*MEC6212 : Génération de maillages*

# *MÉTHODES ELLIPTIQUES*

**Ricardo Camarero**
**Département de génie mécanique**
5 février 2024

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

*Motivation et contexte*

*Concepts de base et historique*

*Modélisation géométrique*

**Maillages structurés :**

- *Maillages curvilignes*
- *Interpolation transfinie*
- **Méthodes EDP : Elliptiques**
- *Concentration de mailles*

*Maillages non-structurés :*

- *Triangulation de Delaunay*
- *Maillages Delaunay contraints*
- *retournement d'arêtes*
- *Méthode d'avance de front*

*Maillages hybrides :*

- *décomposition spatiale : multiblocs, hiérarchique.*

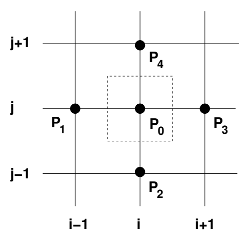


## *Table des matières*

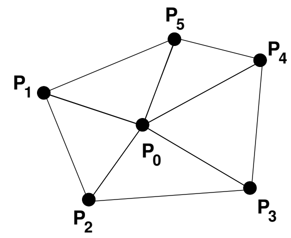
## Maillages curvilignes

**Maillages structurés** *les noeuds sont ordonnés selon une grille composée de deux familles de courbes qui sont ajustées aux frontières du domaine.*

**Structuré**




**Non structuré**




**Patron régulier**

- *permet un addressage direct qui facilite le "calcul" ou l'identification des voisins à partir du noeud lui-même ;*
- *donne une grande efficacité sur le plan du calcul ainsi que de la mémoire.*





## Maillages valides

1. **Les équations de maille d'un maillage curviligne peuvent être obtenues par des :**
   - *expressions algébriques explicites ;*
   - *techniques d'interpolation transfinie.*
2. **Ces différentes méthodes ont des limites.**
3. **Un modèle de maille curviligne valide doit vérifier que les lignes (surfaces en 3D) du maillage :**
   - *ne se croisent pas ;*
   - *sont bornées par, et coincident avec les frontières du domaine ;*
   - *varient de façon monotone entre chaque paire de frontières opposées du domaine.*





## Un nouveau modèle de maille

1. **Ces objectifs peuvent être atteints grâce aux propriétés de lissage des opérateurs elliptiques tout en assurant l'unicité du maillage.**
2. **Cette approche permet d'éviter certaines difficultés rencontrées avec l'interpolation transfinie.**
3. **Un maillage curviligne est généré dans l'espace paramétrique, $u^j$, comme un maillage régulier cartésien, et ensuite transposé dans l'espace physique, $x_i$, par une relation de la forme :**

$$x_i = x_i(u^1, u^2, u^3)$$

**qui est la solution d'un système d'équations différentielles :**

- *Méthodes EDP : elliptique, hyperboliques ....*
- *Techniques variationnelles*

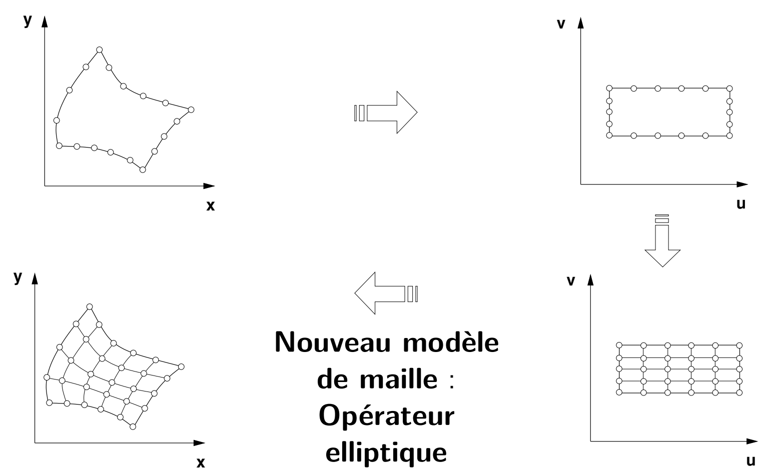




## Génération du maillage

**On utilise la même démarche que pour les maillages transfinis :**

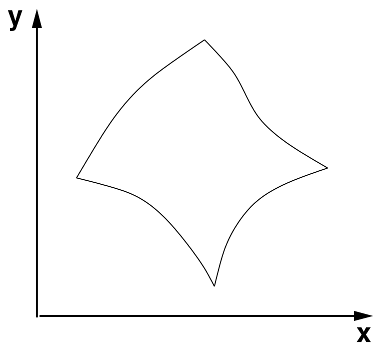
- *la géométrie du domaine est transposée vers l'espace paramétrique ;*
- *les calculs sont entièrement réalisés dans l'espace paramétrique.*



## *Analogie thermique*

**Soit un domaine borné par quatre cotés.**

- *On pose que les lignes d'un maillage curviligne peuvent être obtenues comme le réseau d'isothermes résultant de la solution d'un problème thermique.*
- *On calcule un champ de température où une paire de cotés est posée adiabatique tandis que la seconde paire est posée à un différentiel de température.*



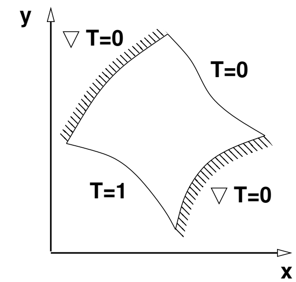





**On obtient un réseau de lignes de maillage, par la résolution de deux problèmes thermiques distincts :**

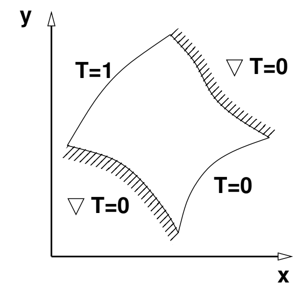
La première famille de lignes de maillage découle du champ de température $\eta$ obtenu par la résolution de,

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=0$$




La seconde famille de mailles est obtenue de la même façon, mais en inversant les conditions frontières adiabatiques et de Dirichlet.

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau}{\partial y^2}=0$$








## *Formulation des équations de maille*

**Le problème de génération de mailles devient un problème différentiel aux valeurs frontières où les coordonnées curvilignes $\xi^i$, ($\xi^1=\tau$ et $\xi^2=\eta$), sont obtenues par la solution de :**

$$\nabla^2\xi^i=0 \quad i=1,2$$

**avec les conditions limites suivantes :**

| Frontière : | Variable $\xi^1$ | Variable $\xi^2$ |
|---|---|---|
| $\Gamma_1$ (premier coté) | $\xi^1(x,y)=0$ | $\partial\xi^2(x,y)/\partial\eta=0$ |
| $\Gamma_2$ (deuxième coté) | $\xi^1(x,y)=1$ | $\partial\xi^2(x,y)/\partial\eta=0$ |
| $\Gamma_3$ (troisième coté) | $\partial\xi^1(x,y)/\partial n=0$ | $\xi^2(x,y)=0$ |
| $\Gamma_4$ (quatrième coté) | $\partial\xi^1(x,y)/\partial n=0$ | $\xi^2(x,y)=1$ |





## *Propriétés*

**À cause des propriétés des équations de Laplace, découlant de la nature de l'analogie physique, le réseau d'isothermes aura les caractéristiques voulues :**

- *unicité, conformité des frontières et régularité (lissage),*
- *un recouvrement sans chevauchement ou de croisement,*
- *les lignes de maillages demeurent à l'intérieur du domaine.*

**Cependant, pour des géométries quelconques, ces problèmes,**

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} &= 0\\ \frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau}{\partial y^2} &= 0\end{aligned}$$

**ne peuvent être résolus que par des méthodes numériques, ce qui nécessite un maillage du domaine.**

**Hors, c'est précisément le problème de départ !**

## Inversion des variables

1. **Cette difficulté est contournée par l'inversion des variables dépendantes et indépendantes.**

$$(x, y) \rightarrow (\eta, \tau)$$

2. **L'équation du modèle de maille,**
   - *ne sera pas résolue dans l'espace physique mais plutôt dans l'espace des "températures", ou plus formellement dans l'espace paramétrique ;*
   - *ainsi re-formulée, revient à chercher les points $(x, y)$ de l'espace physique correspondant aux deux "températures" $(\eta, \tau)$, plutôt que résoudre les "températures" $(\eta, \tau)$ en fonction des points $(x, y)$.*

3. **Ce qui équivaut à une inversion des variables dépendantes et indépendantes ;**

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \tau = \tau(x, y) & & x = x(\eta, \tau) \\ & \rightarrow & \\ \eta = \eta(x, y) & & y = y(\eta, \tau) \end{array}}$$





## Changement de variables

$$\vec{\xi}(\vec{x}) \rightarrow \vec{x}(\vec{\xi})$$

**où** $\vec{\xi} = (\xi^1, \xi^2)$ **et** $\vec{x} = (x_1, x_2)$.

**En appliquant la règle de dérivation en chaîne :**

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \xi^j} \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} \quad , i = 1, 2$$

**et, en substituant dans,**

$$\nabla^2 \xi^i = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x_j^2} = 0 \quad , i = 1, 2$$

**on obtient,**

$$\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} g^{ij} \frac{\partial^2 x_l}{\partial \xi^i \partial \xi^j} = 0 \quad , l = 1, 2$$





## Dévelopement détaillé

**En explicitant,**

$$\vec{\xi} = (\xi^1, \xi^2) = (\eta, \tau) \text{ et } \vec{x} = (x_1, x_2) = (x, y) \ ,$$

**la dérivation en chaîne par rapport à** $x$ **et** $y$**,**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial y} \end{aligned}$$

**appliquée aux variables** $x = x(\eta, \tau)$ **et** $y = y(\eta, \tau)$**, donne,**

$$\begin{aligned} 1 &= x_\eta \eta_x + x_\tau \tau_x \\ 0 &= y_\eta \eta_x + y_\tau \tau_x \\ 0 &= x_\eta \eta_y + x_\tau \tau_y \\ 1 &= y_\eta \eta_y + y_\tau \tau_y \end{aligned}$$

Pour exprimer les relations entre les deux repères de coordonnées $\eta(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x}(\eta)$, on obtient les éléments de la matrice Jacobienne, les dérivées premières de $\eta$ et $\tau$ par rapport à $x$ et $y$,

$$\begin{aligned} x_\eta &= \tau_y/K \\ x_\tau &= -\eta_y/K \\ y_\eta &= -\tau_x/K \\ y_\tau &= \eta_x/K \\ J &= 1/K \end{aligned}$$

où,

$$\begin{aligned} J = \quad & det(\mathcal{J}) = & (x_\eta y_\tau - x_\tau y_\eta) \\ K = \quad & det(\mathcal{K}) = & (\eta_x \tau_y - \tau_x \eta_y) \end{aligned}$$





On écrit les matrices Jacobiennes sous la forme,

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \frac{\partial(x,y)}{\partial(\eta,\tau)} = \begin{bmatrix} x_\eta & x_\tau \\ y_\eta & y_\tau \end{bmatrix} \\ \mathcal{K} &= \frac{\partial(\eta,\tau)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} \eta_x & \eta_y \\ \tau_x & \tau_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ce qui donne pour le produit matriciel,

$$\begin{bmatrix} x_\eta & x_\tau \\ y_\eta & y_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_x & \eta_y \\ \tau_x & \tau_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{J}\mathcal{K} = \mathcal{I}$$





Pour obtenir les dérivées secondes qui apparaîssent aux équations,

$$\begin{aligned} \nabla^2\tau &= 0 \\ \nabla^2\eta &= 0 \end{aligned}$$

on applique la dérivation en chaîne à ces dérivées premières.

On dérive les deux premières équations par rapport à $x$, et les deux dernières par rapport à $y$, donnant,

$$\begin{aligned} 0 &= (x_\eta)_x\eta_x + x_\eta\eta_{xx} + (x_\tau)_x\tau_x + x_\tau\tau_{xx} \\ 0 &= (y_\eta)_x\eta_x + y_\eta\eta_{xx} + (y_\tau)_x\tau_x + y_\tau\tau_{xx} \\ 0 &= (x_\eta)_y\eta_y + x_\eta\eta_{yy} + (x_\tau)_y\tau_y + x_\tau\tau_{yy} \\ 0 &= (y_\eta)_y\eta_y + y_\eta\eta_{yy} + (y_\tau)_y\tau_y + y_\tau\tau_{yy} \end{aligned}$$

les termes $(x_\eta)_x$, $(x_\eta)_y$, $(y_\eta)_x$, $(y_\eta)_y$ .... sont des dérivées de dérivées, aux quelles on applique la dérivation en chaîne donnant les dérivées secondes.





On obtient, en dérivant ces expressions,

$$\begin{aligned} 0 &= x_{\eta\eta}\eta_x^2 + 2x_{\eta\tau}\eta_x\tau_x + x_{\tau\tau}\tau_x^2 + x_\eta\eta_{xx} + x_\tau\tau_{xx} \\ 0 &= y_{\eta\eta}\eta_x^2 + 2y_{\eta\tau}\eta_x\tau_x + y_{\tau\tau}\tau_x^2 + y_\eta\eta_{xx} + y_\tau\tau_{xx} \\ 0 &= x_{\eta\eta}\eta_y^2 + 2x_{\eta\tau}\eta_y\tau_y + x_{\tau\tau}\tau_y^2 + x_\tau\tau_{yy} + x_\eta\eta_{yy} \\ 0 &= y_{\eta\eta}\eta_y^2 + 2y_{\eta\tau}\eta_y\tau_y + y_{\tau\tau}\tau_y^2 + y_\tau\tau_{yy} + y_\eta\eta_{yy} \end{aligned}$$

En additionant la première et troisième équations, et la deuxième et quatrième équations du système ci-dessus, on obtient les équations de maille pour les variables $x$ et $y$, respectivement.

$$\begin{aligned} x_{\eta\eta}(\eta_x^2 + \eta_y^2) &+ 2x_{\eta\tau}(\eta_x\tau_x + \eta_y\tau_y) + x_{\tau\tau}(\tau_x^2 + \tau_y^2) \\ &+ x_\eta(\eta_{xx} + \eta_{yy}) + x_\tau(\tau_{xx} + \tau_{yy}) = 0 \\ y_{\eta\eta}(\eta_x^2 + \eta_y^2) &+ 2y_{\eta\tau}(\eta_x\tau_x + \eta_y\tau_y) + y_{\tau\tau}(\tau_x^2 + \tau_y^2) \\ &+ y_\eta(\eta_{xx} + \eta_{yy}) + y_\tau(\tau_{xx} + \tau_{yy}) = 0 \end{aligned}$$

On note que les coefficients comprennent des dérivées $\eta_x$, $\eta_y$ ... qu'il faut exprimer en dérivées $x_\eta$, $x_\tau$ ....

**A partir des relations entre les éléments des matrices Jacobiennes établies antérieurement,**

$$\mathcal{J}\mathcal{K} = \mathcal{I}$$

**on obtient,**

$$\begin{aligned} J^2(\eta_x^2 + \eta_y^2) &= (x_\tau^2 + y_\tau^2) \\ -J^2(\eta_x\tau_x + \eta_y\tau_y) &= (x_\eta x_\tau + y_\eta y_\tau) \\ J^2(\tau_x^2 + \tau_y^2) &= (x_\eta^2 + y_\eta^2) \end{aligned}$$

**En substituant, et, puisque** $(\eta_{xx} + \eta_{yy}) = 0$ **et** $\tau_{xx} + \tau_{yy} = 0$**, alors,**

$$\begin{aligned} x_{\eta\eta}(x_\tau^2 + y_\tau^2) - 2x_{\eta\tau}(x_\eta x_\tau + y_\eta y_\tau) + x_{\tau\tau}(x_\eta^2 + y_\eta^2) &= 0 \\ y_{\eta\eta}(x_\tau^2 + y_\tau^2) - 2y_{\eta\tau}(x_\eta x_\tau + y_\eta y_\tau) + y_{\tau\tau}(x_\eta^2 + y_\eta^2) &= 0 \end{aligned}$$

**On note que, maintenant, tous les termes différentiels sont exprimés pour les variables physiques** $x = x(\eta, \tau)$ **et** $y = y(\eta, \tau)$**.**





## *L'opérateur de Winslow : $\mathcal{L}$*

**Sous forme vectorielle,**

$$\alpha \begin{bmatrix} x_{\eta\eta} \\ y_{\eta\eta} \end{bmatrix} - 2\beta \begin{bmatrix} x_{\tau\eta} \\ y_{\tau\eta} \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} x_{\tau\tau} \\ y_{\tau\tau} \end{bmatrix} = 0$$

**où les coefficients :**

$$\begin{aligned} \alpha &= J^2(\eta_x^2 + \eta_y^2) &= (x_\tau^2 + y_\tau^2) \\ \beta &= -J^2(\eta_x\tau_x + \eta_y\tau_y) &= (x_\eta x_\tau + y_\eta y_\tau) \\ \gamma &= J^2(\tau_x^2 + \tau_y^2) &= (x_\eta^2 + y_\eta^2) \end{aligned}$$

**Ce qui peut être reformulé en utilisant la notation,**

$$\mathcal{L}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left[\alpha\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - 2\beta\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\tau} + \gamma\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**où** $\mathcal{L}$ **est appelé l'opérateur de Winslow.**











## *Formulation du problème numérique*

**Les équations de maille,** $\mathcal{L}(\mathbf{x})$**, forment un système d'équations couplées et nonlinéaires, qui pour des conditions frontières générales ne peuvent être résolues que par des méthodes numériques.**

**L'approche globale comprend deux étapes :**

1. *la discrétisation des équations différentielles dans l'espace paramétrique,*
2. *la résolution numérique du système d'équations algébriques :*
   - *méthodes directes ;*
   - *méthodes itératives.*

## Discrétisation

**La discrétisation consiste à remplacer les lignes de maillage curvilignes par un nombre discret de $m$ par $n$ noeuds dans les directions $\tau$ et $\eta$, respectivement.**

1. *Les noeuds, $(x, y)$, et les variables associées sont identifiées par les indices $i$ et $j$ :*

$$\begin{aligned} \tau_i &= (i-1)\Delta\tau \quad & 1 \leq i \leq m \\ \eta_j &= (j-1)\Delta\eta \quad & 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

   *où les pas de la discrétisation, $\Delta\tau$ et $\Delta\eta$ sont obtenus par une équi-répartition de l'intervalle :*

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= (\tau_m - \tau_1)/(m-1) \\ \Delta\eta &= (\eta_n - \eta_1)/(n-1) \end{aligned}$$

2. *On identifie la valeur d'une variable, $f$, à un noeud $(i, j)$ par,*

$$f_{i,j} = f(\tau_i, \eta_j)$$





## Différences divisées

**Les dérivées dans les équations différentielles, $\mathcal{L}$, sont remplacées par des différences divisées d'ordre deux :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \tau} &\approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta\tau} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &\approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta\eta} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} &\approx \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta\tau^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} &\approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta\eta^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \tau \partial \eta} &\approx \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta\tau\Delta\eta} \end{aligned}$$

**où $f$ représente les variables $x$ ou $y$.**





## Système algébrique

**La substitution des expressions aux différences divisées dans les équations de maille,**

$$\mathcal{L}(\vec{x}) = \alpha \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \eta^2} - 2\beta \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \eta \partial \tau} + \gamma \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \tau^2} = 0$$

**pour un noeud $(i, j)$ du réseau de l'espace paramétrique, donne une relation algébrique entre les coordonnées $x$ et $y$, et les voisins :**

$$\begin{aligned} \alpha' [x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}] + \gamma' [x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}] & \\ -2\beta' [x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1}] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha' [y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}] + \gamma' [y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}] & \\ -2\beta' [y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j-1}] &= 0 \end{aligned}$$





où,

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})^2}{(2\Delta\tau\Delta\eta)^2} \\ \gamma' &= \frac{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i-1,j})^2}{(2\Delta\tau\Delta\eta)^2} \\ \beta' &= \frac{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})}{(4\Delta\tau\Delta\eta)^2} \\ &\quad + \frac{(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})}{(4\Delta\tau\Delta\eta)^2} \end{aligned}$$

**Comment choisir les pas, $\Delta\tau$ et $\Delta\eta$, de la discrétisation ?**

**Sans perte de généralité, on pose $\Delta\tau = 1$ et $\Delta\eta = 1$**

## *Schémas de résolution*

**➜ En appliquant cette discrétisation à chaque noeud du maillage, on obtient un systèm d'équations algébriques,**

$$\begin{aligned} Ax &= b_x \\ Ay &= b_y \end{aligned}$$

**qui comme son analogue continu est couplé et nonlinéaire à cause des coefficients $\alpha'$, $\gamma'$ et $\beta'$ qui sont fonction des inconnues $x$ et $y$.**

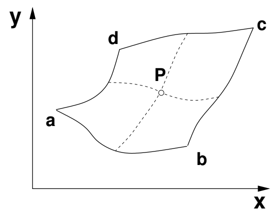
**➜ Le choix d'une méthode de résolution se fait à partir de critères basés sur les aspects et les ressources informatiques, tels que :**

- *temps de calcul et espace mémoire,*
- *taux de convergence,*
- *facilité de programmation.*

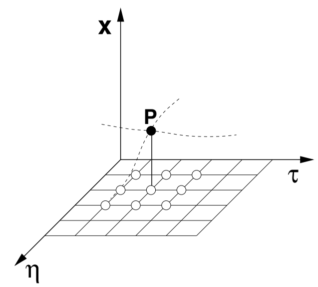




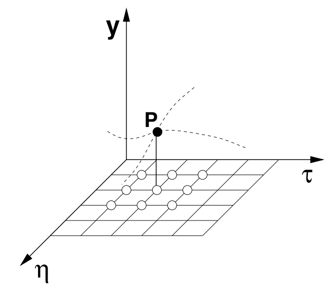
## *Calcul d'un point*




$\mathcal{L}(x) = 0$



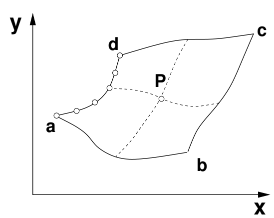

$\mathcal{L}(y) = 0$



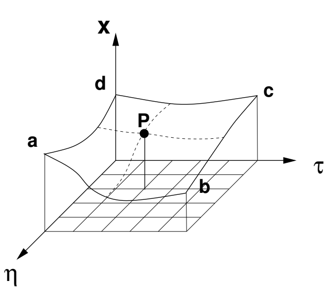




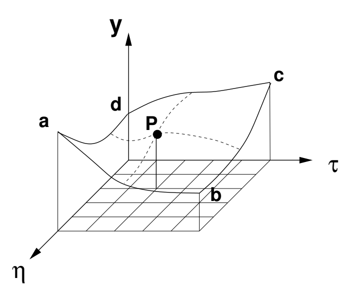

## *Conditions frontières*




$\mathcal{L}(x) = 0$




$\mathcal{L}(y) = 0$








| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\cdots\ [\alpha]\ [-2(\alpha+\gamma)]\ [\alpha]\ \cdots$ | $\cdots\ [2\beta]\ [\gamma]\ [-2\beta]\ \cdots$ | | | $K_1$<br>$\vdots$<br>$K_{i-1}$<br>$K_i$<br>$K_{i+1}$<br>$\vdots$<br>$K_1 + (m - 1)$ |
| $\cdots\ [-2\beta]\ [\gamma]\ [2\beta]\ \cdots$ | $\cdots\ [\alpha]\ [-2(\alpha+\gamma)]\ [\alpha]\ \cdots$ | $\cdots\ [2\beta]\ [\gamma]\ [-2\beta]\ \cdots$ | | $2, j$<br>$\vdots$<br>$i - 1, j$<br>$i, j$<br>$i + 1, j$<br>$\vdots$<br>$m - 1, j$ |
| | $\cdots\ [-2\beta]\ [\gamma]\ [2\beta]\ \cdots$ | $\cdots\ [\alpha]\ [-2(\alpha+\gamma)]\ [\alpha]\ \cdots$ | | $2, j + 1$<br>$\vdots$<br>$i - 1, j + 1$<br>$i, j + 1$<br>$i + 1, j + 1$<br>$\vdots$<br>$m - 1, j + 1$ |

## Choix d'un résoluteur

**Plusieurs méthodes de résolution sont disponibles :**

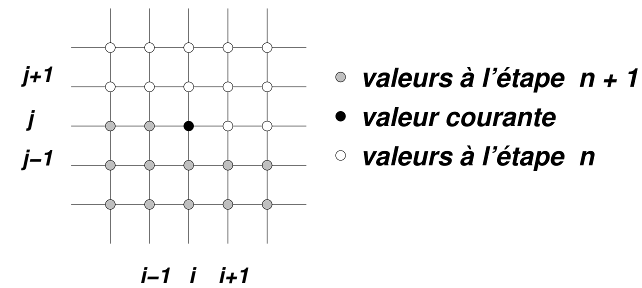
1. $\boxed{\text{les méthodes directes :}}$ *décomposition de Gauss, LU, ....*
   - *requièrent beaucoup d'espace mémoire car il faut assembler la matrice au complet ;*
   - *Par contre, elles garantissent une solution en un nombre fini d'opérations arithmétiques.*
2. $\boxed{\text{les méthodes itératives :}}$ *Gauss-seidel, Jacobi, surrelaxation ...* *présentent des caractéristiques intéressantes sur l'ensemble des critères :*
   - *il n'est nécessaire d'assembler la matrice ;*
   - *sont performantes si une <u>bonne</u> solution initiale est disponible, alors la convergence est rapide.*





## Relaxation par point

Le schéma de relaxation par point consiste à corriger sucessivement les inconnues par un balayage lexicographique du domaine discret.




La fonction itérante est dérivée du système algébrique écrit au noeud $(i, j)$ à l'étape courante du processus itératif, en tenant compte de l'état, c-à-d valeur ancienne ou corrigée, des variables du voisinage.





## Fonction itérante

On cherche les valeurs des variables $x$ et $y$ au noeud $(i, j)$, notées $x^-$ et $y^-$, qui vérifient l'équation du résidu :

$$\begin{aligned}\alpha' \left[x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}\right] + \gamma' \left[x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}\right] & \\ -2\beta' \left[x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1}\right] &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha' \left[y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}\right] + \gamma' \left[y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}\right] & \\ -2\beta' \left[y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j-1}\right] &= 0\end{aligned}$$

où $x$ et $y$ sont des anciennes valeurs, c-à-d évaluées à l'étape $n$ et, $x^+$ et $y^+$ sont des valeurs corrigées, c-à-d évaluées à l'étape $n + 1$.





Á partir du système algébrique écrit au noeud $(i, j)$ à l'étape courante du processus itératif, en tenant compte de l'état, c-à-d valeur ancienne ou corrigée, des variables du voisinage :

1. On isole les valeurs des inconnues au noeud $(i, j)$ et les valeurs aux noeuds voisins sont placées à droite de l'équation. Ce qui donne <u>la fonction itérante</u>, qui exprime $x_{i,j}$ et $y_{i,j}$ en fonction des valeurs voisines :

$$\begin{aligned}2(\alpha' + \gamma')x_{i,j} &= \alpha' \left(x_{i+1,j} + x_{i-1,j}\right) + \gamma' \left(x_{i,j+1} + x_{i,j-1}\right) \\ &\quad -2\beta' \left(x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1}\right) \\ 2(\alpha' + \gamma')y_{i,j} &= \alpha' \left(y_{i+1,j} + y_{i-1,j}\right) + \gamma' \left(y_{i,j+1} + y_{i,j-1}\right) \\ &\quad -2\beta' \left(y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j-1}\right)\end{aligned}$$

2. On visite successivement chaque sommet, $(i, j)$, de l'espace paramétrique, et les valeurs de $x_{i,j}$ et $y_{i,j}$ sont corrigées avec la fonction itérante.
3. Au fur et à mesure de ce balayage, le calcul des $x_{i,j}$ et $y_{i,j}$ converge pour un ensemble de valeurs $\alpha'$, $\gamma'$ et $\beta'$.

## Remarques

La convergence Ce processus itératif converge-t-il ? Sous quelles conditions ?

La linéarization Comme $\alpha'$, $\gamma'$ et $\beta'$ dépendent des inconnues $x_{i,j}$ et $y_{i,j}$, on doit recalculer ces coefficients à mesure que les $x_{i,j}$ et $y_{i,j}$ changent. À quelle fréquence ?

Solution initiale Le processus itératif consiste à améliorer une solution existante, et par conséquent nécessite une solution de départ. Le maillage initial est obtenu par la méthode d'interpolation transfinie.

Arrêt Comment mesurer l'atteinte d'une solution ?





## Le résidu

L'opérateur de Winslow exprime la solution du modéle de maille dans l'espace continue comme,

$$\mathcal{L}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left[\alpha\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - 2\beta\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\tau} + \gamma\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dans la formulation discrète, les $x_{i,j}$ et $y_{i,j}$ sont des approximations, donc le résidu sera différent de 0,

$$\begin{aligned} R_x i,j \neq 0 &= \alpha'\left[x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}\right] + \gamma'\left[x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}\right] \\ &\quad -2\beta'\left[x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1}\right] \\ R_y i,j \neq 0 &= \alpha'\left[y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}\right] + \gamma'\left[y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}\right] \\ &\quad -2\beta'\left[y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j-1}\right] \end{aligned}$$

et donne une mesure de l'atteinte de la convergence en utilisant une norme, $L_2$ par exemple.





## Algorithme global

Le balayage : Cette étape consiste à visiter chaque noeud (sommet) $(i,j)$ et de faire la mise à jour des $x_{i,j}$ et $y_{i,j}$ en appliquant la fonction itérante.

- Un balayage va du premier au dernier sommet, répété **iterB** fois ;
- On utilisera une méthode itérative par point de type Gauss-Seidel ou Jacobi, avec ou sans surrelaxation ;
- Au cours d'un balayage, les coefficients $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont gelés.

La linéarisation : À la fin d'un cycle de **iterB** balayages, les valeurs de $x(i,j)$ et $y(i,j)$ ont changé.

- les $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont mis à jour ;
- À cette étape, on calcule les résidus et la norme ;
- Une linéarisation suivie de **iterB** balayages, est une itération, répétée **iterL** fois, jusqu'à l'atteinte de la convergence souhaitée.

La convergence et critère d'arrêt : On mesure l'erreur par une norme sur les résidus $R_x(i,j)$ et $R_y(i,j)$, et selon une cible, on poursuit ou arête les calculs.





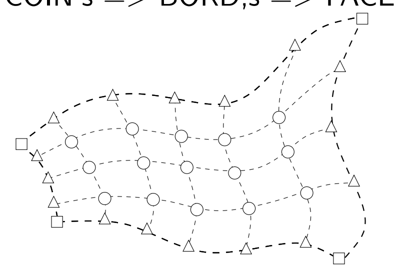
## Structure de données

➜ Le résultat de cette technique de maillage est un ensemble de noeuds discrétisant le domaine.

➜ Les coordonnées de tous ces points sont stockées dans deux tableaux ***x*** et ***y***, regroupés selon l'entité topologique sur laquelle ils reposent.

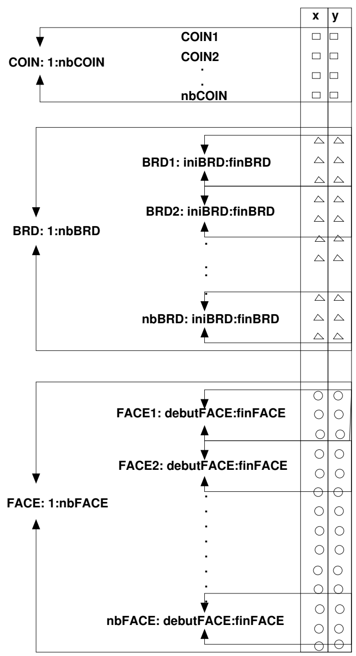
**DOMAINE :**

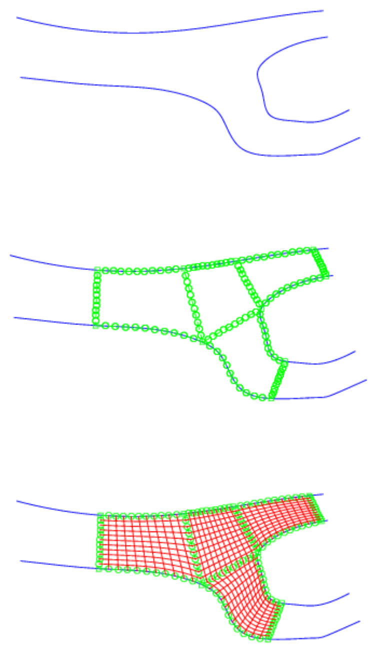
COIN's => BORD,s => FACE




➜ Cette représentation du maillage global d'un domaine comprend trois maillages :

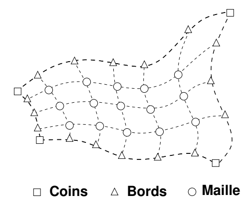
- les COIN's : maillages 0d
- les BORD's : maillages 1d
- une FACE : maillage 2d



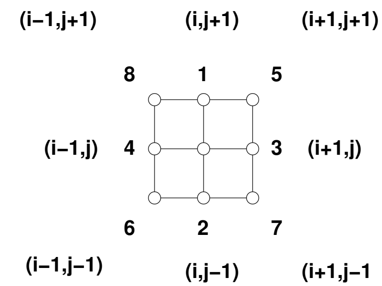





## Vecteur d'addressage




| (i,j) | k | V |
|---|---|---|
| (i+1,j) | ip1j | V(k,3) |
| (i-1,j) | im1j | V(k,4) |
| (i,j+1) | ijp1 | V(k,1) |
| (i,j-1) | ijm1 | V(k,2) |
| (i+1,j+1) | ip1jp1 | V(k,5) |
| (i-1,j-1) | im1jm1 | V(k,6) |
| (i-1,j+1) | im1jp1 | V(k,8) |
| (i+1,j-1) | ip1jm1 | V(k,7) |








## Surrelaxation

Les anciennes valeurs $x$ et $y$ sont mises à jour en ajoutant $(x^- - x)$ et $(y^- - y)$ en surrelaxation par un facteur $\omega$ :

$$\begin{aligned} x^+ &= x + \omega\,(x^- - x) \\ y^+ &= y + \omega\,(y^- - y) \end{aligned}$$

d'où on tire pour les valeurs courantes :

$$\begin{aligned} x^-_{i,j} &= x_{i,j} + C_x i, j/\omega \\ y^-_{i,j} &= y_{i,j} + C_y i, j/\omega \end{aligned}$$

avec les corrections

$$\begin{aligned} C_x i, j &= x^+_{i,j} - x_{i,j} \\ C_y i, j &= y^+_{i,j} - y_{i,j} \end{aligned}$$





## Fonction itérante

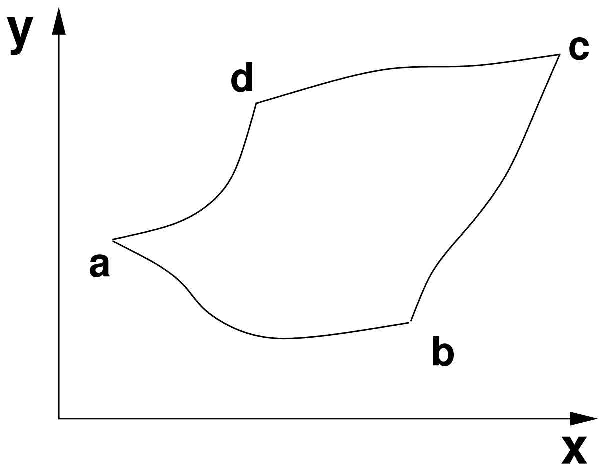
En remplaçant dans l'équation discrétisée, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{2(\alpha' + \gamma')}{\omega} C_x i, j &= R_x i, j + \alpha' C_x i-1, j \\ &\quad -\beta'(C_x i-1, j-1 - C_x i+1, j-1) + \gamma' C_x i, j-1 \\ \frac{2(\alpha' + \gamma')}{\omega} C_y i, j &= R_y i, j + \alpha' C_y i-1, j \\ &\quad -\beta'(C_y i-1, j-1 - C_y i+1, j-1) + \gamma' C_y i, j-1 \end{aligned}$$

avec les résidus :

$$\begin{aligned} R_x i, j &= \alpha' \left[x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}\right] + \gamma' \left[x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}\right] \\ &\quad -2\beta' \left[x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1}\right] \\ R_y i, j &= \alpha' \left[y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}\right] + \gamma' \left[y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}\right] \\ &\quad -2\beta' \left[y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j-1}\right] \end{aligned}$$

## Conditions frontières








## Corrections aux frontières

Comme les équations sont formulées en termes de corrections $C_x i, j$ et $C_y i, j$, alors les conditions limites sont :

$$\begin{aligned} C_x 1, j &= C_x m, j &= 0 \\ C_y 1, j &= C_y m, j &= 0 \end{aligned}$$

car les valeurs sont connues sur les frontières, c-à-d des conditions de Dirichlet.





## Processus itératif

1. Sur les frontières,

| Le long de la frontière : | Les variables | Les indices |
|---|---|---|
| $\Gamma_1$ (premier coté) | $\tau = 0$ | $j = 0$, $i$ 1 ==> $m$ |
| $\Gamma_2$ (second coté) | $\tau = 1$ | $j = 1$, $i$ 1 ==> $m$ |
| $\Gamma_3$ (troisième coté) | $\eta = 0$ | $i = 0$, $j$ 1 ==> $n$ |
| $\Gamma_4$ (quatrième coté) | $\eta = 1$ | $i = 1$, $j$ 1 ==> $n$ |

2. A partir d'une solution initiale, les valeurs de $x$ et $y$ à chaque noeud $(i, j)$ sont mises à jour successivement en balayant le domaine.
3. Le taux de convergence de ce procédé dépend de l'étendue de la molécule de calcul d'une part, et de la façon dont les conditions limites influencent les valeurs à l'intérieur du domaine.



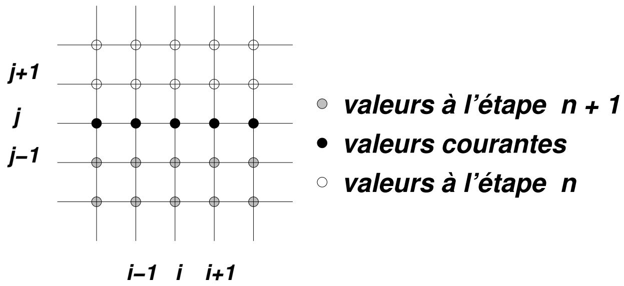


1. Dans un schéma de relaxation par point, il faut autant de balayages qu'il y a de noeuds dans le domaine.
2. Une molécule de calcul de la forme d'une ligne, avec les extrémités sur les frontières, accélère la propagation de ces conditions vers l'intérieur.
3. On peut utiliser soit une rangée ou une colonne comme bloc.

Les valeurs de $\tau$ et $\eta$ sont sans importance et peuvent, sans perte de généralité, varier de 0 à 1 ou bien de 1 au nombre de noeuds, $m$ et $n$ respectivement. Alors les valeurs de $\Delta\eta$ et $\Delta\tau$ valent l'unité.
La formulation donne lieu à un système implicite de forme tridiagonale qui se prête à une résolution efficace.

## Relaxation implicite par rangée

La fonction itérante pour une relaxation implicite par rangée est dérivée à partir du système algébrique avec la disposition suivante :




Les valeurs des variables le long d'une rangée sont mises à jour simultanémment, ce qui donne l'avantage d'introduire implicitement les conditions frontières aux nœuds en extémités.





## Equation du résidu

Le système algébrique est écrit implicitement le long d'une rangée avec les valeurs des variables à l'état du processus de relaxation :

$$\alpha' \left[x^-_{i+1,j} - 2x^-_{i,j} + x^-_{i-1,j}\right] + \gamma' \left[x_{i,j+1} - 2x^-_{i,j} + x^+_{i,j-1}\right]$$
$$-2\beta' \left[x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1} - x^+_{i+1,j-1} + x^+_{i-1,j-1}\right] = 0$$

$$\alpha' \left[y^-_{i+1,j} - 2y^-_{i,j} + y^-_{i-1,j}\right] + \gamma' \left[y_{i,j+1} - 2y^-_{i,j} + y^+_{i,j-1}\right]$$
$$-2\beta' \left[y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1} - y^+_{i+1,j-1} + y^+_{i-1,j-1}\right] = 0$$





## Correction

L'équation pour la correction est obtenue par :

$$\frac{\alpha'}{\omega} C_x i-1,j - \frac{2(\alpha'+\gamma')}{\omega} C_x i,j + \frac{\alpha'}{\omega} C_x i+1,j$$
$$= -R_x i,j - \gamma' C_x i,j-1 - 2\beta'[C_x i+1,j-1 - C_x i-1,j-1]$$
$$\frac{\alpha'}{\omega} C_y i-1,j - \frac{2(\alpha +' \gamma')}{\omega} C_y i,j + \frac{\alpha}{'}\omega C_y i+1,j$$
$$= -R_y i,j - \gamma' C_y i,j-1 - 2\beta'[C_y i+1,j-1 - C_y i-1,j-1]$$

où les résidus $R_x i,j$ et $R_y i,j$ sont donnés par les expressions :

$$\begin{aligned} R_x i,j &= \alpha' [x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}] + \gamma' [x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}] \\ &\quad -2\beta' [x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1}] \\ R_y i,j &= \alpha' [y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}] + \gamma' [y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}] \\ &\quad -2\beta' [y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j-1}] \end{aligned}$$





## Système implicite

En appliquant l'équation de correction à chaque noeud, on obtient un système tridiagonal pour les corrections de la variable $x$ :

$$\begin{bmatrix} B_2 & C_2 & & & & & \\ A_3 & B_3 & C_3 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & A_i & B_i & C_i & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & A_{m-1} & B_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_x 2,j \\ C_x 3,j \\ \vdots \\ \vdots \\ C_x i,j \\ \vdots \\ \vdots \\ C_x m-1,j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x 2,j \\ D_x 3,j \\ \vdots \\ \vdots \\ D_x i,j \\ \vdots \\ \vdots \\ D_x m-1,j \end{bmatrix}$$

## Système implicite

De façon semblable, pour la variable $y$ :

$$\begin{bmatrix} B_2 & C_2 & & & & & \\ A_3 & B_3 & C_3 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & A_i & B_i & C_i & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & A_{m-1} & B_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y 2, j \\ C_y 3, j \\ \vdots \\ \vdots \\ C_y i, j \\ \vdots \\ \vdots \\ C_y m-1, j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_y 2, j \\ D_y 3, j \\ \vdots \\ \vdots \\ D_y i, j \\ \vdots \\ \vdots \\ D_y m-1, j \end{bmatrix}$$





## Système nonlinéaire

Les coefficients :

$$\begin{aligned} A_i &= \alpha'/\omega \\ B_i &= -2(\alpha' + \gamma')/\omega \\ C_i &= \alpha'/\omega \\ D_x i, j &= -R_x i, j - \gamma' C_x i, j-1 - 2\beta'[C_x i+1, j-1 - C_x i-1, j-1] \\ D_y i, j &= -R_y i, j - \gamma' C_y i, j-1 - 2\beta'[C_y i+1, j-1 - C_y i-1, j-1] \end{aligned}$$

sont fonctions des inconnues $x$ et $y$ ce qui rend les équations algébriques nonlinéaires et couplées.





## Conditions frontières

Comme les équations sont formulées en termes de corrections $C_x i, j$ et $C_y i, j$, alors les conditions limites sont :

$$\begin{aligned} C_x 1, j &= C_x m, j &= 0 \\ C_y 1, j &= C_y m, j &= 0 \end{aligned}$$

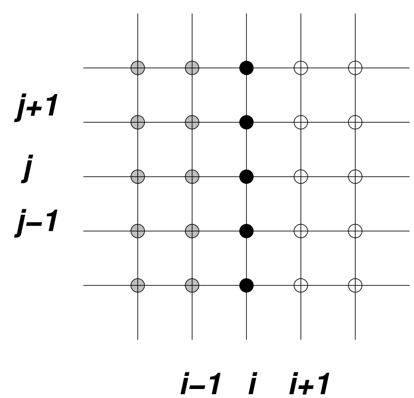
car les valeurs sont connues sur les frontières, c-à-d des conditions de Dirichlet.





## Relaxation implicite par colonne

La fonction itérante pour une relaxation implicite par colonne est dérivée à partir du système algébrique avec la disposition suivante :




- ***valeurs à l'étape n + 1***
- ***valeurs courantes***
- ***valeurs à l'étape n***

## Equation du résidu

Le système algébrique est écrit implicitement le long d'une colonne avec les valeurs des variables à l'état du processus de relaxation :

$$
\begin{aligned}
\alpha' \left[x_{i+1,j} - 2x^-_{i,j} + x^+_{i-1,j}\right] + \gamma' \left[x^-_{i,j+1} - 2x^-_{i,j} + x^-_{i,j-1}\right] & \\
-2\beta' \left[x_{i+1,j+1} - x^+_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x^+_{i-1,j-1}\right] &= 0 \\
\alpha' \left[y_{i+1,j} - 2y^-_{i,j} + y^+_{i-1,j}\right] + \gamma' \left[y^-_{i,j+1} - 2y^-_{i,j} + y^-_{i,j-1}\right] & \\
-2\beta' \left[y_{i+1,j+1} - y^+_{i-1,j+1} - y_{i+1,j-1} + y^+_{i-1,j-1}\right] &= 0
\end{aligned}
$$





## Correction

L'équation pour la correction est obtenue par :

$$
\begin{aligned}
\frac{\gamma'}{\omega} Cx_{i,j-1} - \frac{2(\alpha' + \gamma')}{\omega} Cx_{i,j} + \frac{\gamma'}{\omega} Cx_{i,j+1} &= \\
-Rx_{i,j} - \alpha' Cx_{i-1,j} + 2\beta' [Cx_{i-1,j+1} - Cx_{i-1,j-1}] & \\
\frac{\gamma'}{\omega} Cy_{i,j-1} - \frac{2(\alpha' + \gamma)}{\omega} Cy_{i,j} + \frac{\gamma'}{\omega} Cy_{i,j+1} &= \\
-Ry_{i,j} - \alpha' Cy_{i-1,j} + 2\beta' [Cy_{i-1,j+1} - Cy_{i-1,j-1}] &
\end{aligned}
$$

où les résidus $R_x i,j$ et $R_y i,j$ sont donnés par les expressions :

$$
\begin{aligned}
R_x i,j &= \alpha' [x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}] + \gamma' [x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}] \\
&\quad -2\beta' [x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1}] \\
R_y i,j &= \alpha' [y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}] + \gamma' [y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}] \\
&\quad -2\beta' [y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j-1}]
\end{aligned}
$$



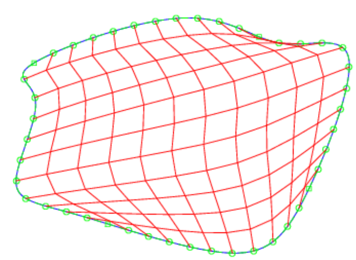




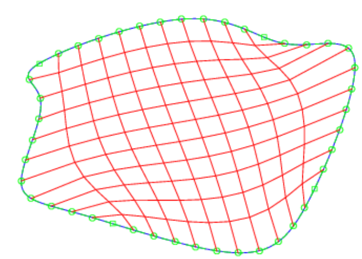




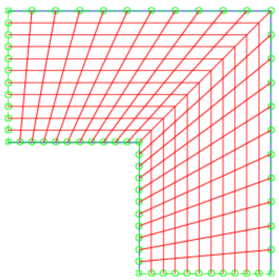
**Transfini**



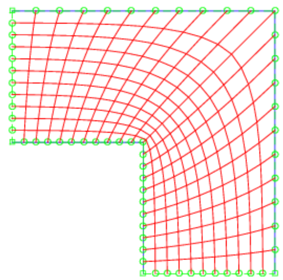
**Winslow**



## Transfini



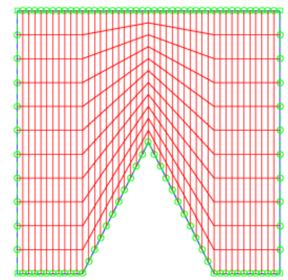
## Winslow



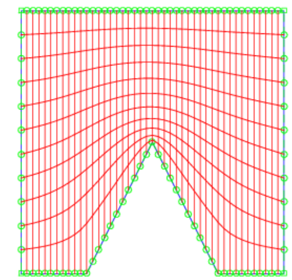




## Transfini



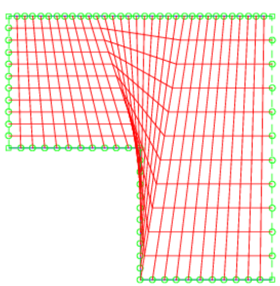
## Winslow



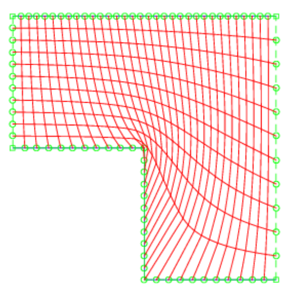




## Transfini



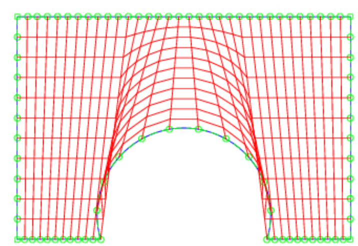
## Winslow



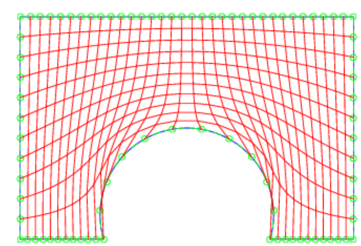




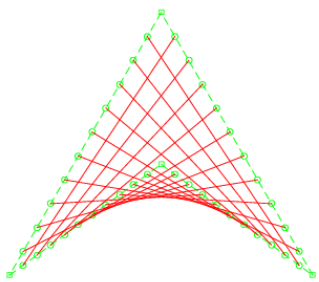
## Transfini



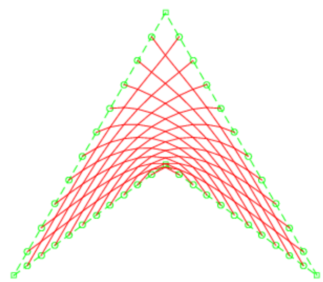
## Winslow



**Transfini**



**Winslow**







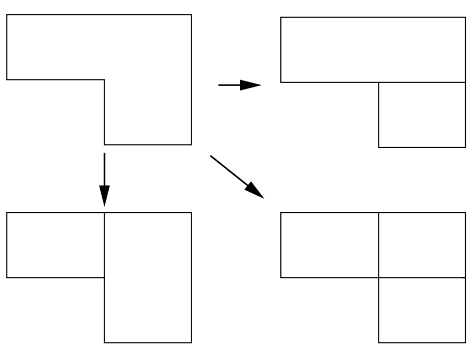






## *Partitionnement*

**La décomposition en sous-domaines est arbitraire et dépend de l'application :**

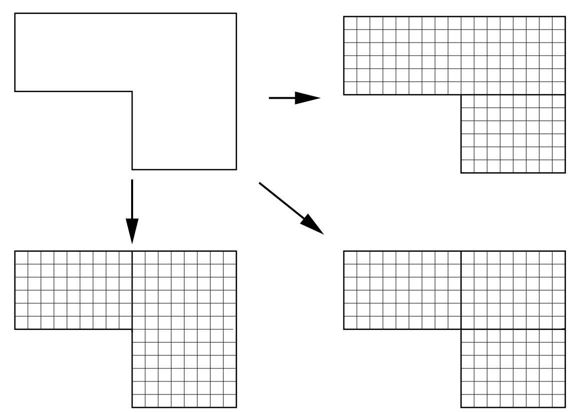


**On tente de produire des zones qui sont le plus proche possible d'un rectangle dans l'espace géométrique.**





## *Maillages multi-blocs*

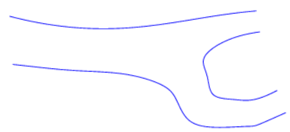


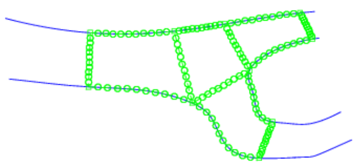
## *Approche globale multi-bloc*

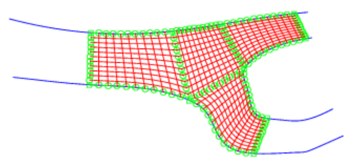
**➜ On partitionne le domaine en un ensemble de quasi-rectangles et on applique les méthodes transfinies ou Winslow.**

**➜ Ce qui ramène le problème de la génération du maillage hybride en trois classes d'action :**

- géométriques
- topologiques
- discrétisation



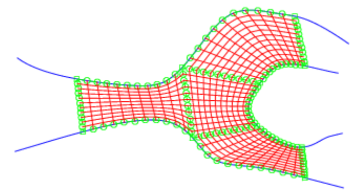




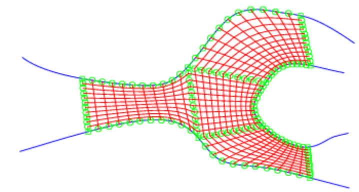




**Transfini**



**Winslow**



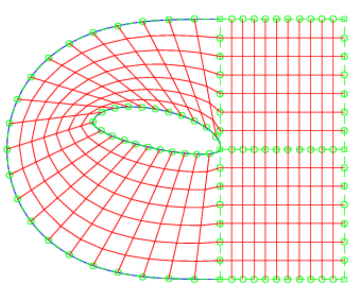




## *Maillage structuré en C*

**Domaine non-simplement connexe**

**Transfini**



**Winslow**