1\ \%^2$
2e rectangle : $Var(e2)= 3/14+20\text{x}E(50/50,42/100) = 0.214+ 20\text{x}0.15 = 3.21\%^2$
Combiné : $[(90\text{x}50)^2\ 2.1 + (42\text{x}50)^2\ 3.21]/(90\text{x}50+42\text{x}50)^2 = 1.30\%^2$

Question 3

a) On trouve 5 paires.
$\gamma_e(20) =1/10[\ (6-3)^2 + (12-10)^2 + (10-12)^2 + (12-4)^2 + (2-4)^2) = 8.5\ ppm^2$
b) Variog. sphérique avec anisotropie géométrique. Directions principales 20 et 290 degrés. $a_{20}=200$ et $a_{290}=100$. $C_0=1$, $C=6.5$.

Question 4

a) à h) : N O O O N N N N
i) à p) : N N N N O N O O

Question 5

à cause la portée 20 verticalement, seules 2 covariances sont non-nulles : Cov(Z1,Z2) et Cov(Z3,Z0)
$Cov(Z1,Z2) = 7\,(1-1.5\ 50/100 +0.5(50/100)^3) = 2.1875$
$\theta_{3\text{-}0} = \text{atan}(5/25) = 11.31$ degrés
$a_\theta = (20\text{x}100)/(\sin(11.31)^2 100^2+\cos(11.31)^2 20^2)^{0.5} = 72.111$
$h_{30}=(5^2+25^2)^{0.5} = 25.4951$
$C_{30}(h_{30})= 7(1-1.5(25.4951/72.111)+0.5((25.4951/72.111)^3) = 3.4424$
Le système de KO est donc :

$$\begin{bmatrix} 8 & 2.1875 & 0 & 1 \\ 2.1875 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.4424 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Question 6

a) $D^2(v|V) = 23\,[F(10/40,165/200)-F(10/40,30/200)] = 23\,(0.6 - 0.18) = 9.66\ \%^2$ (Fig. 3)

b) Miner quotidiennement un bloc le plus allongé possible (e.g. 165 x 5.6 m x 10 m). No

---

Question 7

a) A, B, F, G
b) On pourrait comparer la distribution des variances de krigeage obtenues pour chaque voisinage. Celle avec la plus faible valeur moyenne devrait être un meilleur choix.
c) Validation croisée. On enlève chaque point à tour de rôle et on l'estime avec ses voisins sélectionnés selon la stratége de recherche. La moyenne des erreur en valeur absolue (ou au carré) indiquera quelle stratégie est la meilleure. Comme les données sont prises selon les lignes de relevés on aurait intérêt à décimer les données pour se rapprocher d'une situation d,estimation plus proche de ce qui sera disponible lors du krigeage.

École Polytechnique
Département des génies civil, géologique et des mines (CGM)

GLQ3401-3651 - GÉOSTATISTIQUE et GÉOLOGIE MINIÈRES
2e contrôle périodique - Automne 2015

Date : 5 novembre 2015, heure : 13h45 à 16h15

L'examen comprend 6 questions valant 15 points chacune pour un total de 90 points

---

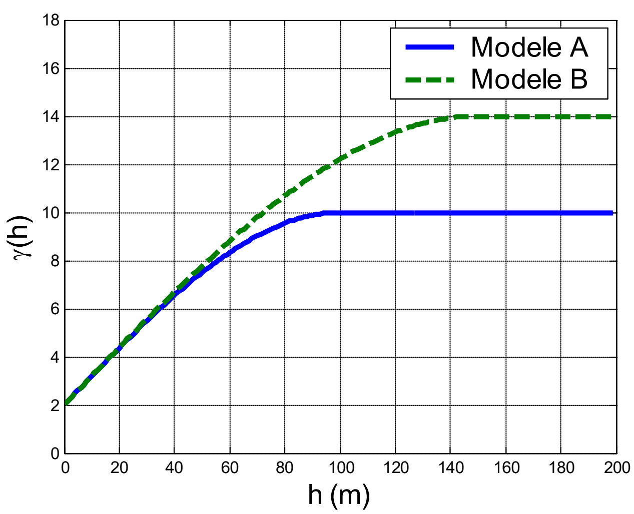
- **Le professeur ne répond à aucune question en cours d'examen. En cas de doute, indiquez votre interprétation.**
- **Vous répondez sur le questionnaire, utilisez le verso au besoin.**
- **Les abaques sont fournis aux dernières pages du questionnaire.**
- **Deux feuilles recto-verso permises; toute calculatrice permise.**

Prénom ____________________ Nom _________________________________ Matricule : ____________
(lettres carrées)

Signature : ____

Question 1 (15 points)

Soit les deux modèles de variogramme présentés sur la figure suivante.



Question 1 (suite)

Indiquez pour les questions a) à d) ci-contre si les deux modèles fournissent des réponses très semblables ou non. Si vous prévoyez une différence, dans quel sens celle-ci devrait se manifester? Répondez sans faire de calculs.

4 pts *a) La variance de blocs pour un bloc de 20m x 20m ?*

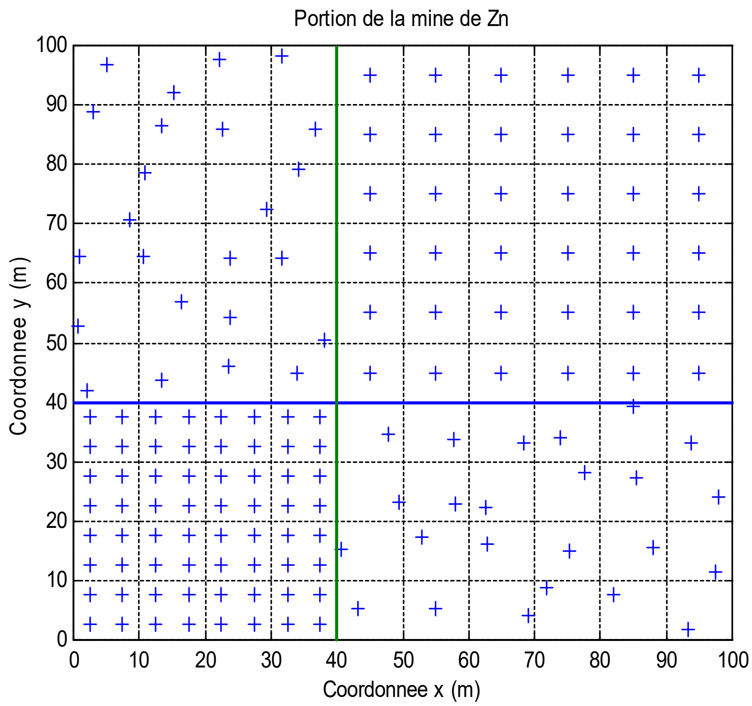
4 pts *b) La variance de dispersion pour un bloc de 10m x 10m dans un bloc 40m x 40m ?*

3 pts *c) La variance de dispersion des valeurs ponctuelles dans un bloc de 30m x 30m ?*

4 pts *d) La variance d'un krigeage ordinaire ponctuel où tous les points, incluant le point à estimer, présentent entre eux des distances < 40 m.*

Question 2 (15 points)

La figure suivante montre l'emplacement des échantillons pour une portion d'une mine de zinc. On distingue quatre zones et 3 patrons d'échantillonnage différents (pour les zones nord-ouest et sud-est, vous pouvez considérer que l'échantillonnage est **aléatoire stratifié** avec un échantillon par cellule). Les teneurs (%Zn) sont mesurées sur des épaisseurs constantes de 5m correspondant à l'épaisseur des bancs de la mine et servent à calculer le variogramme 2D des teneurs de Zn.



Quelle est la variance d'estimation de la teneur moyenne en Zn pour l'ensemble de la zone si le variogramme est sphérique isotrope avec $C_0=6\%^2$, $C=30\%^2$ et $a=25m$?

Question 2 (suite)

Question 3 (15 points)

Dans un très grand gisement d'or exploité à ciel ouvert, la teneur quotidienne varie beaucoup. Comme les ajustements majeurs au concentrateur sont faits à chaque semaine, la mine vit un problème de mauvaise récupération due à cette variabilité. Pour atténuer le problème, l'ingénieur suggère d'utiliser une pile de pré-homogénéisation (disposition en fines couches horizontales reprises verticalement). Le volume de la pile correspond à la capacité du concentrateur pour une semaine, soit 20Kt. Le bloc miné durant la semaine fait 35m x 35m x 5m. À chaque jour, on mine un bloc de 35m x 5m x 5m. Le variogramme 3D a été obtenu à partir de carottes de forage que l'on peut considérer comme ponctuelles. Le modèle choisi est isotrope et de type sphérique avec C_0=100ppm^2, C=500ppm^2 et a=25m.

4 pts *a) Quelle sera la variance de la teneur en or quotidienne entrant au concentrateur lors de l'exploitation d'une même pile de pré-homogénéisation?*

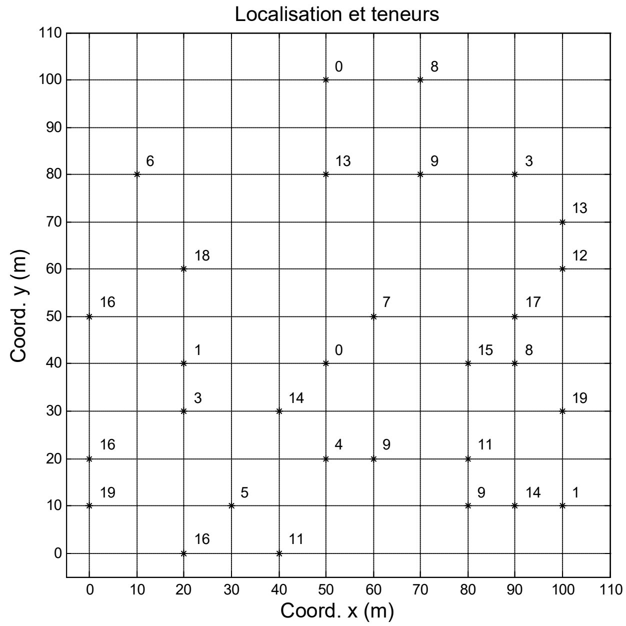
4 pts *b) Quelle sera la variance entre des teneurs moyennes des piles exploitées sur une très longue période de temps ?*

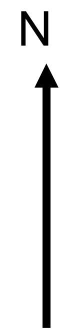
4 pts *c) Quelle serait la variance des teneurs quotidiennes sur une très longue période de temps si l'on n'utilise pas de pile de pré-homogénéisation?*

3 pts *d) Vous êtes contrôleur du procédé au concentrateur. Préférez-vous l'exploitation avec ou sans la pile? Justifiez.*

Question 4 (15 points)

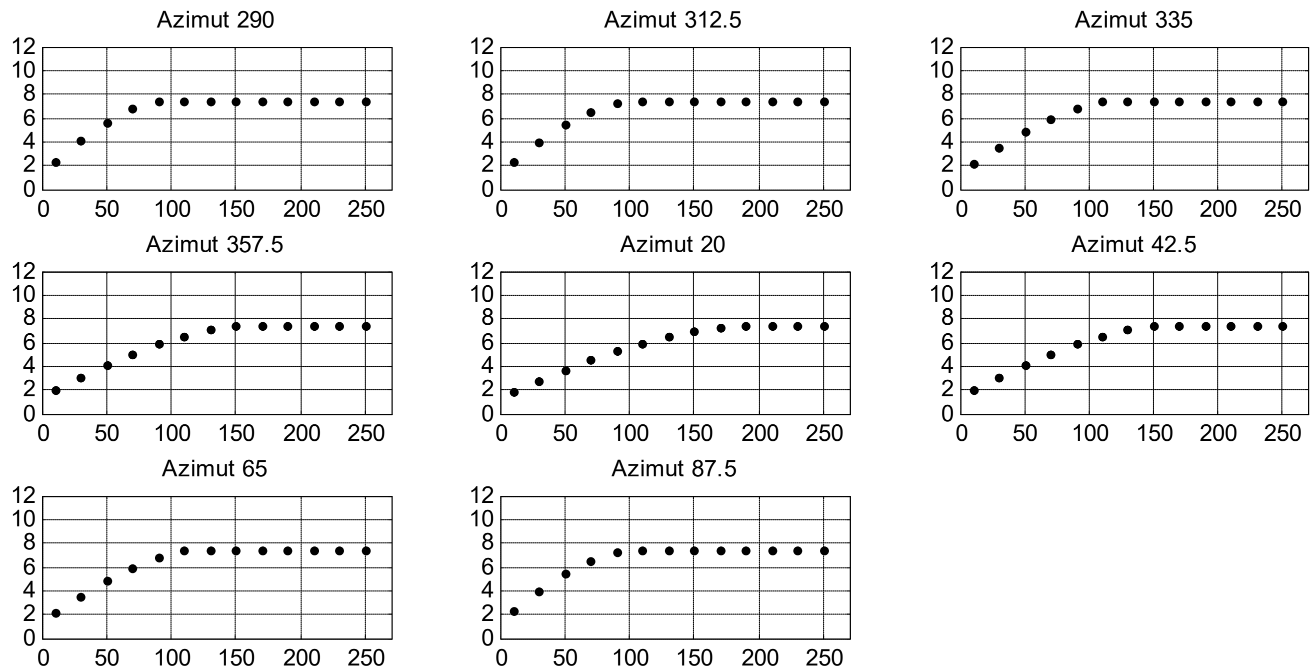
6 pts *a) Calculez le variogramme expérimental des données suivantes (Au en ppm)* *__dans la direction (azimut) 0º__* *pour les distances 10 m et 20 m (tolérance angulaire 0.1º). Les nombres sur la figure sont les teneurs associés aux localisations indiquées par *. Bien indiquer les paires utilisées.*





Question 4 (suite)

Sur l'ensemble du gisement, les variogrammes expérimentaux ont été calculés selon différentes directions avec une tolérance angulaire de 5°. L'on a obtenu :

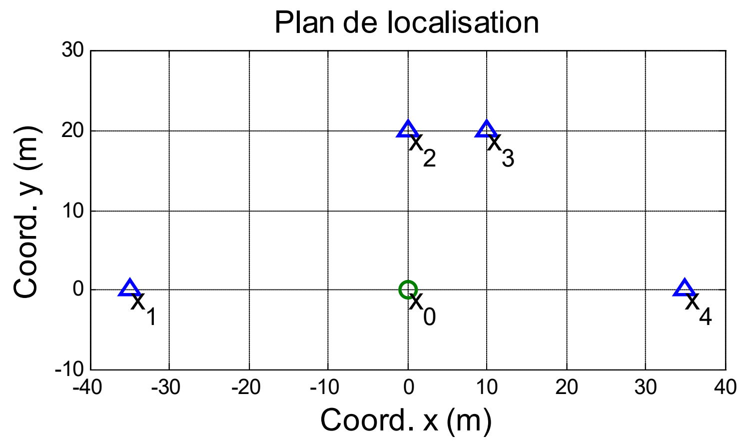


6 pts *b) Décrivez un modèle de variogramme 2D qui s'ajuste bien à ces variogrammes expérimentaux simultanément dans toutes les directions.*

3 pts *c) On effectue le krigeage ordinaire sur une grille régulière de 1m avec ces données en utilisant le modèle de variogramme s'ajustant le mieux possible aux variogrammes expérimentaux directionnels. On calcule ensuite les variogramme expérimentaux directionnels des valeurs krigées. Ceux-ci seront-t-ils bien ajustés par le modèle utilisé pour réaliser le krigeage? Justifiez.*

Question 5 (15 points)

La figure suivante montre une portion d'une mine de fer. L'on désire estimer la teneur au point x_0 par la méthode polygonale (i.e. estimer par le plus proche voisin). Le variogramme comporte trois composantes : un effet de pépite C_0 de $5\%^2$, un sphérique isotrope de portée 15m ayant $C_1=25\%^2$ et un sphérique avec $C_2= 20\ \%^2$ et portées montrant une anisotropie géométrique. Les directions principales sont selon l'azimut 30^o et 120^o. les portées sont $a_{30}=100$ m et $a_{120}=50$ m.



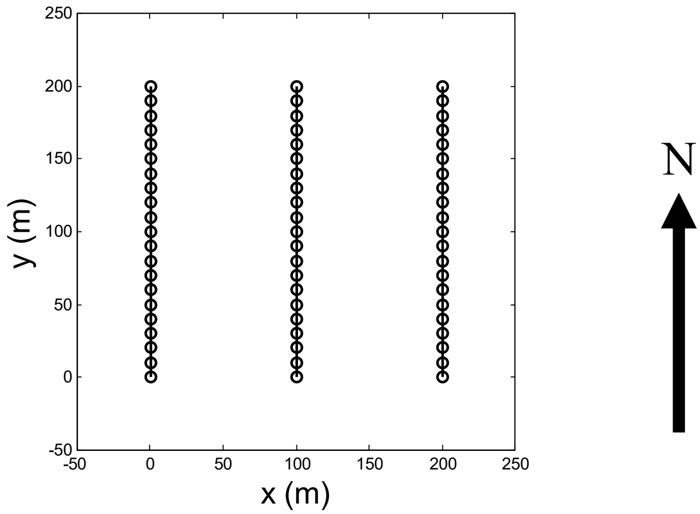
9 pts *a) Construisez le système de krigeage ordinaire qui correspond à l'estimation de la teneur au point x_0 par son plus proche voisin.*

Question 5 (suite)

6 pts *b) Résoudre le système en a), trouver le multiplicateur de Lagrange et calculer la variance de krigeage ordinaire.*

Question 6 (15 points)

La figure suivante illustre l'emplacement de lignes de levés géophysiques nord-sud espacées de 100 m. Les données sont prises aux 10 m sur chaque ligne. Le variogramme est sphérique avec anisotropie géométrique et portées principales a_x=300 m et a_y=100 m. On effectue le krigeage pour estimer les valeurs ponctuelles sur une grille régulière de points espacés de 5 m.



Le tableau suivant décrit différentes stratégies de recherche pour définir le voisinage pour le krigeage de chaque point. Le nombre de données indiqué est un nombre maximal. Si l'on a plus de données que ce nombre, on ne prend pas les données excédentaires. On prend les données les plus proches du point à estimer parmi celles respectant la stratégie de recherche.

Stratégie	Description
A	Recherche circulaire de rayon 150 m; 30 points
B	Recherche circulaire de rayon 150 m; 3 points par quadrant.
C	Recherche circulaire de rayon 50 m; 30 points
D	Recherche circulaire de rayon 150 m; 6 points
E	Recherche circulaire de rayon 50 m; 50 points.
F	Recherche elliptique 150 m selon x, 50 m selon y; 10 points
G	Recherche elliptique, 150 m selon x, 50 m selon y; 30 points
H	Recherche elliptique, 150 m selon x, 50 m selon y; 3 points par quadrant
I	Recherche elliptique, 75 m selon x, 150 m selon y; 30 points
J	Recherche elliptique, 75 m selon x, 150 m selon y; 3 points par quadrant

5 pts *a) Identifiez la ou les stratégies de recherche qui semblent à priori acceptables.*

Question 6 (suite)

5 pts *b) Indiquez le problème pour la ou les stratégies que vous jugez inacceptables.*

5 pts *c) Quel outil statistique pourriez-vous utiliser pour tenter de sélectionner la meilleure stratégie de recherche?*

Annexes

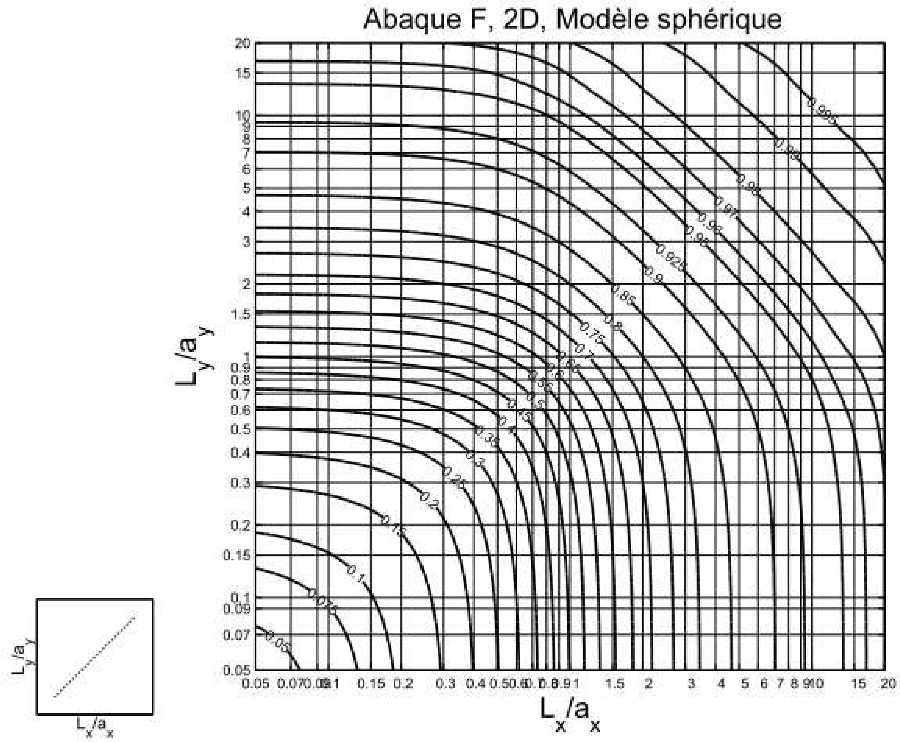


Fig. 2. Variance d'un point dans un rectangle, variogramme sphérique de palier C=1; $F(L_x/a_x, L_y/a_y) = D^2(\bullet|v) = \bar{\gamma}(v,v) = (1 - \bar{C}(v,v))$

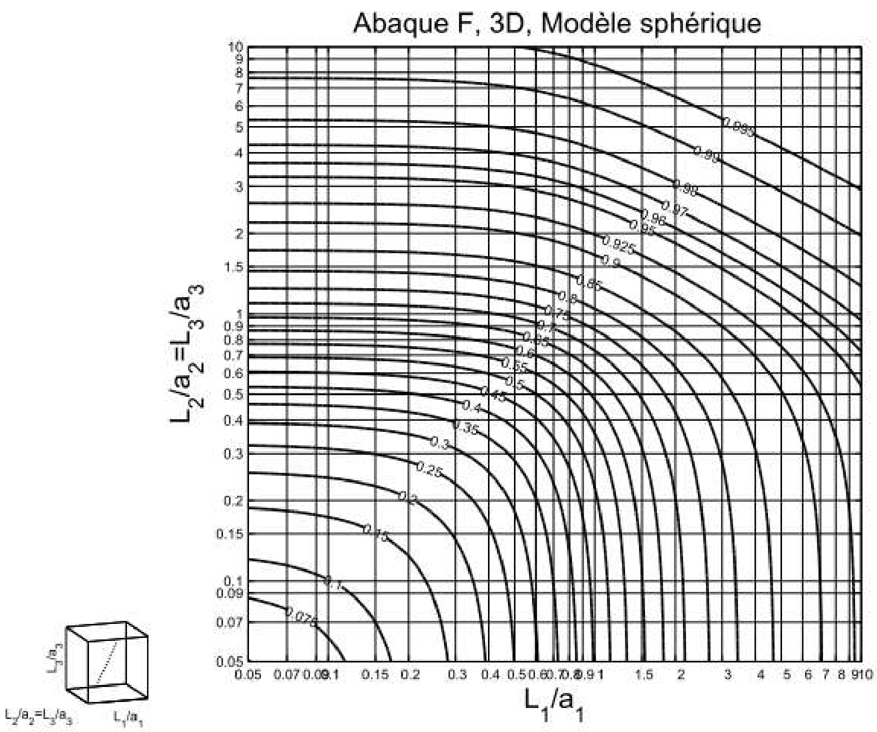


Fig. 3. Variance d'un point dans un bloc section carrée, variogramme sphérique de palier C=1; $F(L_1/a_1, L_2/a_2 = L_3/a_3, L_3/a_3) = D^2(\bullet|v) = \bar{\gamma}(v,v) = (1 - \bar{C}(v,v))$

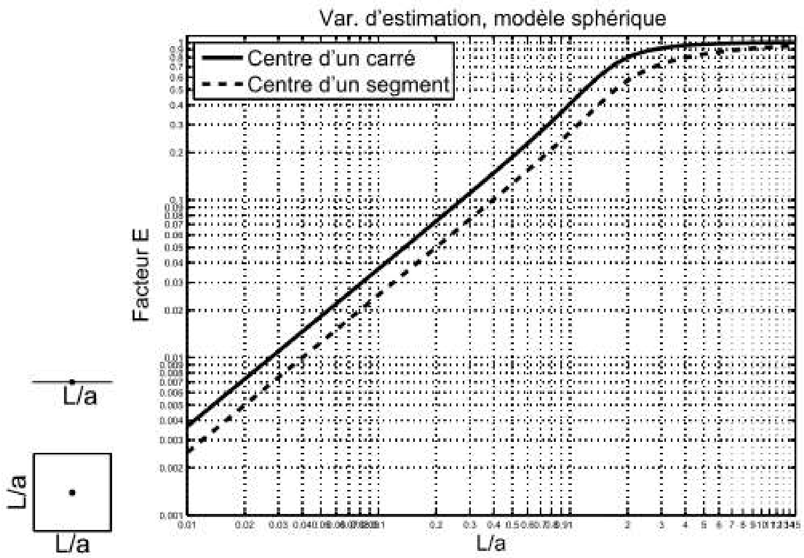


Fig. 4. Variance d'estimation: un segment ou un carré estimé par son point central

Corrigé

Question 1

a) Var bloc avec A > var bloc avec B car $C_A > C_B$ et Var(bloc) = C- $\bar{\gamma}(v,v)$ et $\bar{\gamma}(v,v)$ sera le même avec les deux modèles car le bloc ne fait que 20m.

b) $D^2(v|V) = \bar{\gamma}(V,V) - \bar{\gamma}(v,v)$, comme le gros bloc fait 40 m, les valeurs du variogramme seront les mêmes pour les deux modèles pour v et V, donc on aura la même variance de dispersion.

c) $D^2(o|v) = \bar{\gamma}(v,v)$, donc aucune différence

d) Comme on peut exprimer le krigeage ordinaire en fonction du variogramme et que toutes les valeurs sont les mêmes pour A et B car les distances sont toutes < 40 m, alors on aura le même krigeage et donc la même variance de krigeage.

Question 2

A : NO+SE; B :NE; C : SO

Pour A: (6+30F(10/25,10/25))/48 ; F(10/25,10/25)=0.31 => 0.319 $\%^2$
Pour B: (6+30*E(10/25))/36 ; E(10/25)=0.15 => 0.292 $\%^2$
Pour C : (6+30*E(5/25))/64 ; E(5/25)=0.075 => 0.129 $\%^2$

Global : $(1600^2 0.129+3600^2*0.292+4800^2*0.319)/10000^2 = 0.115\%^2$

Question 3

a) ~0, on ne voit pas de variation tant qu'on est dans une même pile
b) σ_v^2 où v est le volume de la pile : C(1-F(5/25, 35/25)) = 500*(1-0.79)=105 ppm^2
c) σ_v^2 où v est le volume miné quotidiennement : C(1-F(35/25,5/25)) =500(1-0.58) = 210 ppm^2
d)Avec la pile. On réduit la variance de moitié, ce qui permet des ajustements moins importants en moyenne. De plus, durant l'exploitation d'une même pile (une semaine), il n'y a pas d'ajustements à apporter.

Question 4

a) gamma(10)= $1/(2*5)*[(16-19)^2+(1-3)^2+(9-11)^2+(8-17)^2+(12-13)^2]$ = 99/10= 9.9
gamma(20)=$1/(2*6)[(1-18)^2+(0-4)^2+(0-13)^2+(8-9)^2+(11-15)^{21}+(19-1)^2]$ = 67.92

b) Modèle sphérique avec anisotropie géométrique a_{20}=200m, a_{290}=100 m, 20º et 290º sont les directions principales de l'ellipse de portée, C_0=1.5 ppm^2, C=6 ppm^2,

c)Non, il ne sera pas bien ajusté car la variance des valeurs krigées est inférieure à celle de la variable originale (effet de lissage) et le variogramme ne montrera pas d'effet de pépite et sera plus continu que la variable originale. De plus, la variance des valeurs krigées n'est pas stationnaire, ce qui indique que l'on ne devrait même pas calculer le variogramme.

Question 5

a) Le point le plus proche est situé en x_2, dist=20 m.. La direction définie par les deux points eat azimut 0. $Cov(Z_2,Z_2)=50$; $Cov(Z_0,Z_2)= 20*Sph(a_{30}=100, a_{120}=50)$
La portée selon la direction 0^0 est : $100*50/(100^2\sin(30)^2+50^2\cos(30)^2)^{0.5} = 75.6$ m
et $20 (1-1.5(20/75.6)+0.5(20/75.6)^3)=$

$$\begin{bmatrix} 50 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.25 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) On trouve $\lambda = 1; \mu = 12.25 - 50 = -37.75$
σ_k^2 =50-12.25 - (-37.75)=75.5 %^{2}

Question 6

a) Acceptables : A,B,F,G,H
b) Problèmes :
C, E, I et J : La distance de recherche n'est pas assez grande pour englober au moins deux lignes. Donc certains points seront estimés par des données provenant d'une seule ligne, chose qu'il faut absolument éviter car cela introduit de fortes discontinuités dans les cartes krigées.
D : bien que la distance de recherche soit assez grande, le nombre est insuffisant car on va trouver tous les points les plus proches à nouveau sur le même forage. Il faut soit prendre plus de points, soit faire une recherche par quadrant.
c) On pourrait utiliser la validation croisée.

École Polytechnique
Département des génies civil, géologique et des mines (CGM)

GLQ3401-3651 - GÉOSTATISTIQUE et GÉOLOGIE MINIÈRES
2^e^ contrôle périodique - Automne 2014

Date : 7 novembre 2014
Heure : 12h45 à 14h45

Note : Deux feuilles recto-verso permises; calculatrice, programmable ou non, permise; tout autre appareil électronique interdit

L'examen comprend 7 questions totalisant 100 points
20 pts : Q2, Q3 - 15 pts : Q4, Q7 - 10 pts : Q1, Q5, Q6

Le professeur ne répond à aucune question en cours d'examen. En cas de doute, indiquez votre interprétation.

Vous répondez sur le questionnaire, utilisez le verso au besoin

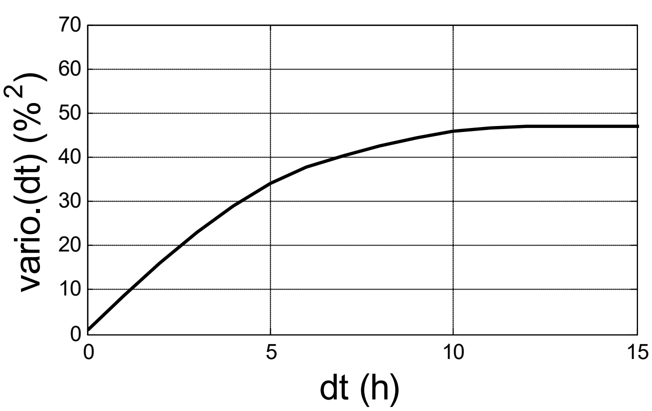
---

Nom de l'étudiant : ________________________________ Matricule : ____________
(lettres carrées)

Signature : ________________________________

Question 1 (10 points)

Une mine de Cu veut connaître la teneur quotidienne de son minerai à l'entrée du concentrateur. Elle échantillonne le convoyeur de minerai à intervalles réguliers de 1 h à compter de la 30^e^ minute. On suppose que globalement l'échantillonnage est sans biais. Le variogramme ponctuel comporte un effet de pépite C_0=1%^{2} et deux composantes sphériques s'additionnant (voir figure), la première composante avec C_1=16%^{2} et a_1= 6 h et la seconde avec C_2=30%^{2} et a_2=12 h.



Question 1 (suite)

Quelle est la variance d'estimation de la teneur quotidienne entrant au concentrateur obtenue avec cette procédure ?

Question 2 (20 points)

Répondez par vrai ou faux (1 point pour une bonne réponse, 0 pour une absence de réponse, -0.5 pour une mauvaise réponse). Dans tous les cas, supposez qu'un modèle admissible de variogramme est utilisé. Dans tous les énoncés où le krigeage apparaît, supposez que l'on estime un point distinct des points où les données sont présentes.

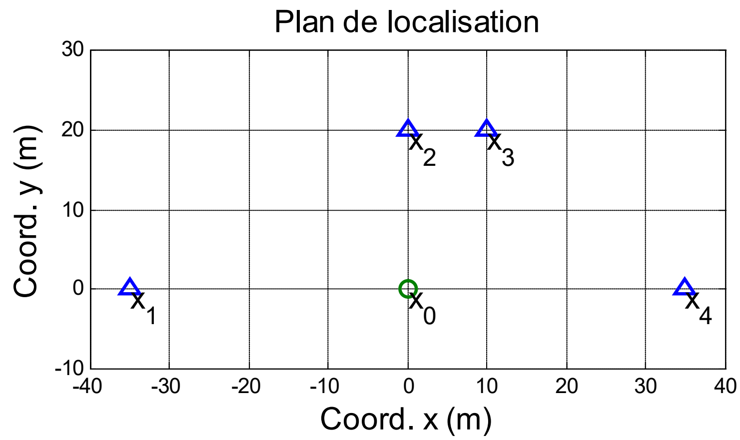
#	Énoncé	Vrai	Faux
1	Dans un krigeage simple, la variance de krigeage ne dépasse jamais le palier du variogramme.		
2	Dans un krigeage ordinaire, la variance de krigeage ne dépasse jamais le palier du variogramme.		
3	Les poids de krigeage simple des données situées à une distance du point estimé supérieure à la portée sont toujours 0.		
4	Les poids de krigeage ordinaire des données situées à une distance du point estimé supérieure à la portée sont toujours 0.		
5	En présence d'un effet de pépite pur, les poids de krigeage simple sont tous 0 et l'estimateur vaut « m », la moyenne supposée connue.		
6	En présence d'un effet de pépite pur, le krigeage ordinaire revient à faire la moyenne arithmétique des données du voisinage.		
7	Un krigeage ordinaire implique l'estimation implicite de la moyenne stationnaire de Z avec les seules données présentes dans le voisinage retenu pour le krigeage.		
8	On peut utiliser la technique de validation croisée pour tout estimateur (e.g. inverse de la distance) pas seulement pour le krigeage.		
9	On peut toujours ajuster les paramètres du variogramme de façon à ce que l'écart-type des résidus normalisés d'une validation croisée soit exactement 1.		
10	Comme il peut y avoir des poids négatifs dans le krigeage, il est possible que l'on obtienne des teneurs estimées par krigeage qui soient négatives.		

Question 2 (suite)

		Vrai	Faux
11	Comme il y a des poids négatifs dans le krigeage, il est possible que l'on obtienne des variances de krigeage négatives.		
12	Pour les modèles de covariance vus au cours (excluant l'effet de pépite pur) si l'on a trois volumes imbriqués l'un dans l'autre avec $v_1<v_2<v_3$, alors on aura toujours $D^2(v_1\|v_3) > D^2(v_2\|v_3)$.		
13	Pour un variogramme sphérique, le choix du palier du variogramme a peu d'impact dans le calcul des variances de dispersion $D^2(v\|V)$ lorsque « V » est <u>petit</u> par rapport à la portée du variogramme.		
14	Pour un variogramme sphérique, le choix du palier du variogramme a peu d'impact dans le calcul des variances de blocs σ_v^2 lorsque « v » est <u>petit</u> par rapport à la portée du variogramme.		
15	Plus l'effet de pépite est important, plus le krigeage montre de fortes discontinuités aux points échantillons.		
16	Le krigeage ordinaire est sans biais global, et ce, indépendamment du fait que l'on ait, ou pas, le bon modèle de variogramme.		
17	Une procédure d'échantillonnage sans biais mais ne respectant pas les règles de Gy aura comme impact de réduire la portée du variogramme.		
18	Une procédure d'échantillonnage sans biais mais ne respectant pas les règles de Gy aura comme impact d'augmenter l'effet de pépite.		
19	Un bon outil de validation du variogramme est de calculer le variogramme expérimental sur les valeurs krigées. On s'attend alors à ce que celui-ci corresponde au modèle utilisé pour le krigeage.		
20	Lorsque l'on calcule les variogrammes expérimentaux d'un gisement en 3D il est souhaitable, autant que possible, de calculer le variogramme dans les directions et plongées prises par quelques forages.		

Question 3 (20 points)

Soit le diagramme suivant montrant l'emplacement de quatre données (x_1 à x_4) où l'on a mesuré la teneur en Fe. On désire effectuer un krigeage ordinaire au point x0 situé en (0,0). Le variogramme est sphérique et anisotrope. Les directions principales sont x (portée de 20 m) et y (portée de 40 m). L'effet de pépite est de 5%^{2}, le « C » du sphérique est de 50%^{2} (palier total 55%^{2}).



12 points a) *Fournissez, sous forme matricielle, les équations du* <u>*krigeage ordinaire*</u> *du point x_0 avec les points x_1 à x_4.* <u>*Ne solutionnez pas ce système d'équations.*</u>

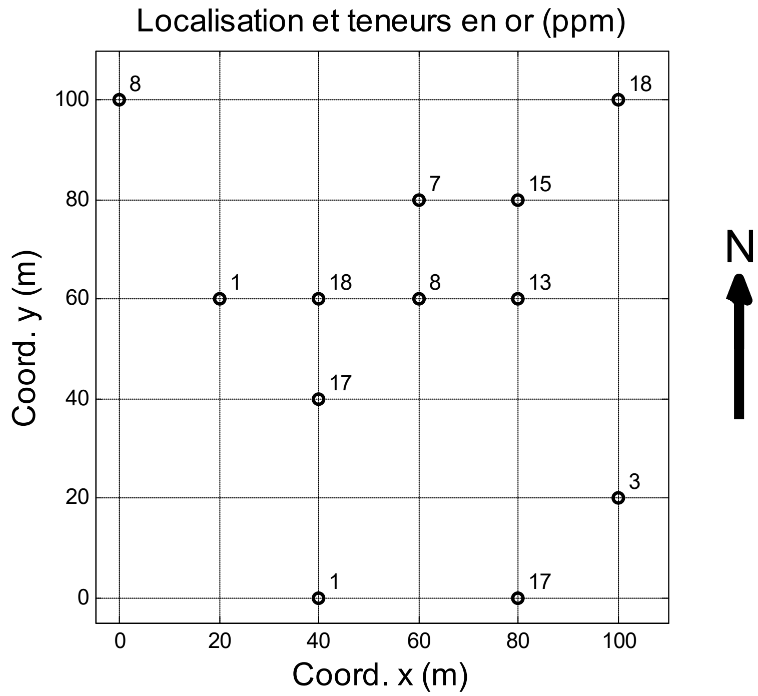
Question 3 (suite)

5 points *b) Si l'on effectuait l'estimation au point x_0 uniquement avec le point x_4, quelle serait la variance de krigeage obtenue?*

3 points *c) Si l'on effectue le krigeage sur une grille très serrée en utilisant à chaque fois uniquement l'observation la plus près du point estimé, à quelle méthode d'estimation correspond alors la surface krigée ?*

Question 4 (15 points)

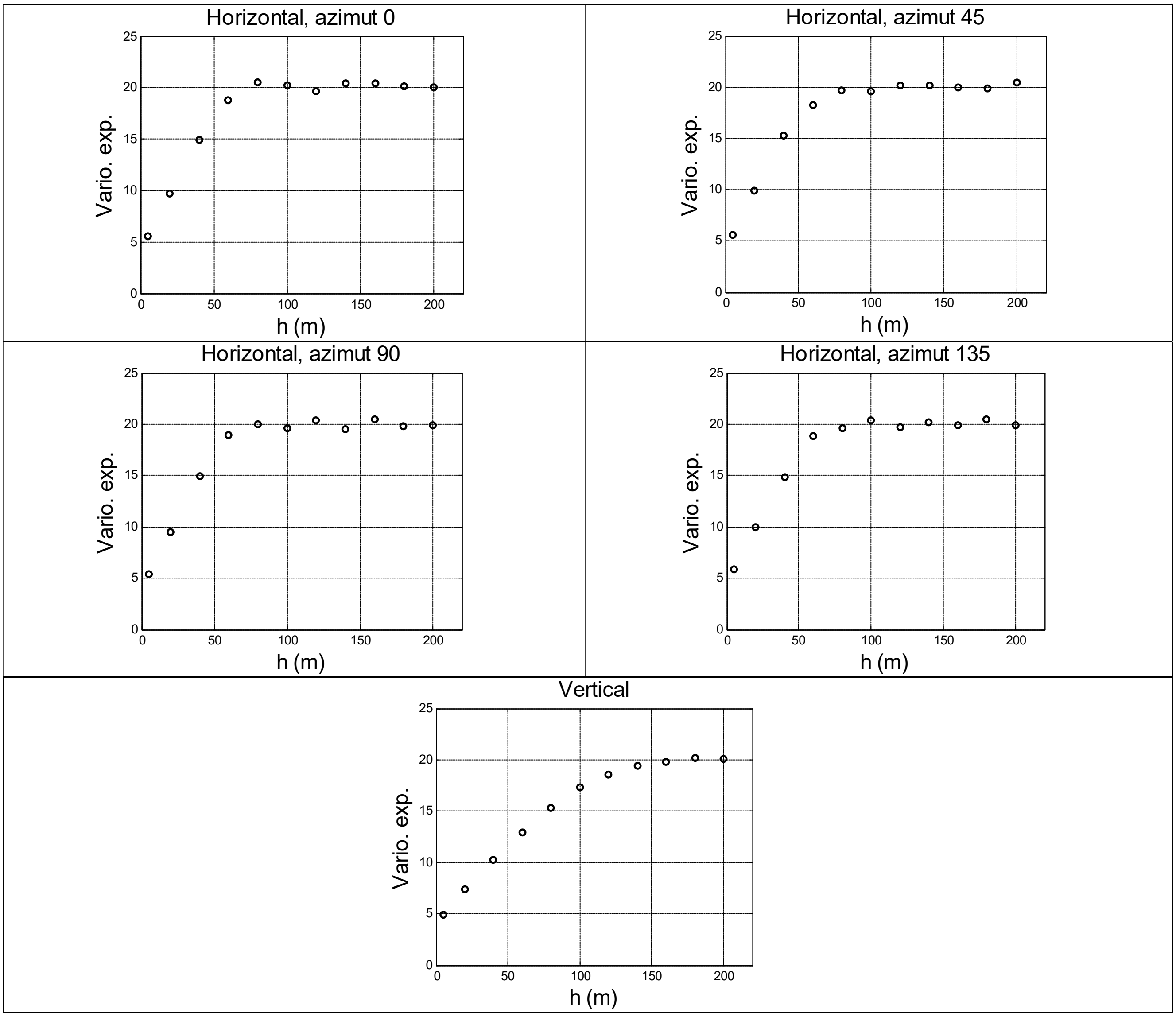
La figure suivante montre une vue en plan donnant la teneur en or (ppm) en certains points.



8 points *a) Quelle est la valeur du variogramme expérimental selon l'azimut 90º pour la seule classe de distance]0, 40] m obtenu en appliquant une tolérance angulaire de 0.1º?* (indiquez toutes les paires retenues, le nombre de paires, la valeur du variogramme expérimental et la valeur de la distance où représenter ce point).

Question 4 (suite)

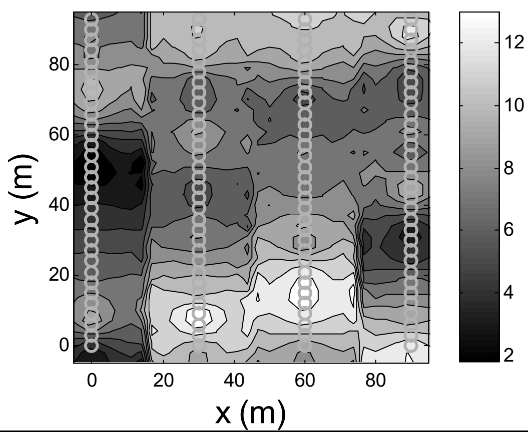
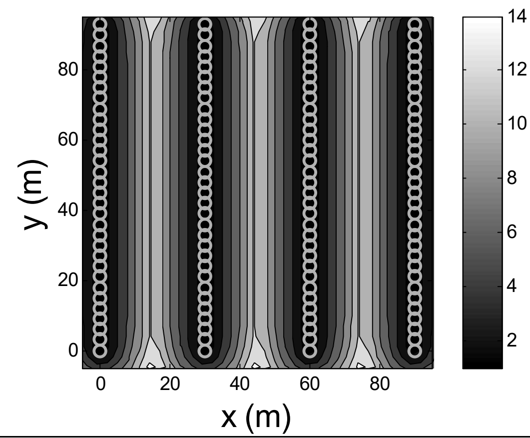
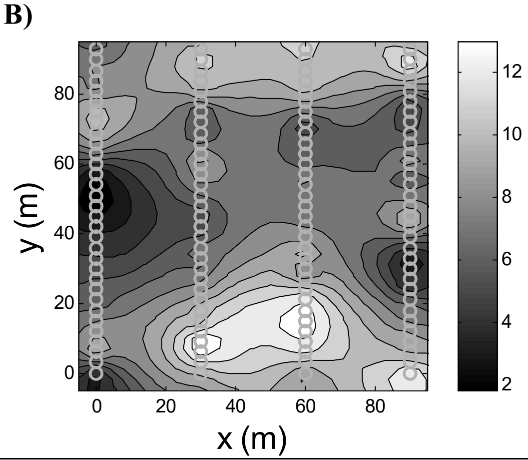
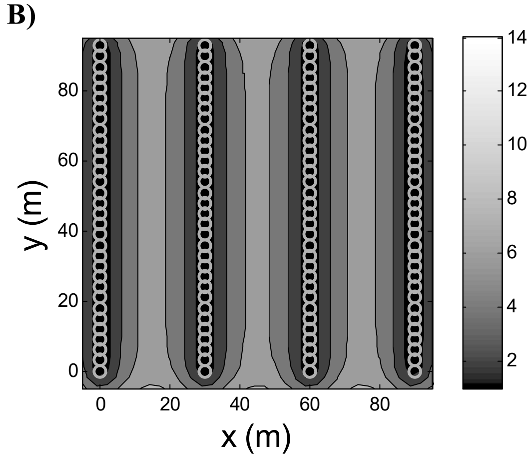
Sur une autre portion de ce même gisement, l'on a obtenu les cinq variogrammes directionnels suivants. La direction géologique préférentielle est la verticale. Chaque variogramme a été calculé suivant la direction indiquée et en appliquant une tolérance angulaire de 5°.



7 points *b) suggérez un modèle de variogramme en <u>3D</u> s'ajustant simultanément à ces variogrammes directionnels. Indiquer le type (nom) du modèle, les paramètres C_0 et C et la ou les portées à utiliser.*

Question 5 (10 points)

La figure suivante présente en A) et B) le résultat du krigeage ordinaire obtenu en utilisant deux voisinages différents (à gauche l'estimation, à droite la variance de krigeage). Les données des forages sont indiquées par des 'o'. Le même modèle de variogramme a été utilisé dans les deux cas.

Carte des valeurs estimées	**Cartes des variances de krigeage**
A) 	**A)** 
B) 	**B)** 

Quelle carte devrait-on retenir A) ou B) ? Pourquoi ? Indiquez tout problème détecté sur l'une ou l'autre des deux cartes.

Question 6 (10 points)

Une carrière est utilisée pour produire du ciment. La carrière est exploitée simultanément <u>en trois zones distinctes considérées indépendantes</u>. Chaque zone nourrit simultanément la cimenterie en quantité égale de roche. Le volume total de roche acheminé quotidiennement à la cimenterie est de 1500 m^3 (soit environ, à la carrière, trois blocs de 10m x10m x 5m (en x,y,z; z la profondeur). Le variogramme ponctuel <u>3D</u> du C3S (le principal constituant du ciment) est sphérique, anisotrope avec C_0=10%^{2}, C=120%^{2} et $a_{horizontal}$= 80 m et $a_{vertical}$= 10 m. On a le même variogramme dans chaque zone.

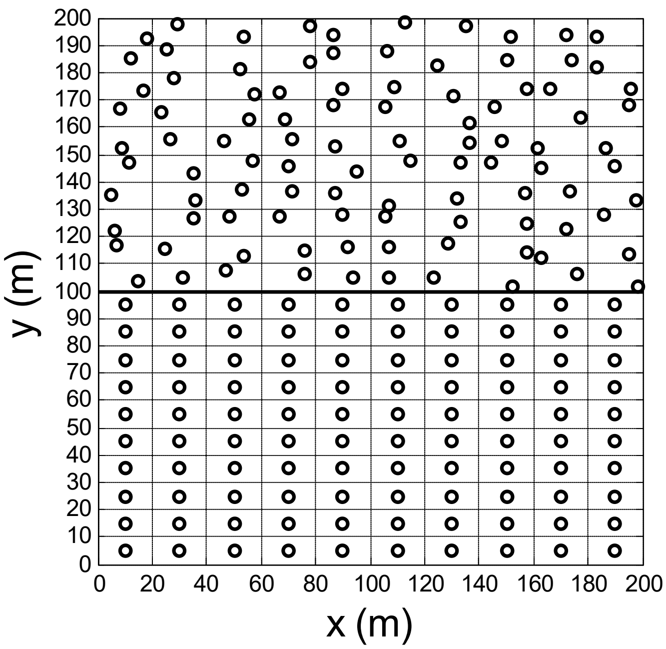
5 points *a) Quelle est la variance, sur une très longue période de temps, de la teneur quotidienne en C_3S entrant à la cimenterie avec l'exploitation actuelle ?*

La compagnie considère que la variance calculée en a) est trop élevée, ce qui réduit la qualité de son ciment. Elle évalue la possibilité d'utiliser une pile de pré-homogénéisation d'une capacité de 37500 m^3, la pile étant approvisionnée par la carrière de la même façon que la cimenterie l'est actuellement. On peut donc considérer que le volume de la pile de pré-homogénéisation représente à la carrière trois blocs indépendants de 50m x 50m x 5m.

5 points *b) Que devient la variance sur une très longue période de temps de la teneur quotidienne en C_3S entrant à la cimenterie ?*

Question 7 (15 points)

Une mine de Cu en 2D présente un variogramme <u>ponctuel</u> sphérique isotrope avec $C_0=3\%^2$, $C=14\%^2$ et a=50 m. On estime la teneur en Cu d'un banc de la mine à l'aide du patron d'échantillonnage suivant :



Calculez la variance d'estimation globale pour la teneur moyenne en Cu sur ce banc.

Corrigé

Q1- Var(e) = (1+16*E(1/6)+30*E(1/12))/24 = (1+16*0.04+30*0.02)/24=0.093 $\%^2$ (Abaque Fig. 4)

Q2-

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
V	F	F	F	V	V	V	V	V	V	F	V	V	F	V	V	F	V	F	V

Q3-

$$\begin{vmatrix} 55.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 0.00 & 55.00 & 15.63 & 0.00 & 1.00 \\ 0.00 & 15.63 & 55.00 & 0.00 & 1.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 55.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 0.00 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \\ p4 \\ mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.00 \\ 15.63 \\ 5.81 \\ 0.00 \\ 1.00 \end{vmatrix}$$

a) Cov(Z2,Z3) = Cov(Z0,Z2) = 50*(1-1.5*0.5 + 0.5*0.5^3) = 15.625 (car 10/20=20/40=0.5)
Cov (Z0,Z3)
- angle theta : atan(10/20)=26.56
- portée_theta : 31.62 m
-distance=$(500)^{0.5}$ = 22.36 m
50*(1-1.5*(22.36/31.62)+0.5*(22.36/31.62)^3) =5.81
Tous les autres sont 0 car h>portée.

b) on aurait alors p4=1, cov(Z0,Z4)=0 et var(e) = 55 + 55 =110 $\%^2$

c) méthode polygonale

4- a) On trouve 4 paires à 20 m : 1-18, 18-8, 8-13, 7-15 et 3 paires à 40 m : 1-8, 18-13, 1-17.
Donc N(h)=7. La distance moyenne est 4/7*20+3/7*40=28.57 m et gamma(h)= 57.71 ppm^2

b) Modèle sphérique avec anisotropie géométrique. C_0=4 ppm^2, C=16 ppm^2, $a_{horizontal\,=}$ 80 m, $a_{vertical}$ = 160 m, axe majeur selon la verticale et isotrope dans le plan horizontal.

5- B) est mieux. En A) on voit des discontinuités entre les forages causées par un mauvais choix du voisinage lors du krigeage (artefact).

6- a) C'est $\sigma_v^2/3$, or σ_v^2 = C(1-F(5/10,10/80)) = 120*(1-0.27)= 87.6, donc 87.6/3= 29.2 $\%^2$ (Abaque 3)

b) Idem à a) sauf que le bloc equivalent à la pile est maintenant 50 x 50 x 5, donc

$\sigma_v^2/3$= 120/3*(1-F(5/10,50/80)) =40*(1-0.55) = 18$\%^2$

7- On a 2 zones distinctes de même surface totale donc :
appelons zone 1 celle du haut et zone 2 celle du bas
Var(e_g) = (Var(e_1)+Var(e_2))/4
Var(e_1) = D^2(.|v)/100 = (3+14*F(20/50,10/50))/100 = (3+14*0.24)/100 = 0.0636 (Abaque 2)
Var(e_2) = Var($e_{un\ bloc}$)/100 = (3+14*E(20/50,10/50))/100 = (3+14*0.115)/100 = 0.0461 (Abaque 5)

Var(e_g) = (0.0636+0.0461)/4 = 0.0274

École Polytechnique
Département des génies civil, géologique et des mines (CGM)

GLQ3401-3651 - GÉOSTATISTIQUE et GÉOLOGIE MINIÈRES

2e contrôle périodique - Automne 2013

Date : 31 octobre 2013
Heure : 13h45 à 16h15

Deux feuilles de documentation recto-verso permises.
Toutes les calculatrices sont permises.
Vous répondez directement sur le formulaire.
Le professeur ne répond pas aux questions durant l'examen. Si vous trouvez une question moins claire, indiquez votre interprétation.
Utilisez le verso si vous manquez d'espace. Écrivez lisiblement.
Vous déposez vos téléphones et autres appareils électroniques à l'avant ou à l'arrière de la classe.

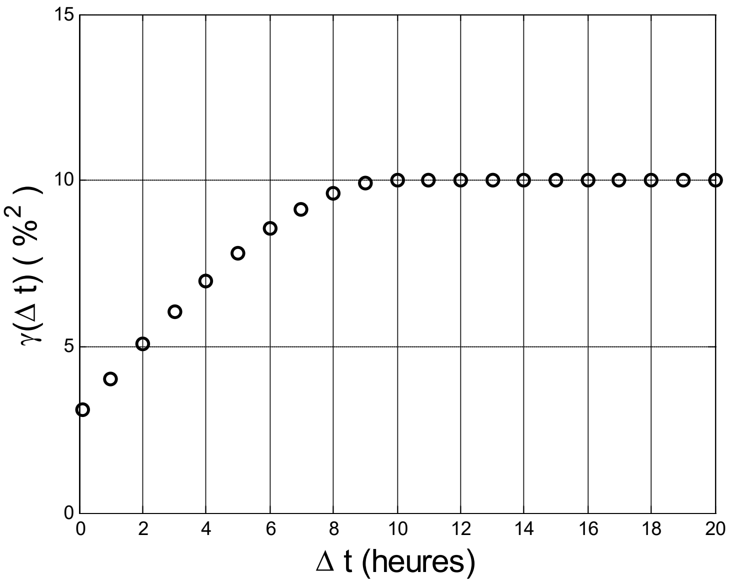
L'examen comporte 8 questions totalisant 100 points : 15 points pour Q1, Q5, Q7 et Q8, et 10 points pour les autres questions.

Nom de l'étudiant : ____

Signature : ____________________________ Matricule : ______________________

Question 1 (15 points)

Un des composés déterminant la qualité du ciment est le C3S (abréviation pour Ca_3SiO_4, exprimé en %) qui contrôle la résistance initiale du ciment. Lafarge (St-Constant) dispose d'un échantillonneur automatique qui prélève un échantillon ponctuel à toutes les heures et détermine la valeur du C3S de l'échantillon. Ces données sont utilisées pour calculer un variogramme (temporel) du C3S. La figure suivante montre le variogramme expérimental obtenu. Un client important achète la production de ciment d'une journée complète. Il désire un C3S moyen d'au moins 54% pour le ciment acheté. La moyenne des 24 échantillons prélevés par Lafarge durant cette journée donne C3S=55%. On suppose que l'erreur d'estimation pour la teneur moyenne sur une période de 24 heures suit une distribution normale (Table normale fournie en annexe).



5 pts *a) Quel est le modèle de variogramme (type et paramètres) qui permet un ajustement adéquat au variogramme expérimental? Indiquez clairement les* <u>*unités*</u> *des paramètres fournis.*

6 pts b) *Quelle est la variance d'estimation de la teneur moyenne en C3S pour une journée ?*

Question 1 (suite)

4 pts *c) Quelle est la probabilité que le ciment fourni par Lafarge montre en réalité une valeur moyenne en C3S inférieure à 54% ?*

Question 2 (10 points)

Un gisement d'or 2D montre un variogramme sphérique avec anisotropie géométrique. La direction (azimut) de meilleure continuité spatiale est 30^0. Les paramètres du modèle sont C_0=10 ppm^2, C=20 ppm^2, a_{30}=50 m, a_{120}=25m.

On désire effectuer le krigeage de la teneur au point de coordonnée (100,100). On retrouve dans le voisinage immédiat de ce point les données fournies au tableau suivant :

Observation #	Coordonnée x (m)	Coordonnée y (m)	Teneur (ppm)
1	80	90	10
2	95	105	4
3	103	104	7
4	107	92	3

Le système de krigeage ordinaire est construit en plaçant dans l'ordre les observations 1 à 4 :

$$\begin{bmatrix} 30 & A & 2.43 & 0.09 & 1 \\ B & C & 11.17 & 2.68 & 1 \\ 2.43 & 11.17 & 30 & 8.29 & 1 \\ 0.09 & 2.68 & 8.29 & 30 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.82 \\ 11.94 \\ 16.95 \\ 8.43 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7 pts *a) Que valent les entrées A à E ?*

Question 2 (suite)

3 pts *b) On vous informe que la 2^e donnée (et seulement celle-ci) a été obtenue suivant une procédure d'analyse moins précise qui ajoute une erreur indépendante de variance 3 ppm^2 au résultat de l'analyse. Que doit-on modifier dans le système de krigeage en a) pour tenir compte de cette information?*

Question 3 (10 points)

Une compagnie minière de fer envisage l'utilisation d'une pile pour homogénéiser son minerai. Le variogramme ponctuel en 3D du gisement montre une anisotropie géométrique. Le modèle est sphérique avec a_x=a_y=200m et a_z=50m; C_0=5%^{2} et C=90%^{2}. Le modèle est isotrope dans le plan horizontal.

La compagnie considère l'utilisation de deux types de pile :

- une pile de type circulaire de capacité 48Kt (bloc de 40m x 40m x 10m à la mine)
- une pile de type linéaire de capacité 210Kt (bloc de 83.7m x 83.7m x 10m à la mine)

Les deux piles seraient bien conçues en ce sens qu'elles permettraient d'homogénéiser très bien les teneurs à l'intérieur d'une même pile.

Soit l'énoncé suivant :

La pile de type linéaire assurera des teneurs homogènes pour une période « a » fois plus longue que la pile de type circulaire. Pour la pile de type linéaire, les changements de pile survenant durant l'exploitation causeront, sur une longue période, une variance de la teneur égale à « b » fois celle de la pile de type circulaire.

Que valent « a » et « b » dans cet énoncé ?

Question 4 (10 points)

4 pts a) *Décrivez l'impact sur les variogrammes expérimentaux d'erreurs de localisation des observations.*

3 pts b) *Dans un contexte minier (3D),*

i. pourquoi est-il généralement préférable de calculer les variogrammes expérimentaux selon les orientations (i.e. direction et plongée) coïncidant avec les orientations des forages ?

ii. quel problème peut se poser avec cette approche lorsqu'une anisotropie géométrique est suspectée ?

3 pts *c) Un variogramme sphérique isotrope montre C_0= 3%² et C=7%². Quelle est la valeur moyenne attendue de la différence au carré entre les teneurs de deux points très proches spatialement ?*

Question 5 (15 points)

Un site contaminé au Pb montre **un** modèle de variogramme 2D formé par la somme de 3 composantes différentes :

Composante	C (ppm^2)	a_g (m) , θ_g (azimut)	a_p (m) , θ_p (azimut)
Effet pépite	120	-	-
Sphérique 1	580	1000, 87°	300, 177°
Sphérique 2	1200	400, 42°	200, 132°

où θ_g est la direction de meilleure continuité et θ_p est la direction de moindre continuité.

9 pts *a) Selon l'azimut 30°, à partir de quelle distance séparant deux points les teneurs en Pb sont-elles non-corrélées ?*

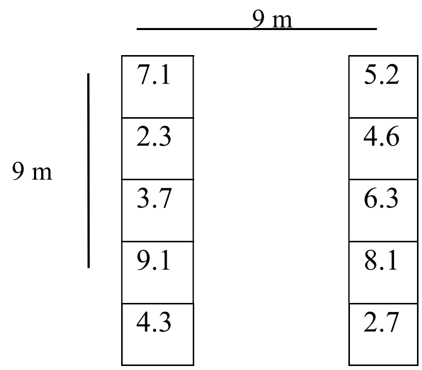
Question 5 (suite)

6 pts b) En supposant les autres paramètres inchangés, quelle serait la conséquence, par rapport à la situation actuelle, d'avoir <u>*un effet de pépite supérieur à 120 ppm^2*</u> *sur :*

i. la variance de bloc;
ii. la variance d'estimation;
iii. la variance de dispersion d'un point dans un bloc.

Question 6 (10 points)

On vous indique deux portions de forage sur lesquelles sont indiquées les teneurs en Au (ppm) pour des carottes de 3m. Les 2 forages sont espacés exactement de 9 m de centre à centre (le dessin n'est pas à l'échelle).



Calculez le variogramme expérimental <u>*omnidirectionnel*</u> *(i.e. sans tenir compte de la direction) à la distance h=9 m exactement en prenant soin d'indiquer toutes les paires utilisées.*

Question 7 (15 points)

On a observé les teneurs aux 4 points suivants (problème 2D) :

point	Coord. x (m)	Coord y (m)	teneur Z(x) (%)
x_1	0	0	2.7
x_2	5	0	4.1
x_3	0	10	1.5
x_4	10	0	3.2

Le variogramme est sphérique avec paramètres C_0=1%^{2} , C=2%^{2} et a=10m. Le système de krigeage simple s'écrit (les entrées dans la matrice sont dans l'ordre x_1 à x_4):

$$\begin{vmatrix} A & B & 0 & 0 \\ B & 3 & C & 0.625 \\ 0 & C & 3 & 0 \\ 0 & 0.625 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D \\ E \\ F \\ G \end{vmatrix}$$

6 pts *a) Complétez le système de krigeage simple (lettres A à G) pour l'estimation au point x_0= (5,0).*

2 pts *b) Fournissez les poids de krigeage λ_1 à λ_4.*

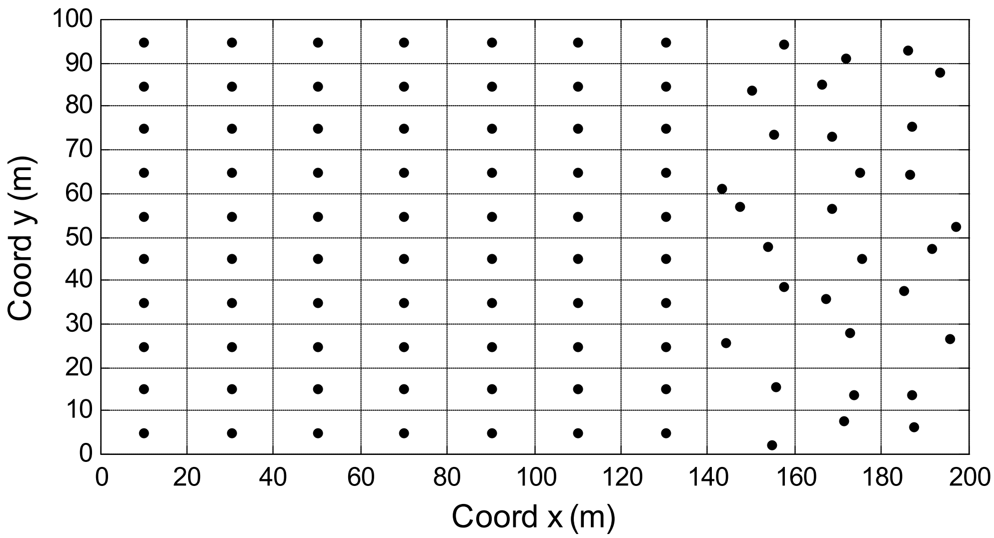
Question 7 (suite)

2 pts *c) Calculez la valeur estimée par krigeage $Z(x_0)^*$ (avec $m_z = 3\%$) et la variance de krigeage simple.*

5 pts *d) Au lieu d'estimer le point x_0, on estime un point x_{0+} situé à une <u>très petite</u> distance du point $x_0 = (5,0)$. Parmi les lettres A à G, indiquez toutes les valeurs qui changent significativement.*

Question 8 (15 points)

Un banc d'un gisement de Cu montre un variogramme 2D ponctuel isotrope de type sphérique avec $C_0=3\%^2$ et $C=11\%^2$ (modèle A) et a=20 m. On estime la teneur moyenne pour la zone décrite à la figure suivante à partir des teneurs connues aux points échantillons indiqués sur la figure:



10 pts *a) Quelle est la variance d'estimation de la teneur moyenne pour l'ensemble de la zone?*

Question 8 (suite)

5 pts *b) Une validation croisée avec ces données et le modèle A a montré les statistiques indiquées dans la colonne « modèle A » du tableau suivant. Complétez le tableau pour les statistiques de validation croisée que l'on obtiendrait avec les modèles B et C. N'indiquez que les valeurs pour lesquelles il est possible de prévoir le résultat exactement. Indiquez « np » pour les statistiques non-prévisibles avec les seuls éléments fournis. (Note : e_i est l'erreur d'estimation de la donnée « i », $\sigma^2_{k,i}$ est la variance de krigeage pour la donnée « i » lorsque la donnée « i » est estimée par les autres données.*

Statistique	*Modèle A, sphérique avec C_0=3%², C=11%², a=20m*	*Modèle B, sphérique avec C_0=4.5%², C=16.5%², a=20 m*	*Modèle C, sphérique avec C_0=4.5%², C=16.5%², a=30 m*
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i$	*-0.2%*		
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^{\,2}$	*3%²*		
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{e_i^{\,2}}{\sigma^2_{k,i}}$	*0.667*		
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\mid e_i \mid}{\sigma_{k,i}}$	*0.9*		

Annexes

Fonction de répartition N(0,1) : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

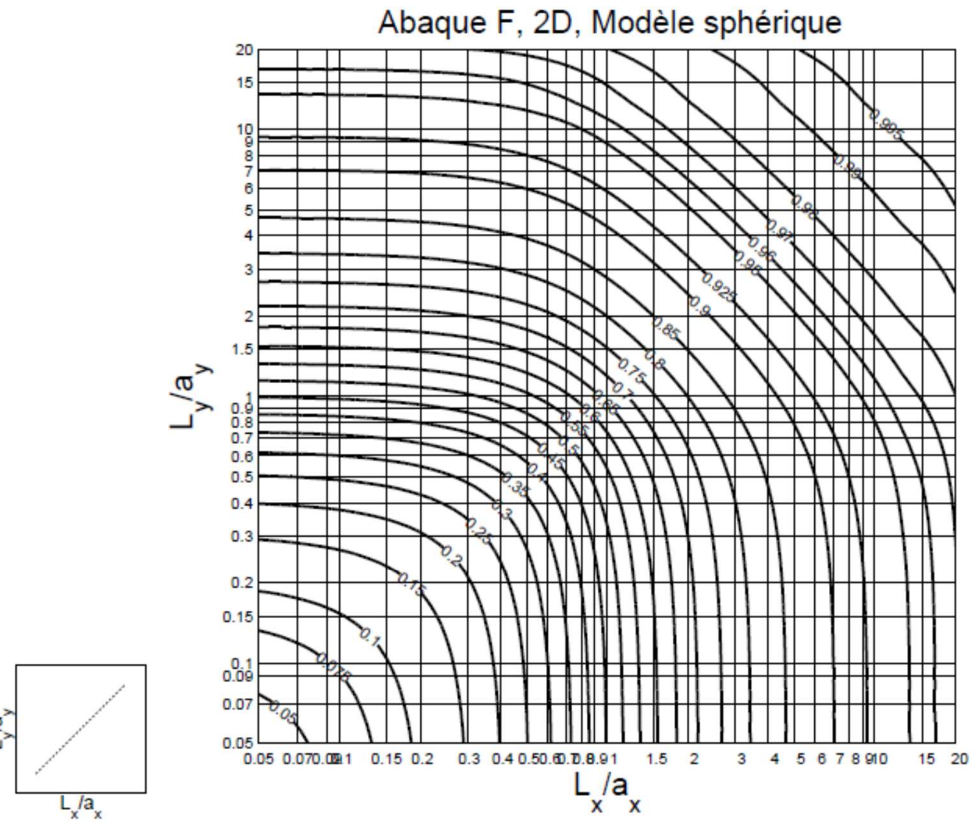


Fig. 2. Variance d'un point dans un rectangle, variogramme sphérique de palier C=1; $F(L_x/a_x, L_y/a_y) = D^2(\bullet|v) = \bar{\gamma}(v,v) = (1 - \bar{C}(v,v))$

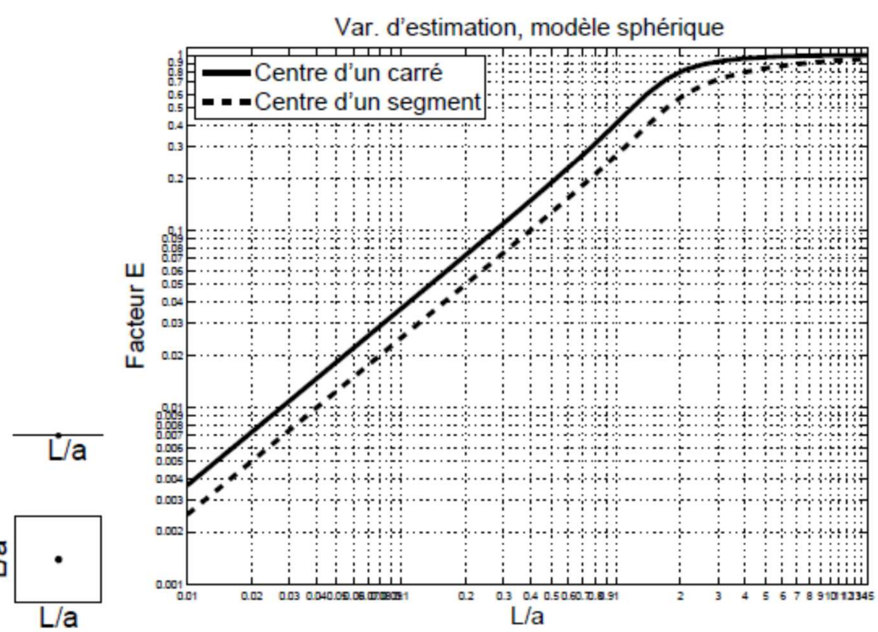


Fig. 4. Variance d'estimation: un segment ou un carré estimé par son point central

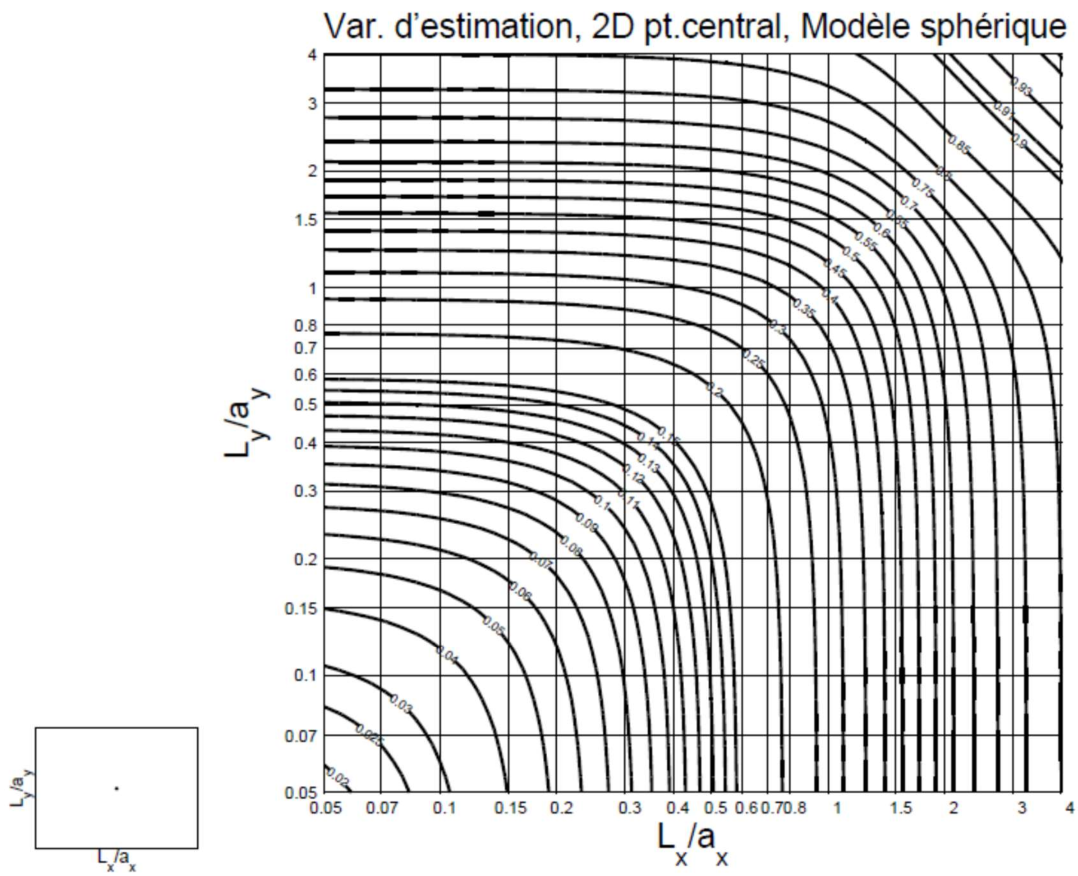


Fig. 5. Variance d'estimation: un rectangle estimé par son point central

Corrigé

1- a) Variogramme sphérique avec $C0=3\%^2$, $C=7\%^2$ et a=10 heures.
b) Var(e)= (3+7*E(1/10))/24 = 0.132
c) $P(Z<54|Z^*=55) = P(e< -1) = P(N(0,1)<-1/(0.132)^{0.5})=P(N(0,1)<-2.75=1-0.997=0.003$

2- a) $h_{12} = 450^{0.5} = 21.21$ m
azimut(x1-x2) = 45° => theta=15°
$a_{theta} = (50*25)/(50^2 \sin(15)^2+25^2 \cos(15)^2)^{0.5} =45.63$m
$A=B= 20(1-(1.5*21.21/45.63-0.5*(21.21/45.63)^3))=7.06$
C=30,D=1,E=0

b) on pose C=30+3=33. C'est tout ce qui change.

---

3) $a=210/48=83.7^2/40^2 = 4.38$
b= var(v=83.7 x 83.7)/var(v=40 x 40)=[1-F(83.7/200,83.7/200)]/[1-F(40/200,40/200)]=(1-0.32)/(1-0.15) = 0.8

4a) Augmenter l'effet de pépite apparent sur les variogrammes
b) i. Pour avoir suffisamment de paires et pour avoir des distances mesurées sans erreur.
ii. On peut manquer de directions différentes pour pouvoir détecter et modéliser une éventuelle anisotropie.
iii. $2*C_0=6\ \%^2$

5a) on calcule la portée selon l'angle que forme 30° avec a_g et l'on prend la valeur maximale.

spher 1 : theta =57° => a_{theta} = 351 m
spher 2 : theta=12° => a_{theta} = 376 m, donc 376 m.

b) i. variance de bloc inchangée
ii. variance d'estimation va augmenter
iii. va augmenter de la va différence entre 120 et la nouvelle valeur.

6- ((7.1-5.2)^2+(2.3-4.6)^2+(3.7-6.3)^2+(9.1-8.1)^2+(4.3-2.7)^2+(7.1-9.1)^2+(2.3-4.3)^2+(5.2-8.1)^2+(4.6-2.7)^2)/18=2.18 ppm^2

7-
a) $A=3\%^2$, $B=0.625\ \%^2$, $C=0\ \%^2$, $D=B=0.625\ \%^2$, $E=3\%^2$, F=0, $G=0.625\%^2$
b) tous 0 sauf lambda2 qui vaut 1
c) Z*=4.1% et variance de krigeage = 0.
d) seul E change et devient $2\%^2$ au lieu de $3\%^2$

---

8 a) gauche : (3+11*0.31)/70= 0.092
droite : (3+11*0.55)/30=0.3017
global : $(70^2(.092)+30^2(0.3017))/100^2= 0.0722$

b)

Statistique	*Modèle A, sphérique avec $C_0=3\%^2$, $C=11\%^2$, $a=20m$*	*Modèle B, sphérique avec $C_0=4.5\%^2$, $C=16.5\%^2$, $a=20$ m*	*Modèle C, sphérique avec $C_0=4.5\%^2$, $C=16.5\%^2$, $a=30$ m*
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i$	*-0.2%*	*-0.2%*	*np*
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {e_i}^2$	$3\%^2$	$3\%^2$	*np*
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{{e_i}^2}{\sigma_{k,i}^2}$	*0.667*	*0.667/1.5=0.445*	*np*
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\lvert e_i \rvert}{\sigma_{k,i}}$	*0.9*	$0.9/1.5^{0.5}=0.735$	*np*