

INTRODUCTION

Ricardo Camarero
Département de génie mécanique
20 janvier 2024



Table des matières

- 1 Concepts de base
- 2 Géométrie et topologie d'un maillage
- 3 Les systèmes de coordonnées
- 4 Maillages à frontières immergées
- 5 Critères de qualité



Motivation et contexte

Concepts de base et historique

Modélisation géométrique

Maillages structurés :

- Maillages curvilignes
- Interpolation transfinie
- Méthodes EDP : Elliptiques
- Concentration de mailles

Maillages non-structurés :

- Triangulation de Delaunay
- Maillages Delaunay contraints
- Méthode d'avance de front

Maillages hybrides :

- décomposition spatiale, hiérarchique.

Concepts de base

Qu'est-ce qu'un maillage ?

- 1 Un **partitionnement** de l'espace physique en un ensemble d'entités élémentaires,

Sommets → **Arêtes** → **Faces** → **Volumes**

avec,

- des propriétés géométriques (les coordonnées, dimensions) ;
- des informations topologiques (la connectivité),

et, qui s'imbriquent hiérarchiquement pour former un domaine de calcul selon leur dimension : zéro pour les sommets, un pour les arêtes, deux pour les faces et trois pour les volumes.

Ensemble, ces éléments forment,

- 2 Un **recouvrement** complet du domaine dans l'espace physique sans chevauchement, ni de vide entre ces entités.

Il s'agit d'un mécanisme pour l'organisation et la structuration d'un domaine géométrique pour fins de calculs.

Structure d'un maillage

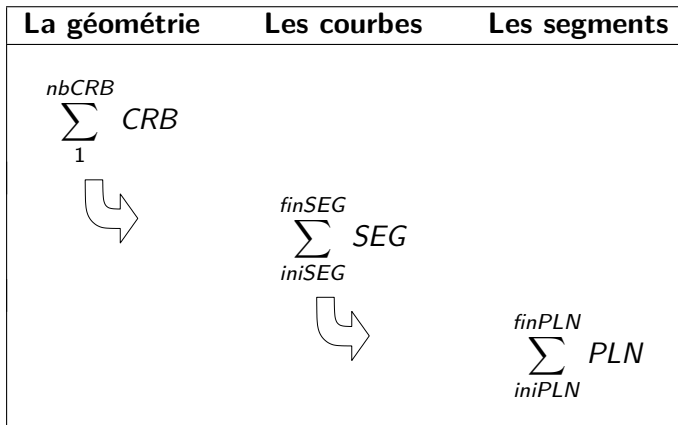
L'organisation d'un domaine pour fins de calculs comprend deux types d'informations :

- La géométrie** → Les coordonnées (x, y, z) d'un ensemble de sommets représentant la discrétisation des frontières, $\partial\Omega$, et du domaine Ω borné par ces frontières.
Ce sont des nombre réels
- La connectivité** → L'identification et les relations topologiques entre ces sommets.
On utilise des entiers ou des pointeurs.

- 1 Concepts de base
- 2 Géométrie et topologie d'un maillage
- 3 Les systèmes de coordonnées
- 4 Maillages à frontières immergées
- 5 Critères de qualité

Représentation géométrique d'un domaine

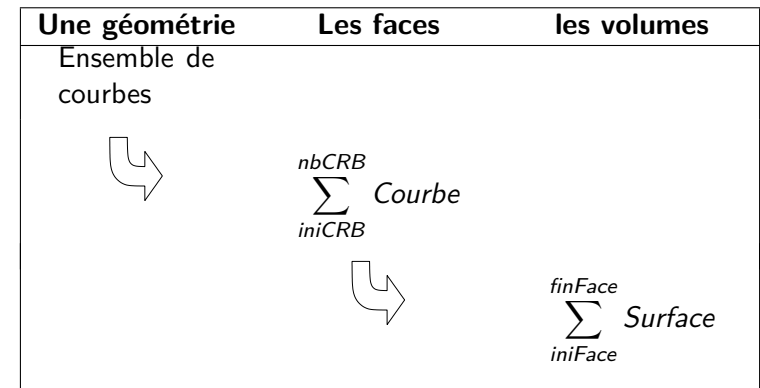
Le point de départ de la génération d'un maillage est une géométrie composée d'un ensemble de courbes dans l'espace physique.



Points de contrôle

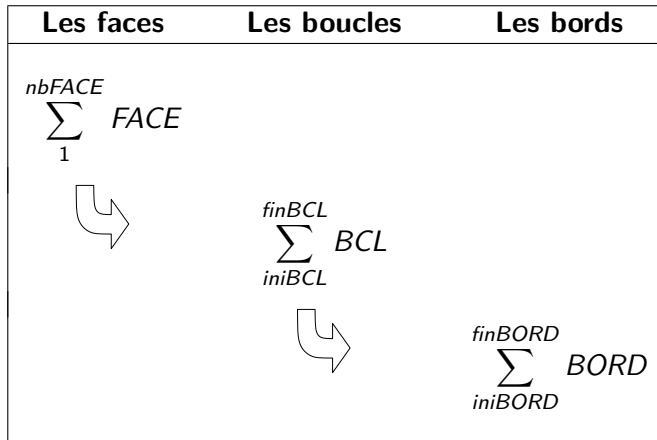
Le modèle géométrique

Une géométrie est obtenue par des opérations de modélisation sur un ensemble de courbes dans l'espace physique.



Le modèle topologique

Le maillage est la discrétisation du modèle topologique du domaine obtenu à partir de la géométrie.



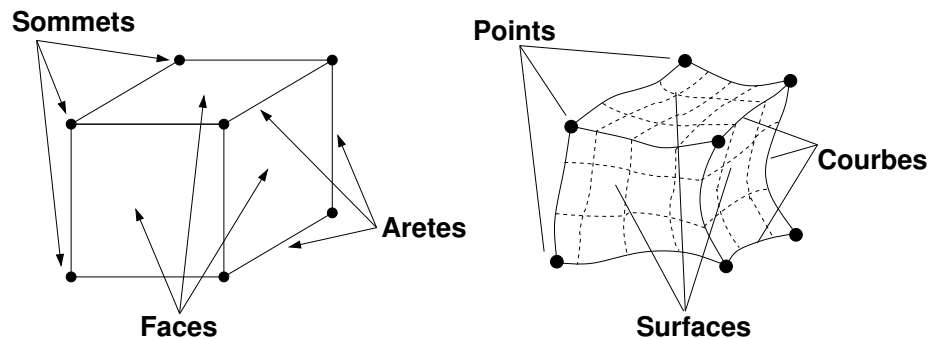
Entités topologiques d'un maillage

La discrétisation du domaine topologique donne lieu à deux maillages : *le maillage du bord* et *le maillage intérieur* du domaine, qui sont de dimension $(n-1)$ et n , respectivement.

| | Domaine Ω | Bord $\partial\Omega$ | Élément/ cellule |
|-----|---------------------|---------------------------|---|
| 1-d | Courbe | Deux noeuds | Segment |
| 2-d | Face plane | Boucle= \sum Courbes | Polygone : Triangle quadrangle, hexagone |
| 3-d | Volume | Coquille= \sum Surfaces | Polyèdre : Tétraèdre... hexaèdre, prisme, pyramide |

Liens entre la topologie et la géométrie

| | | |
|---------|---|----------|
| sommets | → | points |
| arêtes | → | courbes |
| faces | → | surfaces |



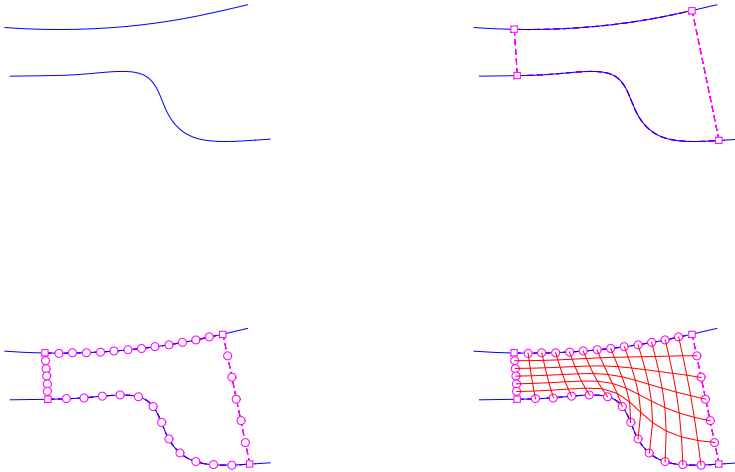
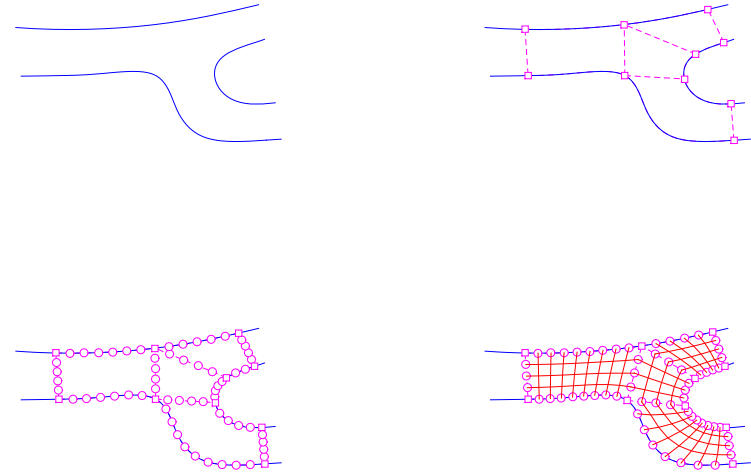
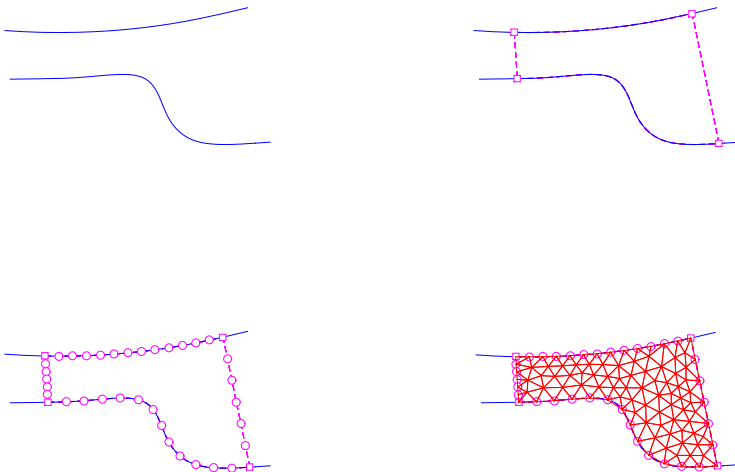
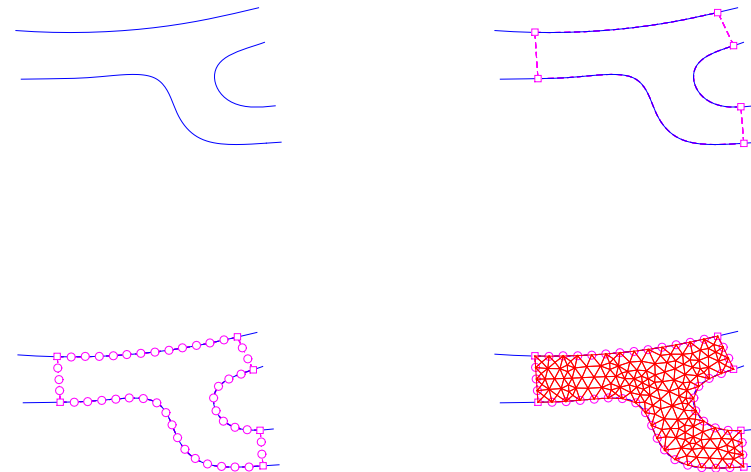
Le rôle d'un maillage

→ Quelle que soit la méthode de calcul, éléments finis, volumes finis ou différences finies, toutes nécessitent une discrétisation d'un domaine sur des géométries complexes.

→ Comme support à la discrétisation des équations différentielles, le maillage doit rencontrer un certain nombre d'exigences :

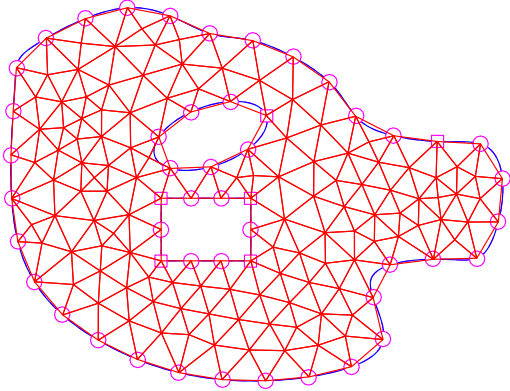
- représenter une discrétisation fidèle de l'espace et des frontières du domaine de calcul,
- discrétiser l'intérieur du domaine en fonction des équations et du phénomène simulé,
- permettre un contrôle sur la répartition, ainsi que la forme et la taille des éléments.

→ De par sa construction : régularité, répartition des sommets, le choix du type d'éléments/cellule ... le maillage joue un rôle critique dans l'atteinte de solutions stables.

Exemple 1 : Maillage structuré**Exemple 2 : Maillage structuré Multi-blocs****Exemple 3 : Maillage non-structuré****Exemple 4 : Maillage non-structuré**

Exemple : Maillage de triangles

Domaine 2d, non-simplement connexe, discrétisé avec des triangles, borné par 3 boucles discrétisées avec des segments 1d :



- 1 Concepts de base
- 2 Géométrie et topologie d'un maillage
- 3 Les systèmes de coordonnées
- 4 Maillages à frontières immergées
- 5 Critères de qualité

Les systèmes de coordonnées

Les systèmes de coordonnées classiques sont les premiers outils ou mécanismes pour l'organisation et la structuration d'un espace géométrique.

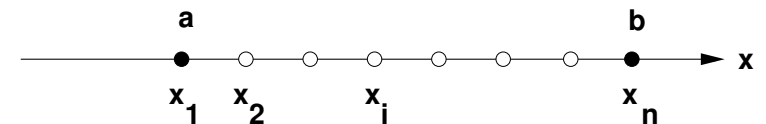
- 1 Ils permettent de localiser une entité dans l'espace, et de se repérer par rapport aux entités de son voisinage.
- 2 D'abord utilisés pour fins de d'analyse, ils sont à la base des premiers calculs numériques : méthodes d'intégration, méthodes d'Euler pour équations aux dérivées ordinaires, les différences divisées ou différences finies pour les équations aux dérivées partielles.
- 3 Dans ces premières utilisations, on discrétise l'espace en entier plutôt qu'un domaine fini !!!
- 4 Avec un maillage, ce n'est plus le système de coordonnées qui engendre l'espace du domaine, mais plutôt un ensemble de noeuds/sommets qui lui donne sa structure interne.

Maillage régulier 1-d

On construit un maillage élémentaire en partitionnant la droite, le domaine Ω , borné par $x = a$ et $x = b$ avec un pas de $h = (b - a)/(n - 1)$ où n est le nombre de sommets et $(n - 1)$ est le nombre d'éléments/cellules :

$$x_1 = a, \quad x_{i+1} = x_i + h, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

→ On identifie les noeuds du bord/frontière $\partial\Omega$, $x = a$ et $x = b$, par les indices 1 et n , respectivement :



→ On insère les noeuds intérieurs, indice i , et la connectivité des éléments/cellules i est définie par les noeuds x_i et x_{i+1} .

Maillages réguliers 2-d

La construction de maillages de dimension deux ou trois est réalisée par le produit tensoriel de maillages 1-d alignés avec les directions x , y ou z . Ce qui donne,

→ un maillage régulier construit avec les lignes d'un système de coordonnées classique : cartésien, polaire .. en dimension deux, ou bien cylindrique, sphériques en dimension trois.

→ pour un domaine rectangulaire $(a, b) \times (a, c)$, avec, dans la direction x ,

$$x_1 = a, \quad x_{i+1} = x_i + h_x, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

où $h_x = (b - a)/(m - 1)$. Pour la direction y ,

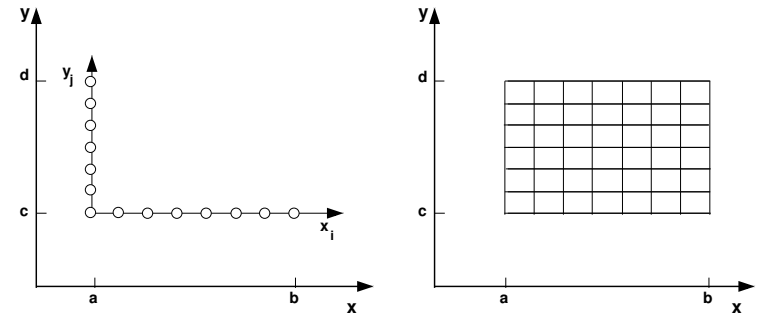
$$y_1 = a, \quad y_{j+1} = y_j + h_y, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

où $h_y = (c - a)/(n - 1)$.

Maillage Cartésien régulier 2-d

Le maillage est caractérisé par :

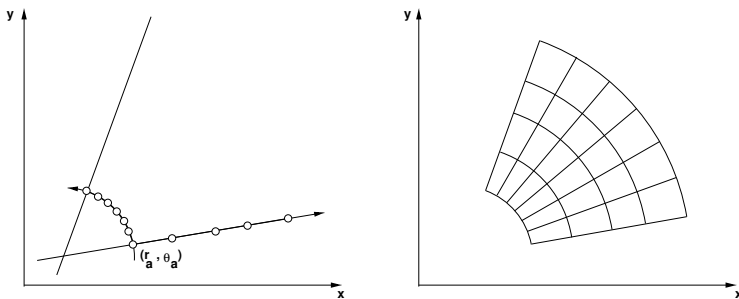
- un patron qui se répète, avec le même nombre de noeuds autour d'un sommet ;
- un réseau de deux familles de lignes (trois familles de surfaces en 3-d) ;
- les courbes (surfaces en 3-d) sont orthogonales ;



Maillage Polaire régulier 2-d

Le maillage est caractérisé par :

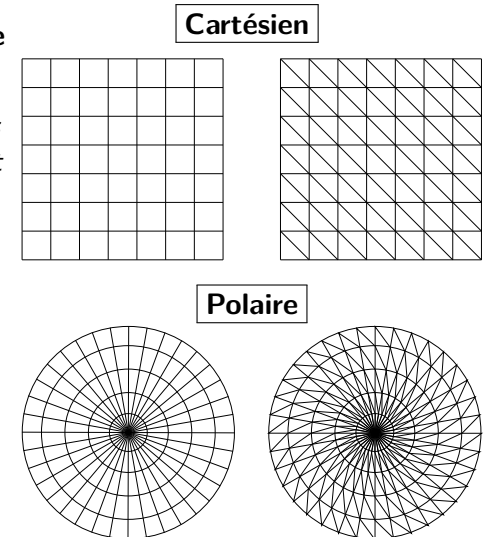
- un patron qui se répète, avec le même nombre de noeuds autour d'un sommet ;
- un réseau de deux familles de lignes (trois familles de surfaces en 3-d) ;
- les courbes (surfaces en 3-d) sont orthogonales ;

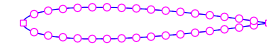
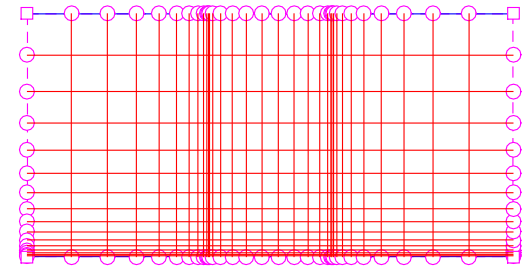
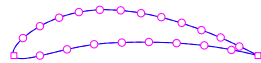
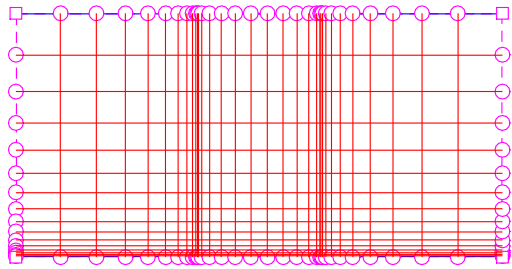


Maillages structurés réguliers en 2D

Selon le choix du système de coordonnées,

- on forme les éléments/cellules dont la forme géométrique est un polygone (polyèdre) qui dépend du système de coordonnées.
- en pratique, on retrouve soit des quadrangles ou des triangles.
- la géométrie du domaine est limitée par le choix du système de coordonnées.





Critique

Dans quelle mesure l'utilisation d'un système de coordonnées, atteint les buts attendus d'un maillage ?

✓ **Facilité de calcul** Les noeuds (x_i, y_j) par le produit tensoriel des maillages de $1d$, $x_i \times y_j$.

✓ **Efficacité de stockage** On peut désigner chaque noeud (i, j) par un seul indice $l = (j - 1)(m + 1) + i$.

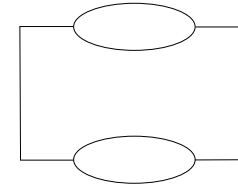
✗ **Représentation fidèle des frontières du domaine de calcul.** Limitée par le choix du système de coordonnées à des géométries conformes à ces repères.

Les frontières doivent coïncider avec les lignes du système de coordonnées.

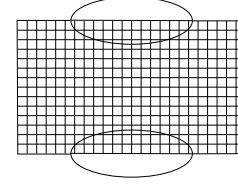
- ① L'approche basée sur les systèmes de coordonnées s'est avérée performante pour discrétiser l'espace, mais échoue sur la capacité à discrétiser un domaine et ses frontières qui est la fonctionnalité première d'un maillage !
- ② De plus, ce qui limite davantage leur utilité, il n'est pas possible d'entrevoir des possibilités quant aux objectifs suivants :
 - Discrétisation de l'intérieur du domaine en fonction des équations et du phénomène simulé.
 - Contrôle sur la répartition, ainsi que la forme et la taille des éléments.
- ③ On doit envisager de nouvelles approches :
 - Maillages à frontières immergées
 - Maillages curvilignes
 - Maillages nonstructurés

- 1 Concepts de base
- 2 Géométrie et topologie d'un maillage
- 3 Les systèmes de coordonnées
- 4 Maillages à frontières immergées
- 5 Critères de qualité

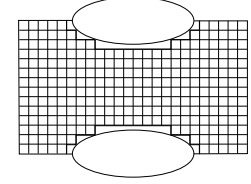
Première approche



On superpose la géométrie sur une grille cartésienne

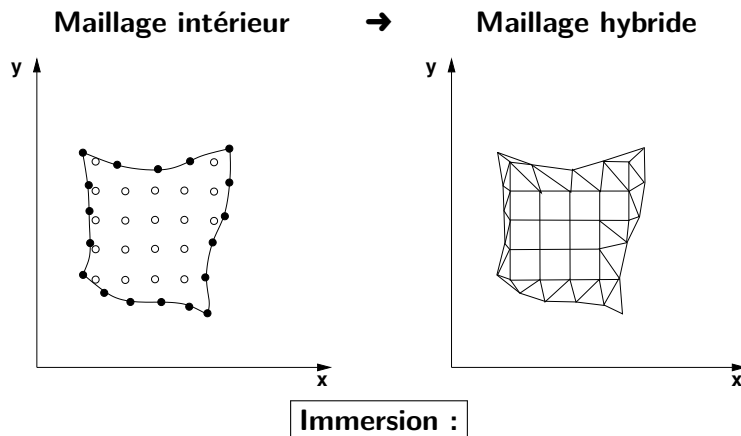


On retire les mailles externes au domaine



On obtient une représentation de la géométrie par une castelisation (découpage en escalier) qui diminue la facilité de calcul, et au coût d'une structure de données alourdie.

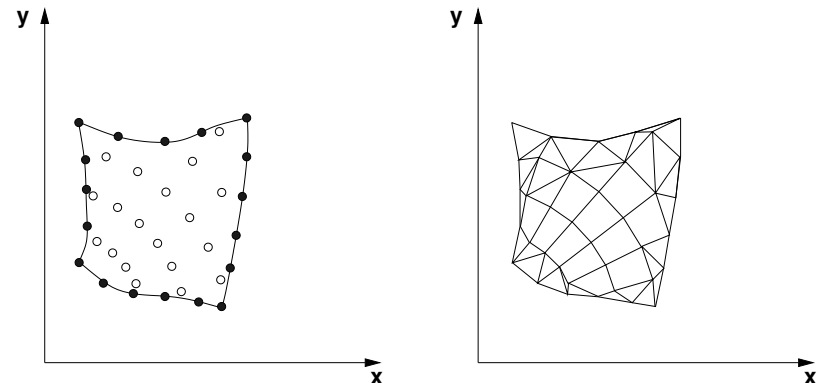
Frontières immergées : découpage



- 1 On superpose la géométrie sur une grille cartésienne ;
- 2 Discrétisation du domaine et des frontières ;
- 3 On retire les mailles externes au domaine.
- 4 Raccordement du maillage intérieur avec les frontières.

Maillages superposés polaire

Raccordement du maillage intérieur avec la discrétisation des frontières

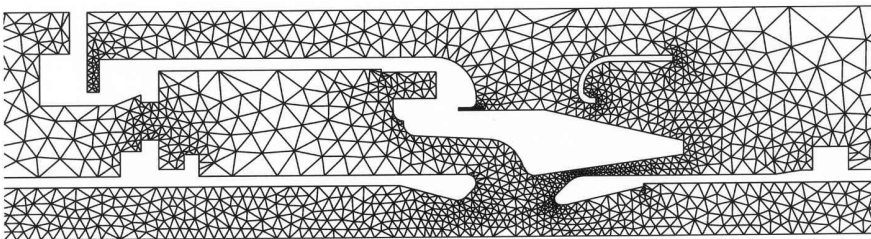


Quelles sont les améliorations ?

- ✓ **Représentation conforme des frontières du domaine de calcul.**
- ✓ **Génération du maillage** Cette opération est réalisée selon les étapes suivantes :
 - *Discrétisation des frontières* ;
 - *Discrétisation de l'intérieur du domaine basée sur un maillage régulier (cartésien, polaire...)* ;
 - *Tri des noeuds intérieurs/extérieurs* ;
 - *Raccordement du maillage frontière (1-d) avec le maillage intérieur (2-d, quadrangles /triangles) par l'insertion des mailles triangulaires.*
- ✗ **Sur le plan informatique, il en découle une diversité d'opérations nouvelles, nécessitant des structures de données plus complexes.**

L'ensemble de ces constatations fait ressortir les défis que pose la génération de maillages.

Maillages non-structurés



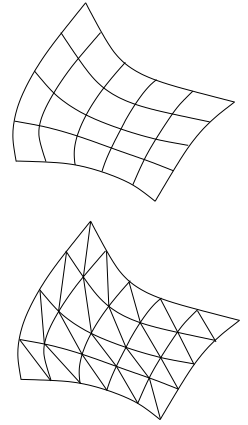
- *le maillage épouse les frontières du domaine.*
- *aucunes lignes ou courbes de maillage apparentes dans le réseau ;*
- *absence de patron ;*
- *le nombre d'éléments autour d'un noeud est variable ;*

La forme géométrique des éléments est un polygone quelconque mais en pratique on retrouve des quadrangles et surtout des triangles.

Maillages structurés curvilignes

Les caractéristiques sont :

- *le maillage épouse les frontières du domaine.*
- *un réseau de lignes ou de courbes de maillage est apparent ;*
- *variation monotone des lignes de maillage entre les bords du domaine ;*
- *un patron de sommets et d'éléments qui se répète ;*
- *le nombre d'éléments autour d'un noeud est le même partout ;*



En pratique, la forme géométrique des éléments est soit des quadrangles (hexahédres) ou des triangles (tétraèdres).

- 1 Concepts de base
- 2 Géométrie et topologie d'un maillage
- 3 Les systèmes de coordonnées
- 4 Maillages à frontières immergées
- 5 Critères de qualité

Caractéristiques d'un "bon maillage"

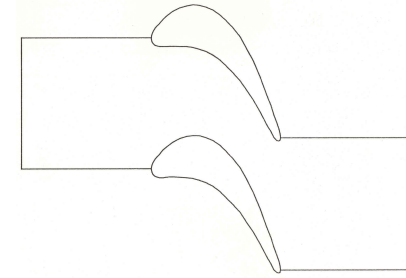
La discrétisation doit tenir compte de critères portant sur :

la géométrie :

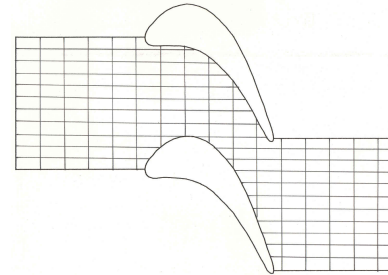
- 1 la conformité à la géométrie du problème ;
- 2 la possibilité d'adaptativité selon la physique du phénomène,
 - concentration et régularité des sommets ;
 - étirement des mailles.
- 3 la forme des éléments.

la mise en oeuvre informatique :

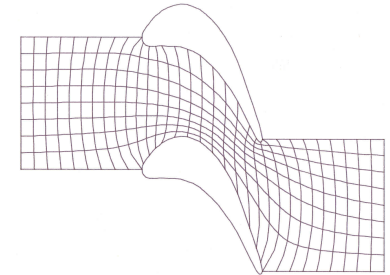
- 1 on recherche en pratique des algorithmes de calcul généralisés ;
 - indépendants de la complexité géométrique, et où les frontières sont des données du problème ;
 - une organisation et un stockage efficace des éléments.



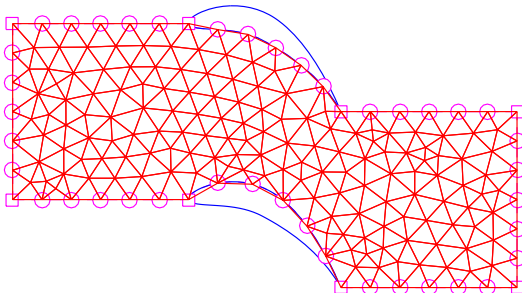
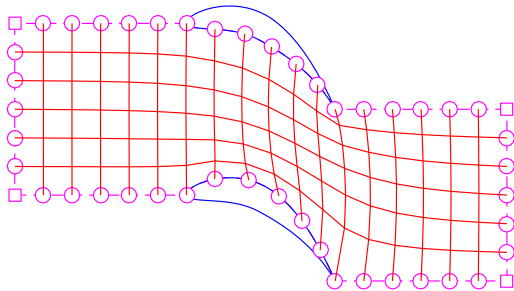
Maillages superposés



Maillages curvilignes



Quel est le meilleur ? Selon quel critère ?



Le défi

Avec les systèmes de coordonnées classiques :

- on discrétise l'espace en entier plutôt qu'un domaine fini !!!
- la prise en compte des frontières du domaine est difficile ;

Caractéristiques recherchées :

- Intégration avec les modélisateurs géométriques ;
- Prise en compte des frontières du domaine ;
- Possibilités d'adaptation ;
- Variété d'élément/cellule et structure de données efficace ;
- Rapidité de calcul ;
- Minimiser les interventions de l'utilisateur, c-à-d automatique.

→ D'où la difficulté et le défi de la génération automatique de maillages.

Attentes d'un maillage

Pour des simulations numériques de haute fidélité avec la physique, la discrétisation doit tenir compte de plusieurs critères :

Représentation précise de la géométrie :

- la fidélité du maillage par rapport à la géométrie du problème ;
- alignement avec les frontières ;
- orthogonalité des lignes du maillage.

Organisation et un stockage efficace des éléments :

- la forme des éléments.
- structures de données.

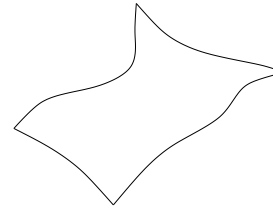
Adaptativité à la physique du phénomène étudié :

- concentration des mailles en fonction des zones d'intérêts ;
- étirement des mailles pour des phénomènes anisotropes ;
- régularité de la taille des éléments.

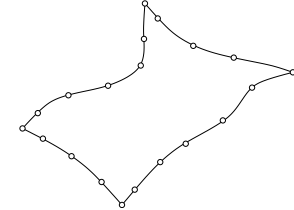
Choix des éléments : maillages structurés

Une même géométrie peut être maillée soit avec des quadrangles ou de triangles structurés :

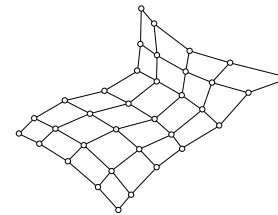
Frontière du domaine



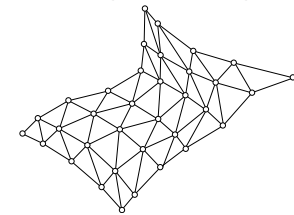
Discrétisation du bord



Maillage de quadrangles

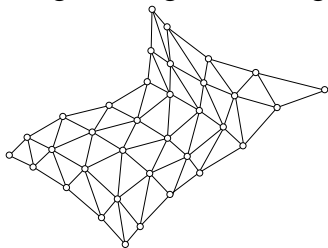


Maillage de triangles

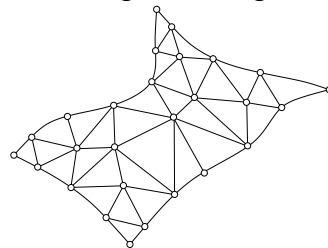


Cette même géométrie peut aussi être maillée avec des triangles en nonstructuré :

Maillage curviligne de triangles



Maillage de triangles



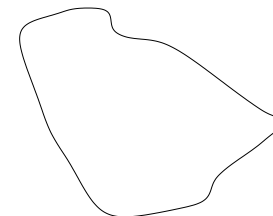
On a alors un maillage nonstructuré caractérisé par,

- une absence de patron ;
- un nombre d'éléments autour d'un noeud variable ;
- aucunes lignes ou courbes de maillage apparentes dans le réseau ;
- une représentation fidèle de la géométrie ;
- ce qui permet plus de flexibilité quant à l'adaptation.

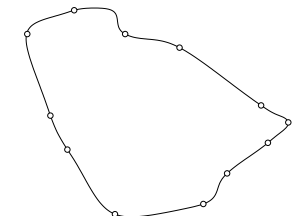
Forme des éléments nonstructurés

Une même géométrie peut être maillée soit avec des triangles ou des quadrangles nonstructurés.

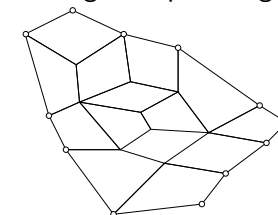
Frontière du domaine



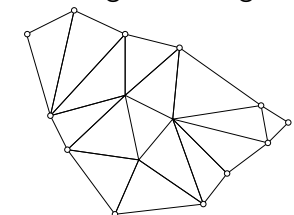
Discrétisation du bord



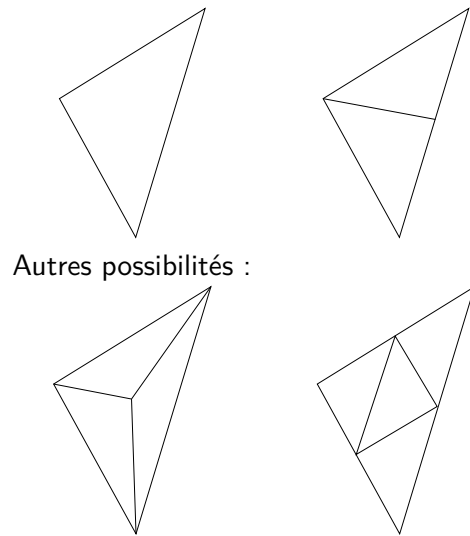
Maillage de quadrangles



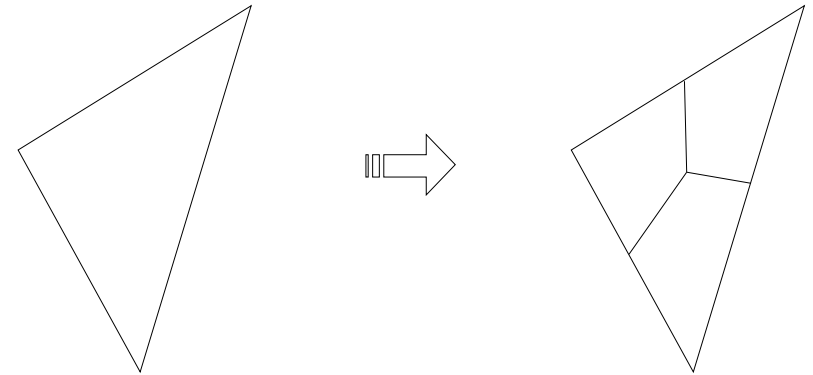
Maillage de triangles



Modification de la forme : Triangle → Triangles



Modification de la forme : Triangle → Quadrangles

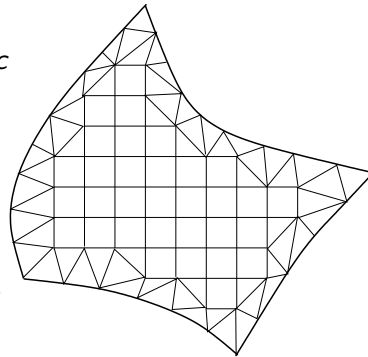


Maillages hybrides

Les maillages hybrides sont composés de plusieurs type d'éléments regroupés en zones, certaines structurées, d'autres nonstructurées.

→ Généralement, on trouve,

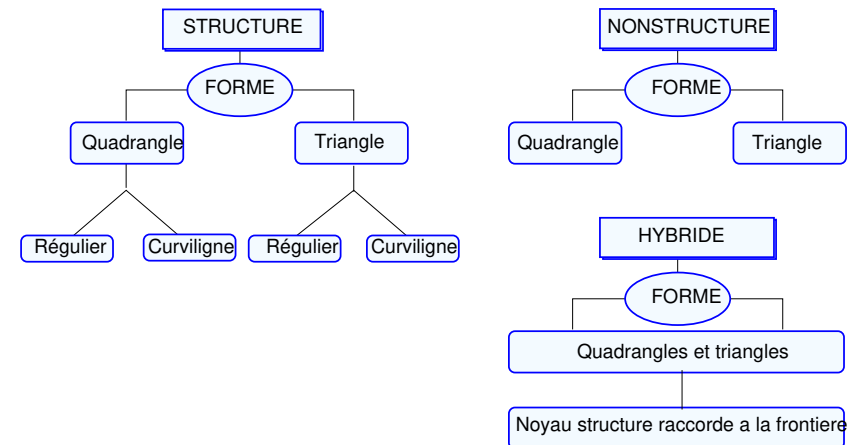
- un noyau interne qui est structuré, donc facile à générer avec des systèmes de coordonnées.
- un raccordement avec la frontière, plus ou moins complexe pour obtenir une bonne représentation géométrique.
- C'est le cas, par exemple, des maillages superposés vus précédemment.



→ Strictement parlant, ce sont des maillages non structurés sur le plan des opérations informatiques et des structures de données.

Classification des maillages

Les maillages sont caractérisés selon leurs propriétés topologiques, ou la forme géométrique des éléments/cellules :



Classification des Maillages

Structurés : curvilignes et ajustés

- méthodes algébriques et interpolation transfinie ;
- transformations conformes ou analytiques ;
- méthodes différentielles.

Nonstructurés : adhérence aux frontières

- triangulation de Delaunay ;
- Delaunay contraint ;
- méthode de Lawson et retournement d'arêtes ;
- avance de front : placement des noeuds et collisions ;
- méthodes adaptatives ;
- méthodes hiérarchiques.