MEC6212 : Génération de maillages

MAILLAGES TRANSFINIS

Ricardo Camarero
Département de génie mécanique

2 février 2024

Motivation et contexte

Concepts de base et historique

Maillages Structurés :

- *Maillages curvilignes*
- **Interpolation transfinie**
- *Méthodes EDP : Elliptiques*
- *Concentration de mailles*

Maillages non-structurés :

- *Triangulation de Delaunay*
- *Maillages de Delaunay contraints*
- *Méthode d'avance de front*

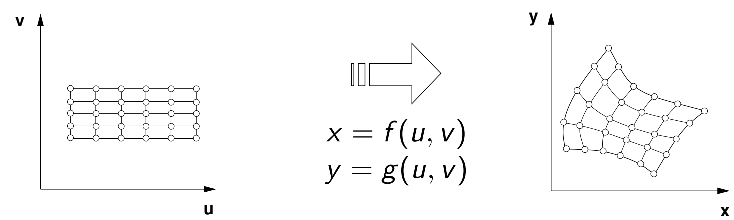
Maillages Hybrides :

- *décomposition spatiale : multiblocs, hiérarchique.*

Table des matières

Rappel : techniques de maillages algébriques

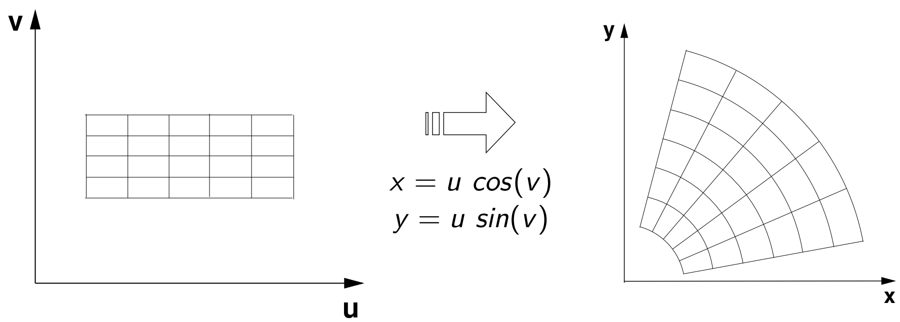
➜ **Dans l'espace paramétrique, (u, v), on génère un maillage régulier cartésien, et le maillage dans l'espace physique, (x, y), est obtenu par une simple évaluation d'une expression analytique.**



➜ **Ce qui confère aux techniques de maillages algébriques un certain nombre d'avantages sur le plan informatique : rapidité de calcul, structure de données efficace, mise en oeuvre facile.....**

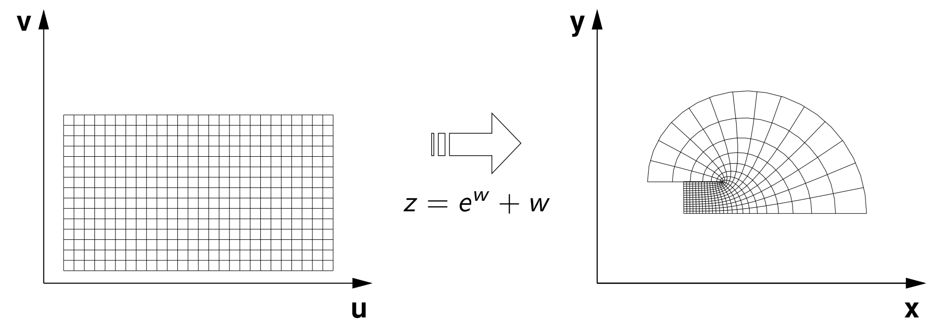
➜ **Par contre, elles présentent des lacunes importantes sur le plan de la conformité géométrique, la possibilité de mailler des formes diverses et l'adaptation /concentration des mailles.**

Rappel : exemple



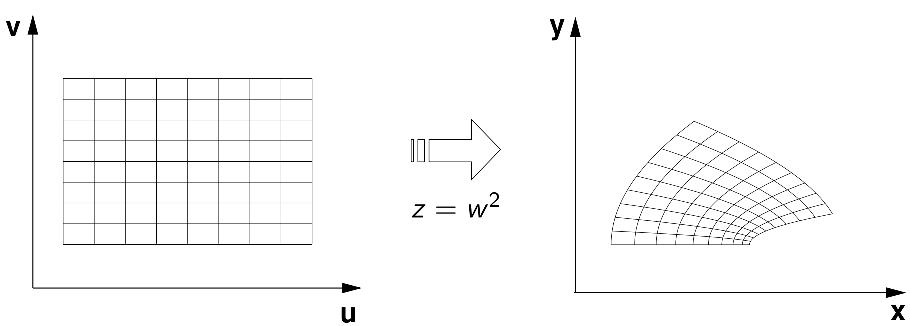
$$x = u\ cos(v)$$
$$y = u\ sin(v)$$

Rappel : exemple



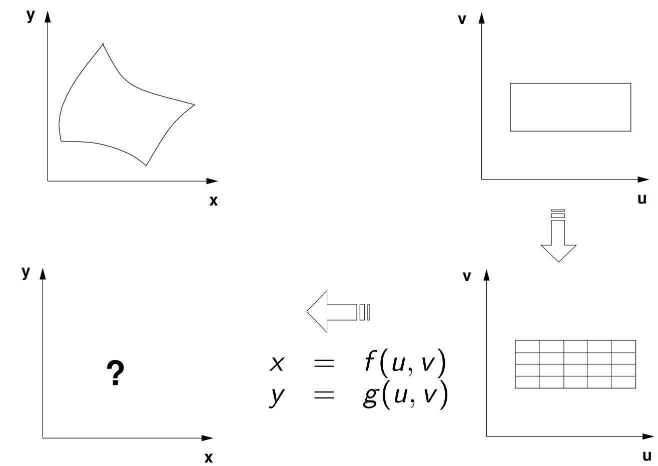
$$z = e^w + w$$

Rappel : exemple



$$z = w^2$$

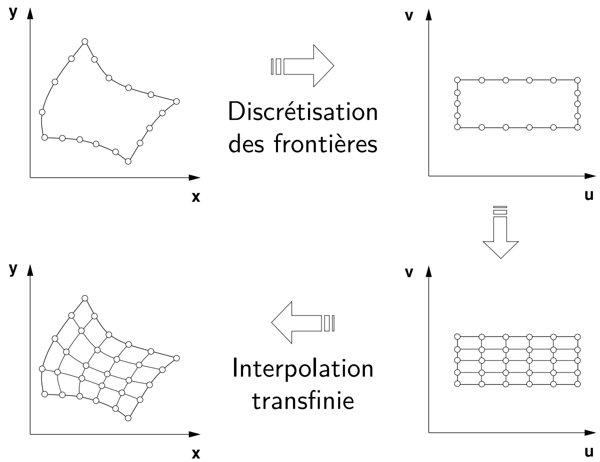
A l'origine, le problème était de trouver $\boxed{f \text{ et } g}$ tel que le rectangle dans l'espace paramétrique soit transformé vers les frontières.



$$\begin{aligned} x &= f(u,v) \\ y &= g(u,v) \end{aligned}$$

La faille de cette approche est qu'au point de départ, le domaine (u, v), les fonctions f et g ne disposent d'aucune informations sur la géométrie

Le point de départ doit être la géométrie dans l'espace (x, y), pour introduire le domaine ciblé, par la discrétisation des frontières physiques.



- ***L'approche n'est plus de trouver la transformation f et g.***
- ***On les remplace par un nouveau modèle de maille : un interpolant transfini ou un système d'équations différentielles.***

Origine de la méthode

Cette méthode pour la génération de maillages est basée sur les techniques d'interpolation issues du domaine de la modélisation géométrique.

On génère un maillage à l'intérieur d'un domaine par l'interpolation de ses frontières :

1. *Interpolation bivariée entre quatre coins frontières.*
2. *Interpolation univariée entre deux frontières.*
3. *Pour aborder des configurations rencontrées dans la pratique, l'extension à des domaines à quatre frontières est possible avec des interpolants bivariés.*

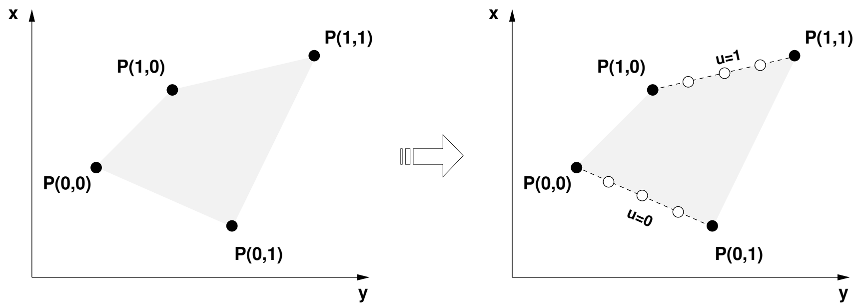
Le résultat est un maillage structuré et curviligne, avec de nombreux avantages sur le plan informatique : rapidité de calcul, structure de données efficace, mise en oeuvre facile.....

Interpolants univariés et linéaires sur les bords

Soit quatre points $P(0,0)$, $P(0,1)$, $P(1,0)$ et $P(1,1)$.

On contruit deux interpolants univariés et linéaires entre les points $P(0,0)$, $P(0,1)$ et les points $P(1,0)$ et $P(1,1)$ à u constant et v variant de 0 à 1, respectivement,

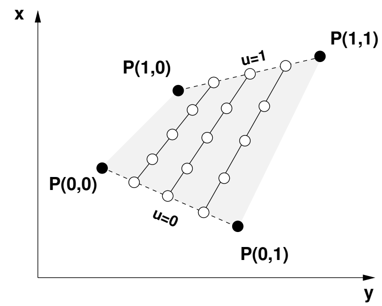
$$\begin{aligned}\vec{P}(0,v) &= (1-v)\vec{P}_{00} + v\vec{P}_{01}\\ \vec{P}(1,v) &= (1-v)\vec{P}_{10} + v\vec{P}_{11}\end{aligned}$$



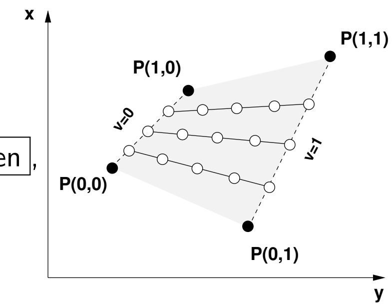
Interpolants des interpolants sur les bords

On interpole ces deux maillages 1d, dans la direction $u = 0:1$ donnant un maillage 2d, bivarié et linéaire.

$$\vec{Q}(u,v) = (1-u)\vec{P}(0,v) + u\vec{P}(1,v)$$



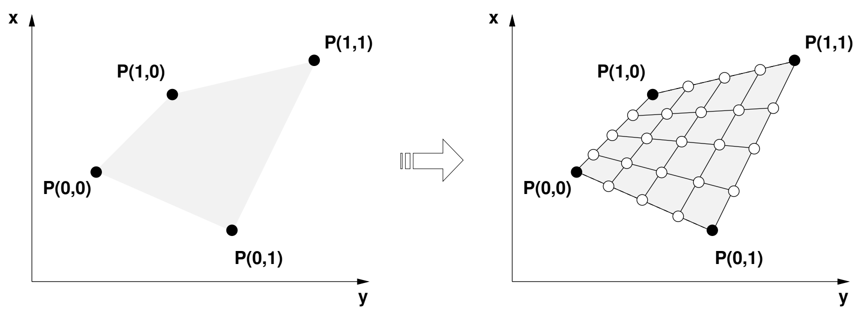
ou bien ,



On remarque qu'il est possible de faire cette opération avec la combinaison des points $P(0,0) \to P(1,0)$ et les points $P(0,1) \to P(1,1)$, qui donne exactement le même résultat avec le rôle de u et v inversé.

Interpolant bivarié linéaire

On appelle cette consruction un interpolant bivarié linéaire qui s'interpréte comme un maillage transfini du domaine formé par les quatre points.



L'équation de l'interpolant $\vec{Q}(u,v)$ sous la forme d'un produit matriciel,

$$\vec{Q}(u,v) \quad = \quad [\vec{P}(0,v), \vec{P}(1,v)] \begin{bmatrix} (1-u) \\ u \end{bmatrix}$$

$$[\vec{P}(0,v), \vec{P}(1,v)] = [(1-v), v] \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}$$

En substituant on obtient :

$$\vec{Q}(u,v) = [(1-v), v] \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-u) \\ u \end{bmatrix} \tag{1}$$

On peut interpréter cette expression comme l'interpolant/maillage du quadrilatère formé par les points P_{00}, P_{01}, P_{10} et P_{11}.

Ecriture matricielle :

L'équation de l'interpolant,

$$\vec{Q}(u,v) = (1-v)\vec{P}(u,0) + v\vec{P}(u,1)$$

peut se récrire sous la forme d'un produit matriciel :

$$\vec{Q}(u,v) = [\vec{P}(u,0), \vec{P}(u,1)] \begin{bmatrix} (1-v) \\ v \end{bmatrix}$$

En substituant les expressions pour les droites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \vec{P}(u,0) &= (1-u)\vec{P}_{00} + u\vec{P}_{10} \\ \vec{P}(u,1) &= (1-u)\vec{P}_{01} + u\vec{P}_{11} \end{aligned}$$

on obtient :

$$\vec{Q}(u,v) = [(1-u), u] \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-v) \\ v \end{bmatrix}$$

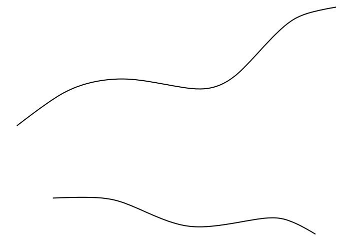
qui peut également s'interpréter comme une interpolation bilinéaire des quatre coins.

L'interpolation univariée entre deux courbes

➜ *Soit deux courbes R_1 et R_2 avec une paramètrisation :*

$$\begin{aligned} R_1(u) &= (x_1(u), y_1(u)) \\ R_2(u) &= (x_2(u), y_2(u)) \end{aligned}$$

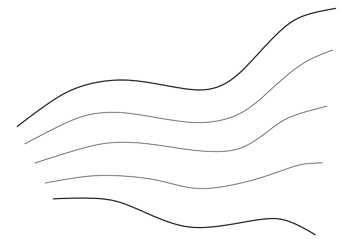
où $0 \le u \le 1$



➜ *On génère un maillage à l'intérieur du domaine par l'interpolation des frontières, $R_1(u)$ and $R_2(u)$,*

$$R_i(u) = L_1(v)R_1(u) + L_2(v)R_2(u)$$

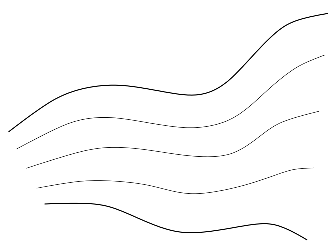
➜ *Ceci donne une 1ère famille de courbes qui forme une transition entre les frontières R_1 et R_2.*



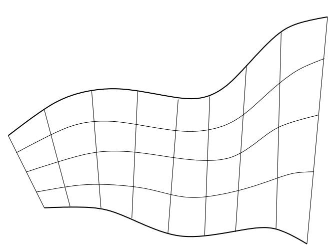
L'interpolation univariée linéaire

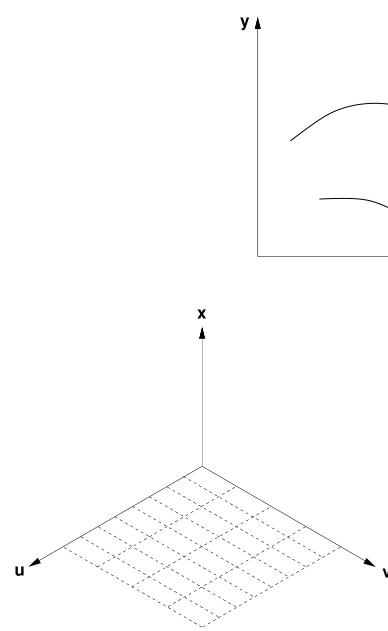
➜ *Parmi les multiples choix de L_1 et de L_2, la variation linéaire est le plus simple :*

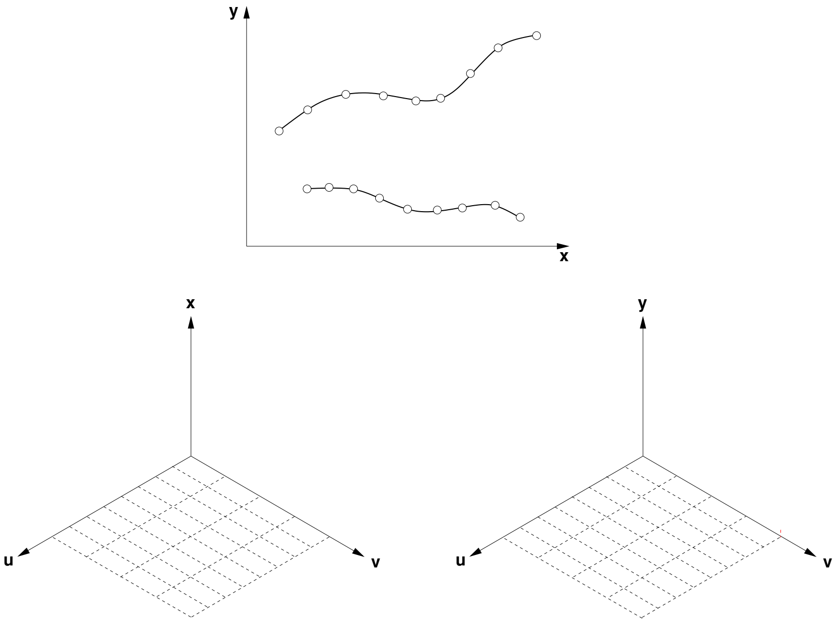
$$R_i(u) = (1-v)R_1(u) + vR_2(u)$$

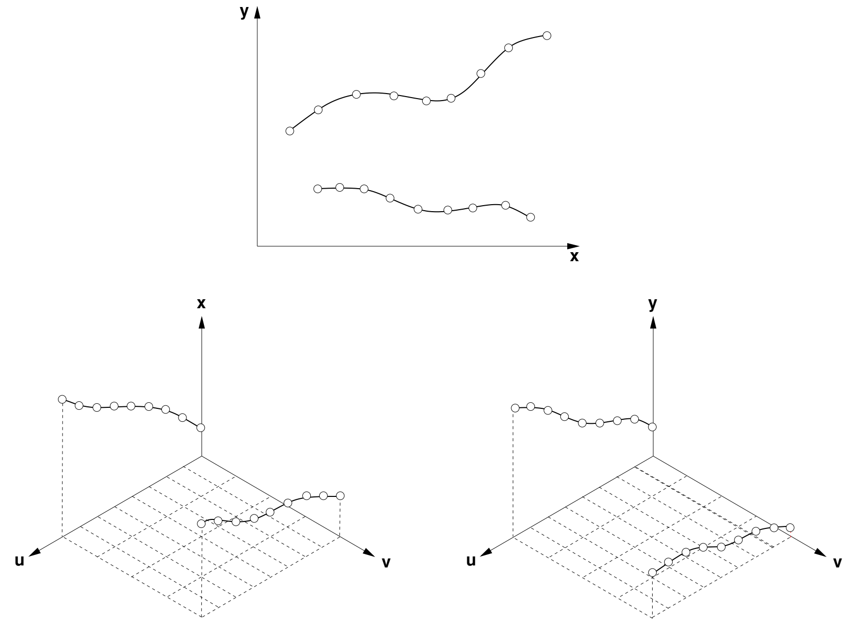


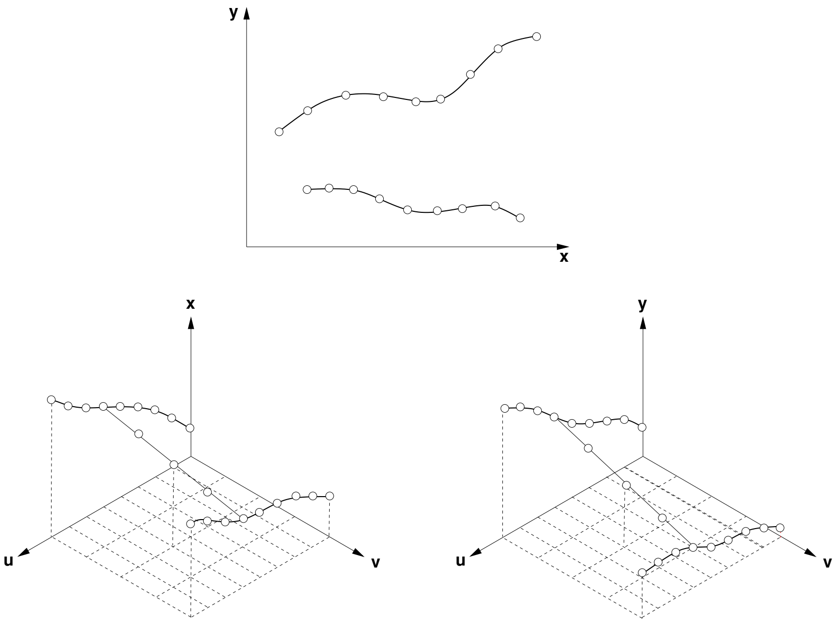
➜ *La 2ème famille est obtenue par les droites qui relient les points des deux courbes R_1 et R_2 aux mêmes valeurs du paramètre u :*

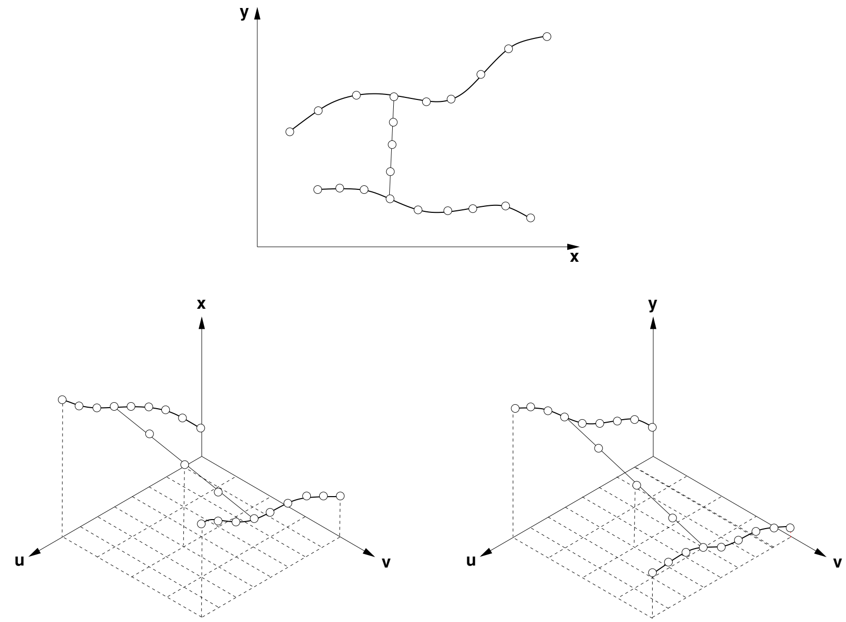


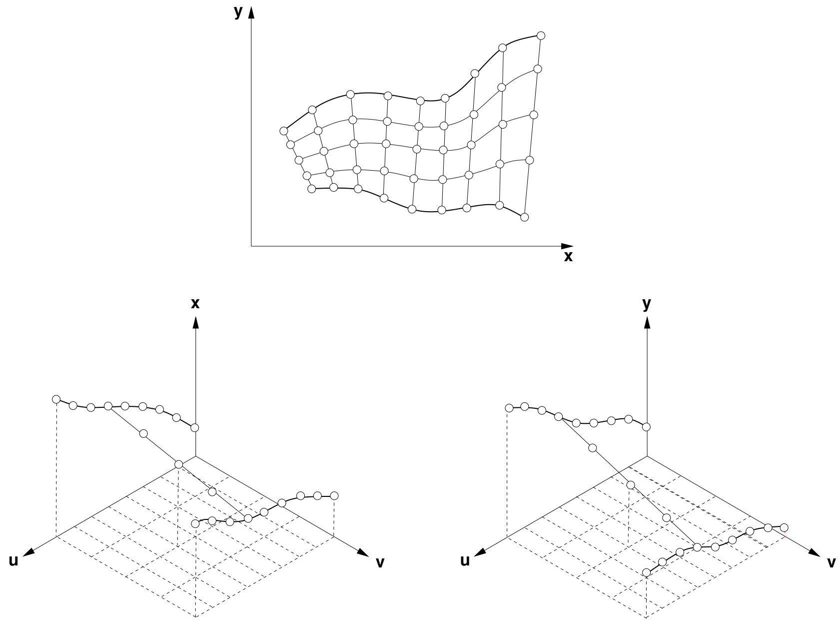



y
x
x
y
u
v
u
v


y
x
x
y
u
v
u
v


y
x
x
y
u
v
u
v


y
x
x
y
u
v
u
v



Remarques

Les interpolants et les fonctions décrivant les frontières déterminent le maillage obtenu par cette méthode.

- *On peut augmenter l'ordre de l'interpolation en ajoutant des courbes intermédiaires et en utilisant les polynômes de Lagrange d'ordre appropriés.*
- *On peut inclure dans la méthode d'interpolation des propriétés géométriques additionnelles telles que les vecteurs tangents aux courbes de base, et utiliser alors des interpolants de Hermite.*

Dans cette approche univariée,

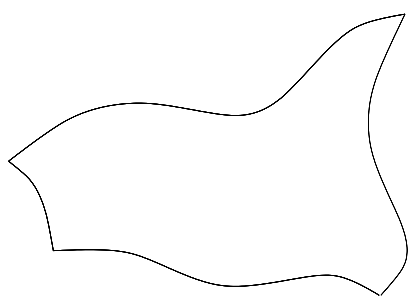
- *le maillage obtenu est curviligne dans une seule direction, la seconde famille étant composée de droites.*
- *L'extension à un domaine quelconque peut se réaliser par des* ***interpolants bivariés*** *qui nécessitent une deuxième paire de courbes, R_3 et R_4, pour former le rectangle topologique dans l'espace physique.*

Maillage transfini pour un domaine général

Soit quatre courbes quelconques $\vec{c}_1(u)$, $\vec{c}_2(u)$, $\vec{d}_1(v)$ et $\vec{d}_2(v)$ qui bornent un domaine.

➜ *Utilisant une représentation paramétrique de la forme :*

$\vec{P}(u,0) = \vec{c}_1(u)$ et $\vec{P}(u,1) = \vec{c}_2(u)$
$\vec{P}(0,v) = \vec{d}_1(v)$ et $\vec{P}(1,v) = \vec{d}_2(v)$



➜ *On cherche une combinaison de ces quatre courbes telle que le résultat soit deux familles de courbes qui varient régulièrement entre les courbes bornant le domaine.*

Une première construction

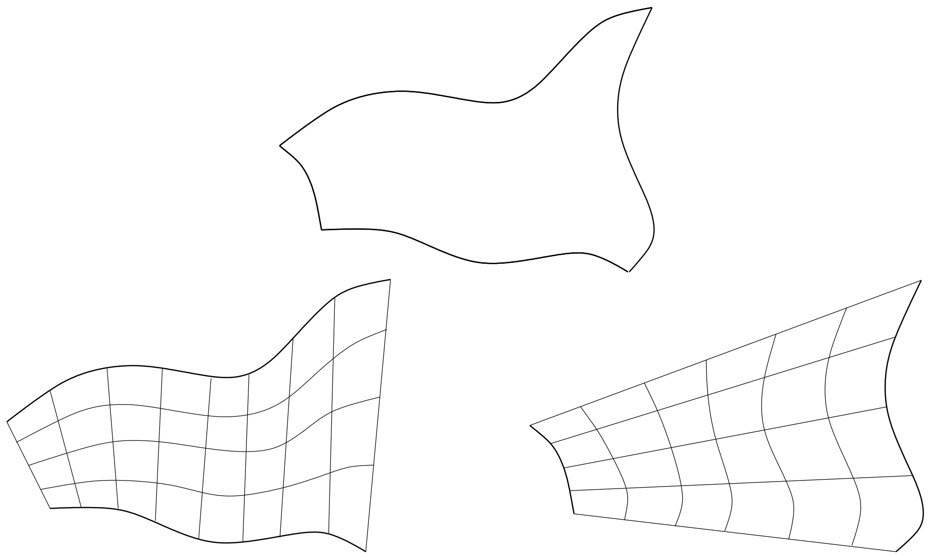
Par interpolation linéaire, deux familles de courbes peuvent être engendrées à partir de ces quatre courbes, prises deux à la fois :

$$\begin{aligned} \vec{R}_c(u,v) &= (1-v)\vec{P}(u,0) + v\vec{P}(u,1) \\ \vec{R}_d(u,v) &= (1-u)\vec{P}(0,v) + u\vec{P}(1,v) \end{aligned}$$

Famille-c
interpolant-v

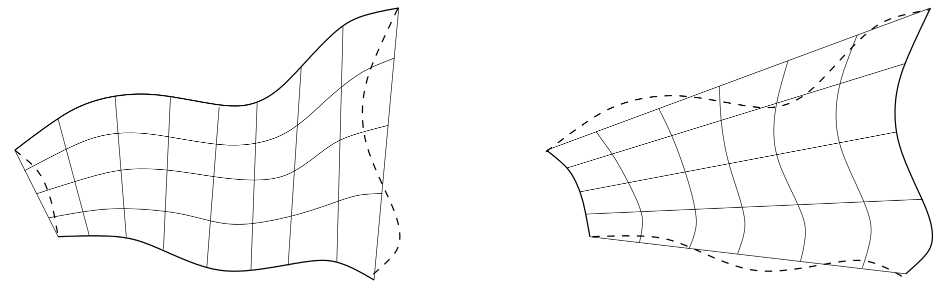
Famille-d
interpolant-u

Avec ces deux interpolants, on engendre deux maillages ne distincts :



Remarques

Chacun de ces deux maillages est conforme avec une paire de courbes frontières, mais pas avec l'autre paire !

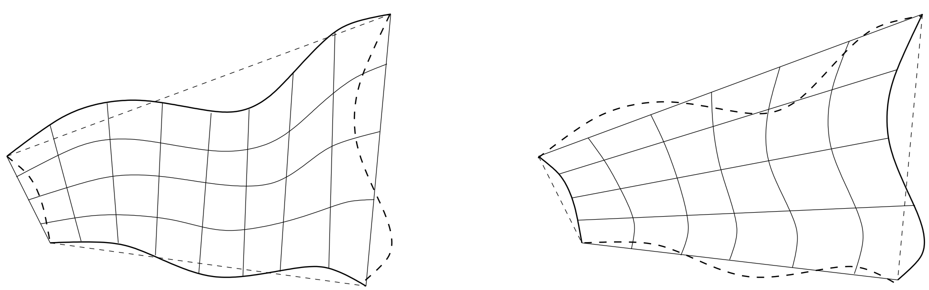


➜ Donc, ni l'un ni l'autre de ces deux maillages ne constitue le maillage avec les charactéristiques recherchées.

➜ Dans un cas comme dans l'autre, la frontière du domaine n'est intégralement représentée.

La somme Booléenne

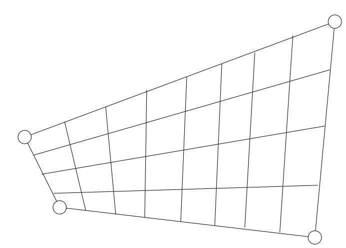
La superposition de ces deux familles donne un maillage dont chaque bord est la somme d'une frontière (en trait plein) et d'une droite (en pointillé).



- *Aucune de ces courbes ne passe au travers des quatre courbes originales.*
- *Pour récupérer la frontière, on doit retrancher cette droite de chacun des quatre cotés.*

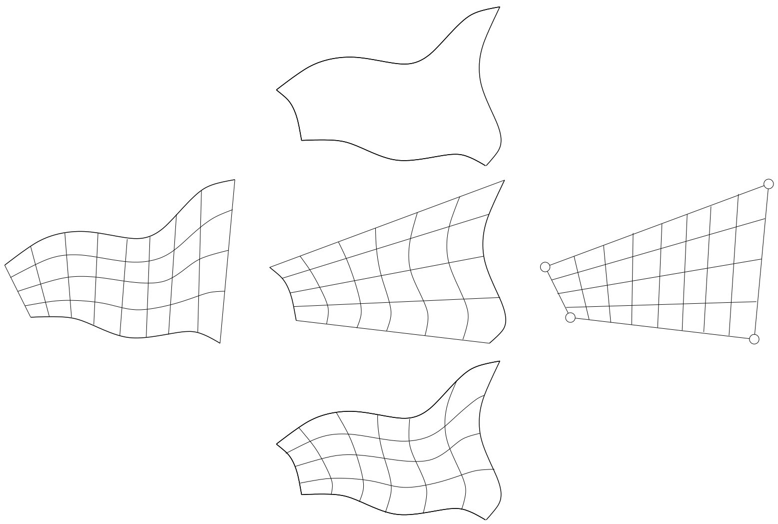
Ce qui revient à retrancher la surface bilinéaire qui est l'interpolant linéaire des quatre coins.

$$\vec{R}_{cd}(u,v) = [(1-u), u] \begin{bmatrix} \vec{P}_{00} & \vec{P}_{01} \\ \vec{P}_{10} & \vec{P}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-v) \\ v \end{bmatrix}$$



Somme Booléene pour domaine quelconque

Interprétation géométrique :



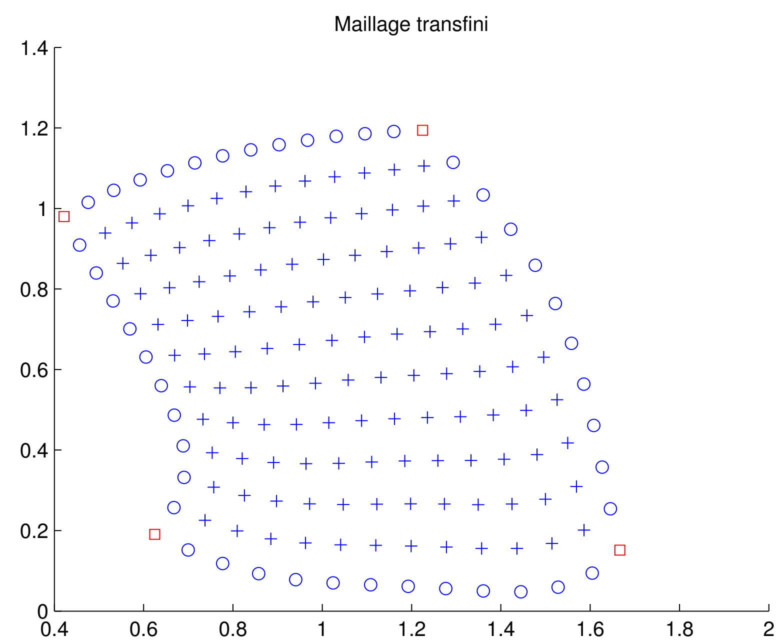
Interpolant bilinéaire

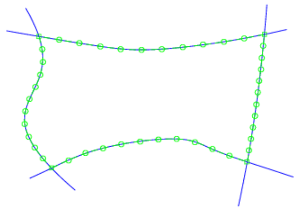
Mathématiquement, ce raisonnement s'exprime par :

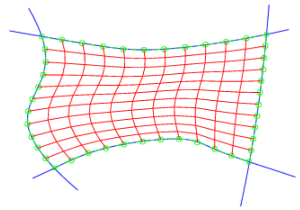
$$\vec{Q}(u,v) = \vec{R}_c(u,v) + \vec{R}_d(u,v) - \vec{R}_{cd}$$

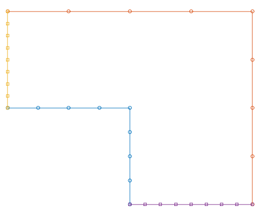
$$\begin{aligned}\vec{Q}(u,v) = {} & [(1-u), u]\begin{bmatrix}\vec{P}(0,v)\\ \vec{P}(1,v)\end{bmatrix} \\ & +[\vec{P}(u,0), \vec{P}(u,1)]\begin{bmatrix}(1-v)\\ v\end{bmatrix} \\ & -[(1-u), u]\begin{bmatrix}\vec{P}_{00} & \vec{P}_{01}\\ \vec{P}_{10} & \vec{P}_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(1-v)\\ v\end{bmatrix}\end{aligned}$$

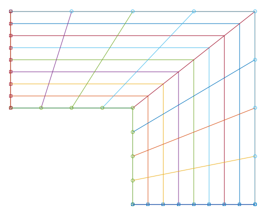
1. Maillages curvilignes adaptés
2. Interpolation transfinie
3. Interpolant bivarié de quatre points
4. Interpolant univarié de deux courbes
5. **Exemples**
6. Limites des maillages transfinis
7. Aspects topologiques



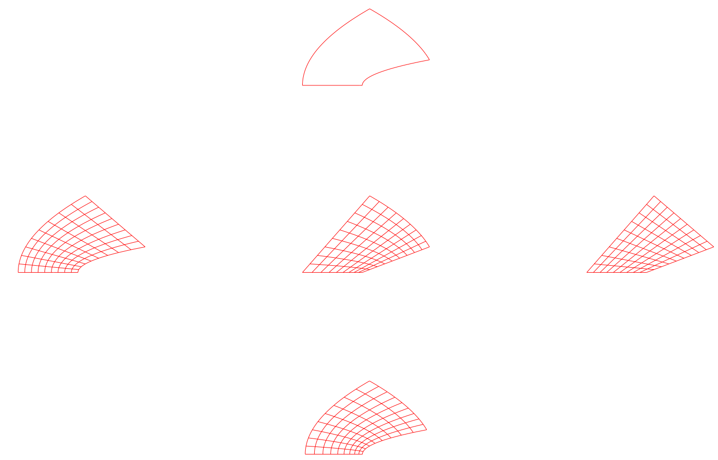








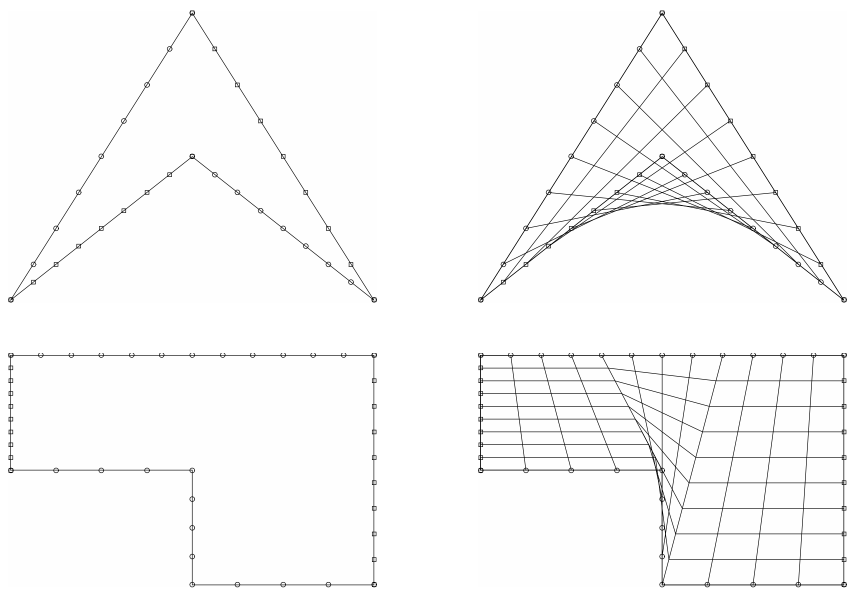
Exemple : $Z = W^2$



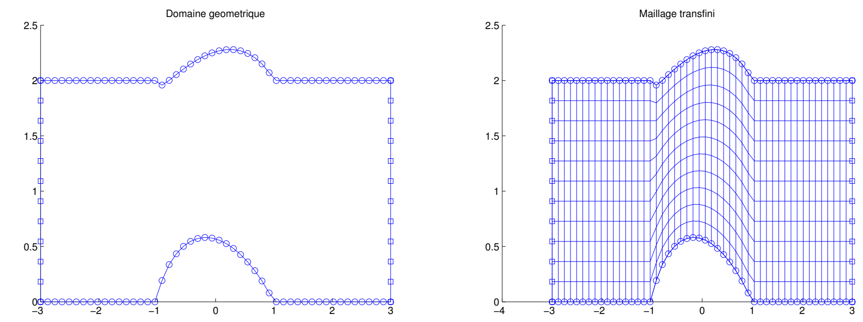
Limites des maillages transfinis

Pour certaines géométries, ce type de maillages peut donner des difficultés :

- les lignes de maillage peuvent sortir du domaine
- les lignes de maillage peuvent se croiser
- les discontinuités des frontières se propagent à l'intérieur du domaine

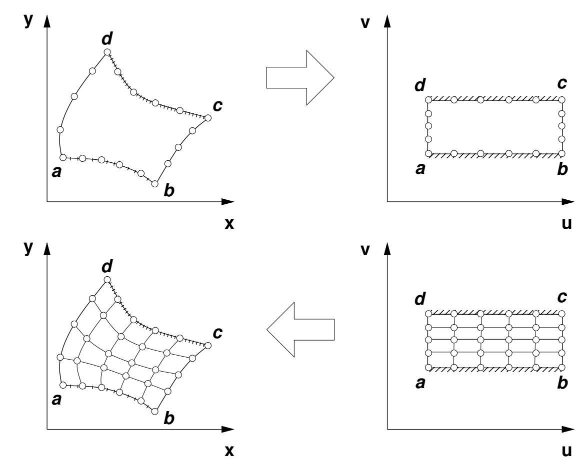


Propagation de discontinuités

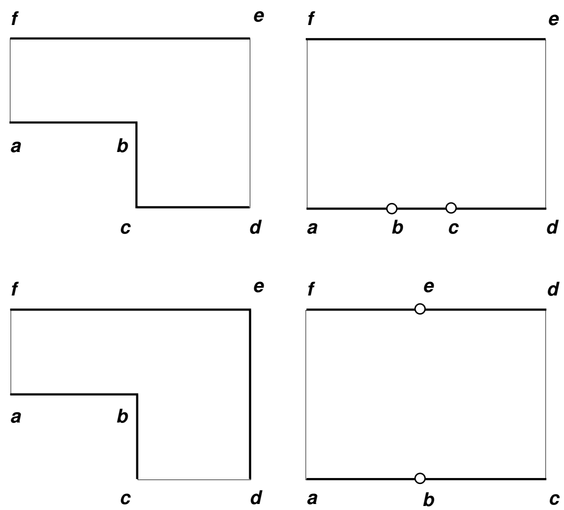


Le rectangle topologique

L'étape initiale de la démarche consiste à identifier les deux paires de frontières dans l'espace physique qui correspondent aux valeurs limites des paramètres u et v respectivement.

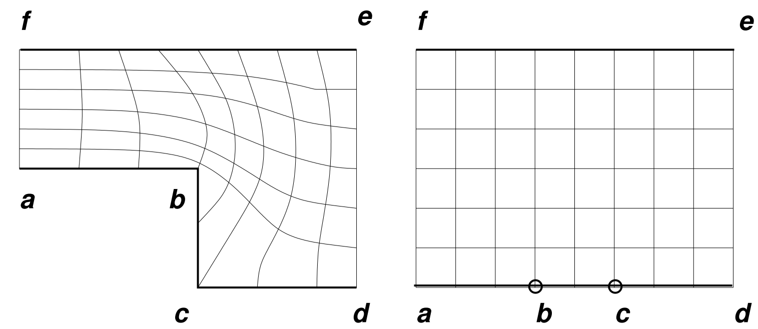


Pour un même domaine de calcul, il existe plusieurs façons de réaliser cette opération topologique :



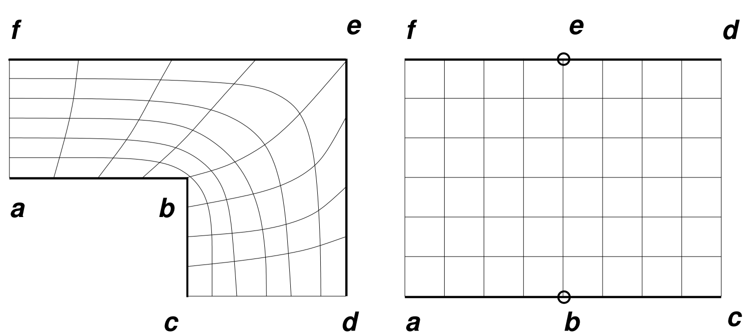
Un premier choix

1. Il peut y avoir ambiguité du au fait que le nombre de cotés du domaine est plus grand que quatre. Il faut alors les regrouper pour former un quadrangle topologique.
2. Les maillages qui résultent de ces choix peuvent être en général très différents, et dépendent de l'application.



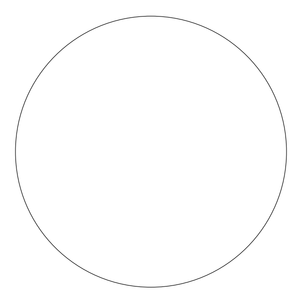
Un deuxième choix

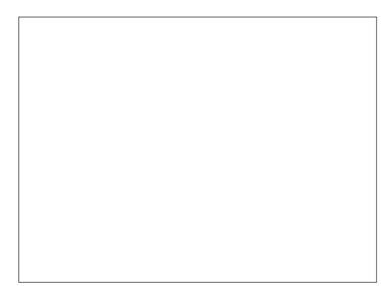
Pour un autre choix de la position de ces frontières, on obtient la configuration suivante :



Domaine sans coins

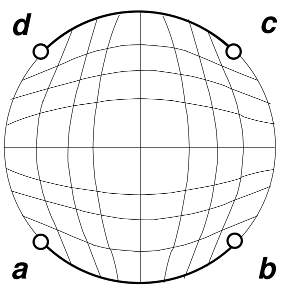
Il arrive qu'il n'y ai pas de coins apparents dans la géométrie, rendant ambigue l'identification des cotés.

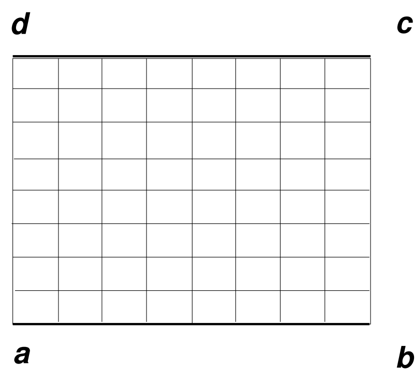




Insertion de coins fictifs

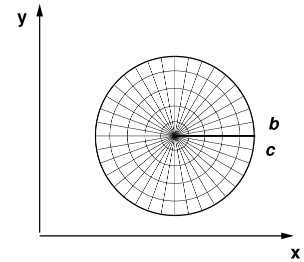
Ce qui donne :

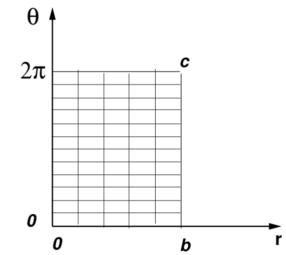




Comparaison

$$\begin{aligned} x &= rcos(\theta) \\ y &= rsin(\theta) \end{aligned}$$





$$\begin{aligned} x &= f(u, v) \\ y &= g(u, v) \end{aligned}$$