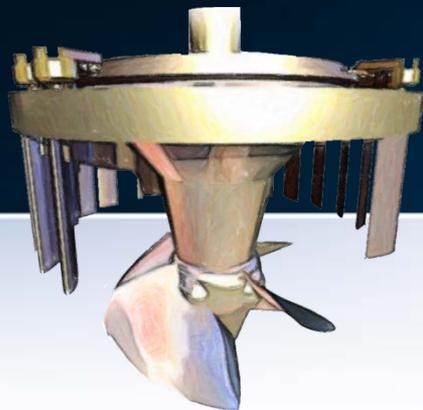


# Turbomachines



**NRJ EN ROTATION**

# Similitude et nombres adimensionnels

*En connaître un, c'est les connaître tous (proverbe latin)*

*Citation du livre **Fluid Mechanics and Thermodynamics of Turbomachinery** de **S.L.Dixon***



# Introduction

Dans le domaine des turbomachines, **l'objectif** de la similitude est de comparer les performances entre des machines dites **similaires**, ou entre un modèle réduit et un prototype

Cette comparaison ou analyse, qui vise la conception, s'effectue en termes de **variables non dimensionnelles**

Dans ce contexte nous allons

# OBJECTIFS

- Rappeler les notions de similitude et d'analyse dimensionnel
- Présenter les paramètres de similitude employés dans les turbomachines
- Décrire des formes particulières de ces coefficients pour divers types d'appareils
- Regarder les cartes utilisées pour étudier les compresseurs et les turbines à gaz et hydrauliques

# OBJECTIFS

- Présenter le concept de vitesse spécifique
- Examiner l'utilité du diagramme de Cordier
- Analyser la similitude dans les pompes

# Introduction

La spécification fondamentale d'une turbomachine concerne:

- le débit
- la nature du fluide(gaz, liquide)
- la quantité de travail à échanger
- l'état à l'entrée

# Introduction

À partir de ces spécifications on peut:

- sélectionner le type de machine (axiale, radiale, mixte) ;
- effectuer un dimensionnement préliminaire et estimer sa performance

En réponse à une nouvelle spécification, la **mise à l'échelle** d'une machine existante, est une démarche utilisée en industrie visant ce dimensionnement préliminaire. Cette étape permettra la **réduction de la durée des cycles** de développement

# Introduction

L'**analyse dimensionnelle** fournit un support théorique à cette première étape de conception. Elle incorpore des **nombres adimensionnels** dont leur valeur peut être interprétée comme une partie de l'ADN de chaque appareil

La richesse du formalisme des nombres sans dimension permet la génération de **familles de machines dites similaires**, la prédiction de leur performance et un guide pour la construction de prototypes

# Similitude

Pour effectuer une conception agile, on vise le transport des caractéristiques connues d'une turbomachine vers une autre.  
Pour ce faire on a besoin que:

les **dimensions** respectives soient à l'échelle

les **rappports de vitesses** soient égaux en tout point (les lignes du courant soient similaires)

les **rappports des forces inertie/autres** soient égaux

# Similitude

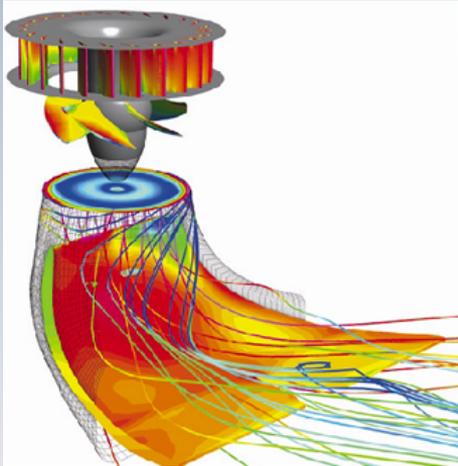
On doit alors satisfaire trois conditions de similitude différentes:

**géométrique**

**cinématique**

**dynamique**

# Du modèle au prototype



Modèle virtuel



Maquette de laboratoire



Prototype



# Similitude géométrique

**La similitude géométrique**, traite du rapport d'échelle géométrique, soit ce qui concerne la dimension  $L$

Bien qu'elle soit conceptuellement simple, cette similitude se voit confrontée à des difficultés pratiques pour la satisfaire pleinement

Par exemple, la similitude pour la rugosité relative d'une surface n'est pas évident à réaliser, ou encore, reproduire à l'échelle les dimensions à certains endroits d'une turbomachine, comme la séparation entre la pale et le carter, s'avère très difficile

# Similitude géométrique

Pour palier ces faiblesses, **des corrections empiriques**, souvent confidentielles, sont appliquées par les manufacturiers pour transposer les données obtenus lors des essais sur le modèle vers le prototype

# Similitude cinématique

**La similitude cinématique** traite de l'échelle temporelle  $T$

En pratique, elle est satisfaite à travers de **rapports de vitesse** et/ou d'**accélération**

# Similitude dynamique

**La similitude dynamique** ajoute la dimension fondamentale  $M$ , soit la masse

En génie, on considère qu'elle est vérifiée si **les rapports entre diverses forces et la force d'inertie** sont égaux

# Références

Dans les turbomachines, la référence pour l'échelle géométrique correspond à un **diamètre  $D$**

La référence pour la vitesse c'est sous la forme d'une **vitesse circulaire  $U$**

Pour les forces, l'échelle est référée à la **force d'inertie  $F_i$**

# Similitude

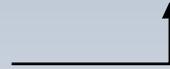
## Géométrie

Rapport de longueurs



$$\left(\frac{l}{D}\right)_m = \left(\frac{l}{D}\right)_p$$

modèle



prototype



## Cinématique

Rapport de vitesses



$$\left(\frac{c_{x,m}}{U}\right)_m = \left(\frac{c_{x,m}}{U}\right)_p$$

## Dynamique

Rapport de forces



$$\left(\frac{F_i}{F_x}\right)_m = \left(\frac{F_i}{F_x}\right)_p$$

**$F_x = ?$**

# Les rapports de forces

Pour la similitude dynamique, en génie mécanique on s'intéresse au rapport de la force **d'inertie**  $\vec{F}_i$  aux forces **visqueuses**  $\vec{F}_{visq}$ , **de pression**,  $\vec{F}_{press}$ , **gravitationnelles**  $\vec{F}_{grav}$ , et **élastiques**  $\vec{F}_{élas}$

L'action de ces forces entrainera l'accélération d'un fluide décrite par la 2ème loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{press} + \vec{F}_{visq} + \vec{F}_{élas} = m\vec{a}$$

# Les rapports de forces

Si l'on remarque que la force d'inertie,  $\vec{F}_i$ , agit dans le sens contraire de l'accélération ( $\vec{F}_i = -m\vec{a}$ ), on peut s'écrire

$$\vec{F}_{grav} + \vec{F}_{press} + \vec{F}_{visq} + \vec{F}_{elas} + \vec{F}_i = 0$$

En ne considérant que **les modules de ces forces**, une (pseudo) équation adimensionnelle peut être obtenue en prenant comme référence la force d'inertie. Notamment:

$$\frac{F_{grav}}{F_i} + \frac{F_{press}}{F_i} + \frac{F_{visc}}{F_i} + \frac{F_{elas}}{F_i} + 1 = 0$$

# Les rapports de forces

Ces rapports adimensionnels (ou l'inverse  $F_i/F$ ) des **modules des forces** ont été associés à l'ouvrage de scientifiques et on a introduit des abréviations qui rappellent leurs noms

$$\frac{F_{grav}}{F_i} + \frac{F_{press}}{F_i} + \frac{F_{visc}}{F_i} + \frac{F_{elas}}{F_i} + 1 = 0$$

<b>Froude</b>	<b>Euler</b>	<b>Reynolds</b>	<b>Mach</b>
Fr	Eu	Re	Ma

Ces nombres représentent des **intensités relatives de forces**

# Universalité

L'importance de ces intensités relatives réside dans le fait que nous pouvons écrire des **équations adimensionnelles** décrivant le mouvement d'un fluide et que celles-ci sont **UNIVERSELLES**

Universelles signifie qu'elles sont valables indépendamment des propriétés du fluide:  $(\mu, \rho)$ , de l'espace  $(L)$ , des caractéristiques de l'écoulement (pression  $p$ , accélération  $\vec{a}$ , élasticité  $E$ ), et du champ gravitationnel  $\vec{g}$

# Les forces en image

Voici un cas imagé illustrant les forces présentes dans un écoulement permanent incompressible (non élastique).

Les forces, présentes sont notés par :

$F_g$  force gravitationnelle

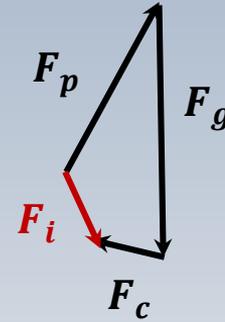
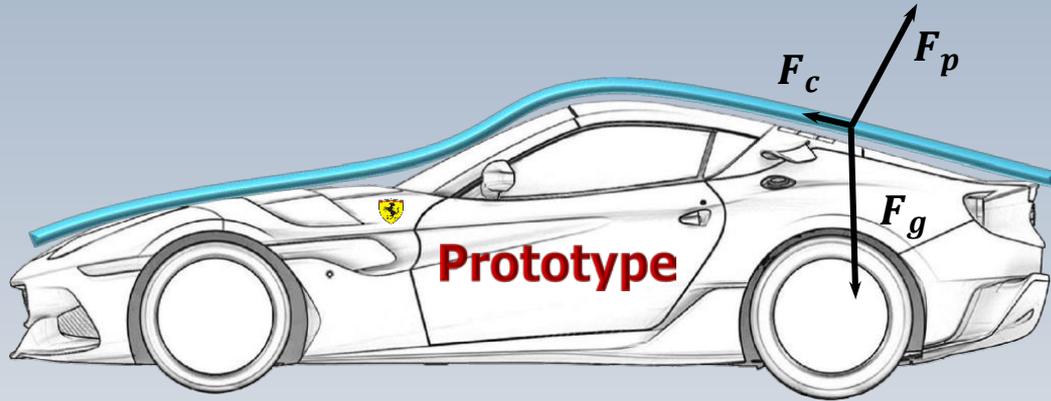
$F_c$  force de cisaillement

$F_p$  force de pression

$F_i$  force d'inertie

Le reste des symboles indiquent;  $L$ : longueur,  $A$ : aire,  $m$ : masse,  $\mu$ : viscosité dynamique,  $V$ : vitesse,  $g$ : accélération gravitationnelle,  $T$ : temps,  $a$ : accélération

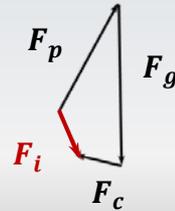
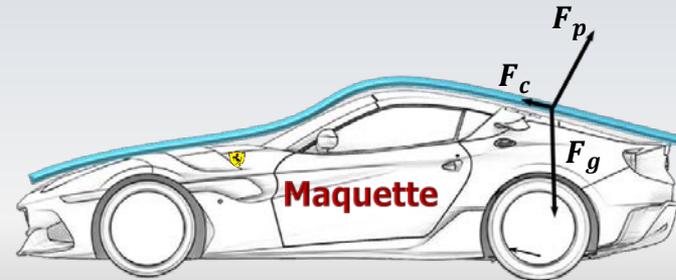
# Les forces en image



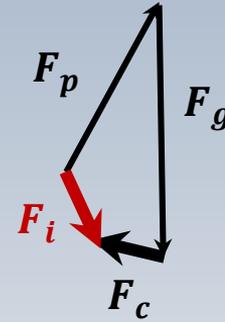
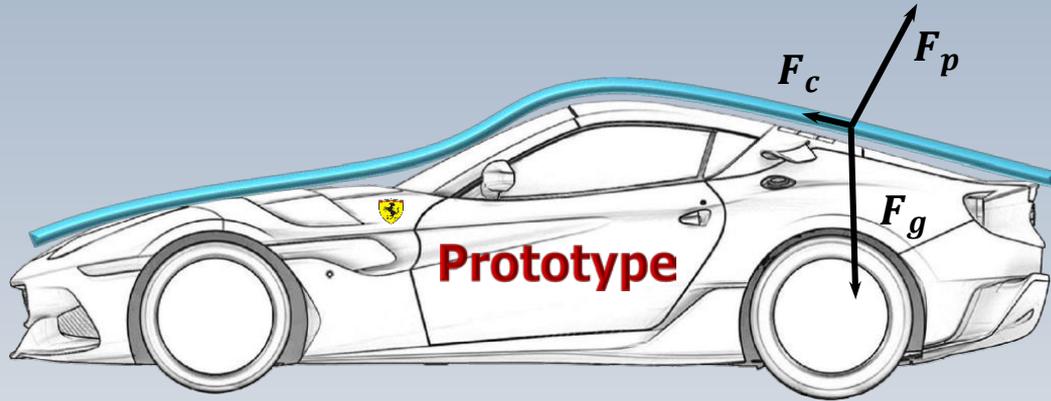
$$F_i = ma \sim \rho L^3 (L/T^2) = \rho L^2 V^2$$

$$F_c = A\mu \partial V / \partial n \sim L^2 \mu V / L = \mu L V$$

$$F_g = mg \sim \rho L^3 g$$



# Les rapports de forces

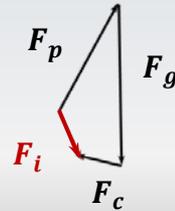
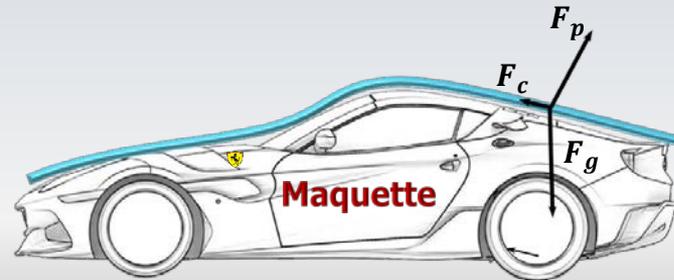


$$F_i \sim \rho L^2 V^2$$

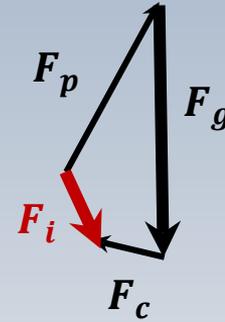
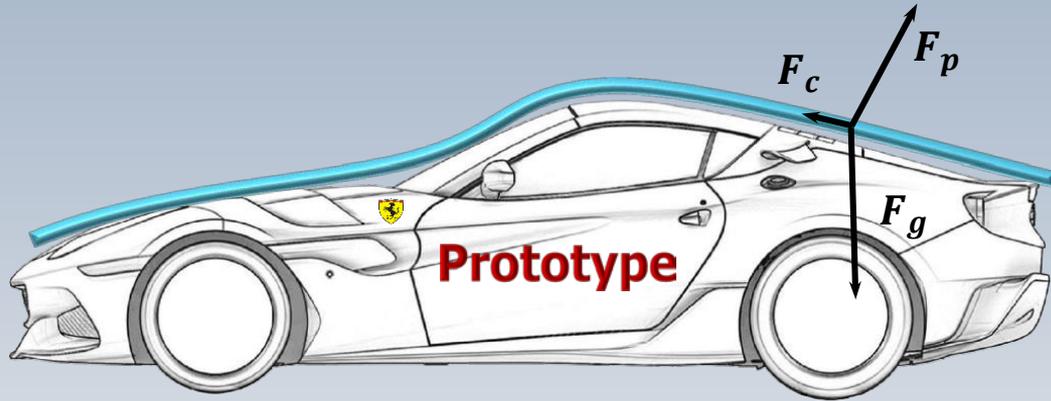
$$F_c \sim \mu L V$$

$$\left( \frac{F_i}{F_c} \right)_p = \left( \frac{F_i}{F_c} \right)_m = \frac{\rho L^2 V^2}{\mu L V} = \frac{\rho L V}{\mu} = \text{Re}$$

Similitude de Reynolds



# Les rapports de forces

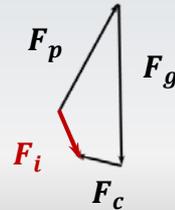
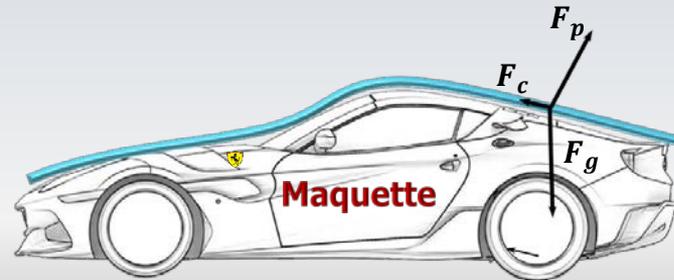


$$F_i \sim \rho L^2 V^2$$

$$F_g \sim \rho L^3 g$$

$$\left( \frac{F_i}{F_g} \right)_p = \left( \frac{F_i}{F_g} \right)_m = \frac{\rho L^2 V^2}{\rho L^3 g} = \frac{V^2}{gL} = Fr^2$$

Similitude de Froude



# Transfert d'information

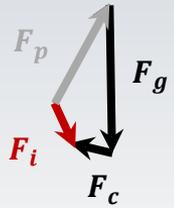
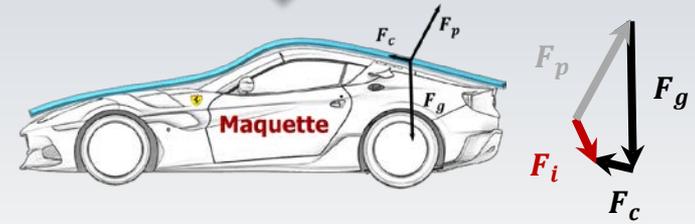
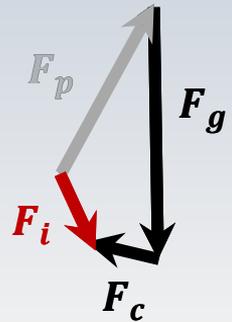
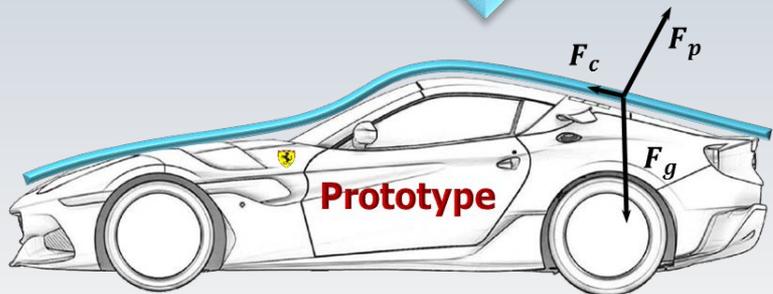
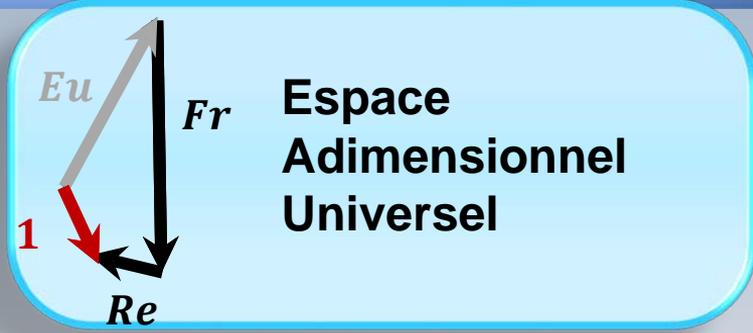
L'étude dans un cas réel (prototype) au moyen d'un modèle réduit (maquette), utilise le potentiel des nombres adimensionnels décrivant des rapports de forces

Les valeurs de ces quantités sont uniques pour chaque cas et agissent comme des “adaptateurs” entre deux mondes ayant des grandeurs physiques et géométriques différentes

L'image suivante veut illustrer la communication entre une maquette et un prototype via l'espace adimensionnel

# Transfert d'information

Froude  $\frac{L_p}{L_m}$  Reynolds  
Fr Re



# Le cadre général

Dans un contexte général, les regroupements sans dimension et bien d'autres peuvent être trouvés au moyen de l'utilisation du **Théorème  $\pi$**

# Rappel : le Théorème $\pi$

Le théorème  $\pi$  de Vaschy-Buckingham affirme que toute loi physique peut se réduire à un nombre minimal d'inconnues en introduisant des variables sans dimension (notées  $\pi_i$  )

Si un phénomène est décrit par  $N$  variables physiques, exprimées à l'aide de  $J$  dimensions fondamentales, il est alors possible de définir un problème adimensionnel équivalent comme une fonction de  $N-J$  grandeurs sans dimension

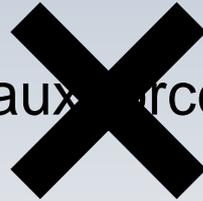
# Similitude dynamique en TM

## Reynolds

rapport des forces d'inertie aux forces visqueuses

## Froude

rapport des forces d'inertie aux forces gravitationnelles



## Mach

rapport des forces d'inertie aux forces élastiques



# Le coefficient de débit $\Phi$

$$\Phi = \frac{c_{x,m}}{U} = \frac{\dot{m} / \rho A}{N D / 2} \quad \begin{array}{l} (\dot{m} = \rho c_{x,m} A) \\ (U = N D / 2) \end{array}$$



$$\Phi = \frac{\dot{m}}{\rho N D^3}$$

$N$ : vitesse de rotation  
 $D$ : diamètre du rotor

(Le facteur 2 est négligé)

# Le coefficient de charge $\psi$

$$\psi = \frac{W_e}{U^2} \quad (U = N D / 2)$$

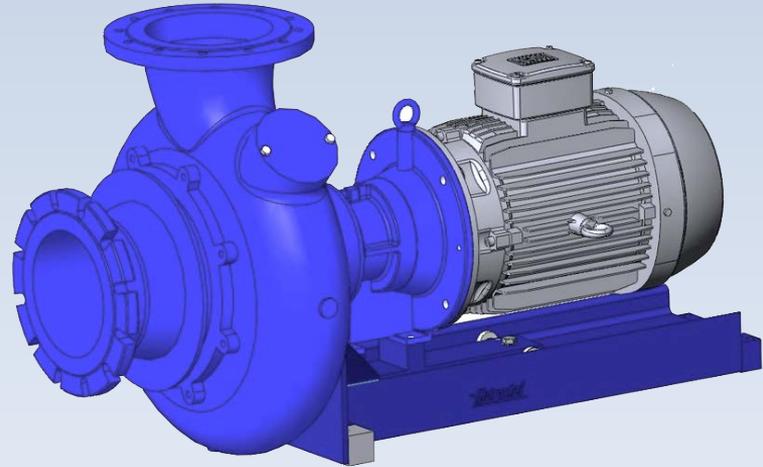
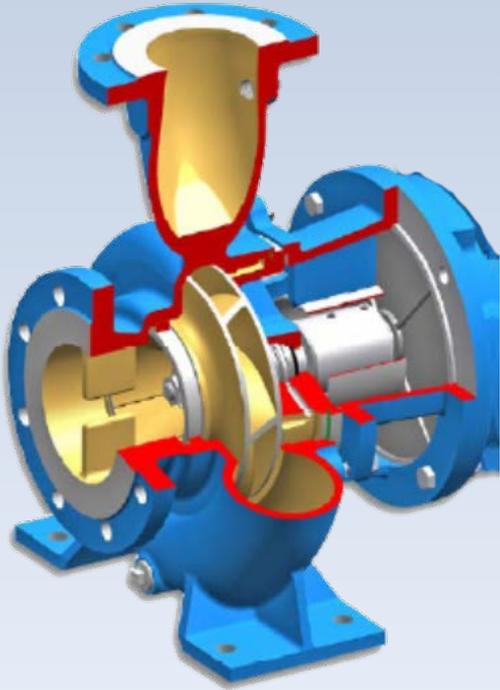


$$\psi = \left( \frac{W_e}{N^2 D^2} \right)$$

(Le facteur 2 est négligé)

# Formes particulières

# Les pompes



$$\dot{m} = \rho Q \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{\dot{m}}{\rho N D^3} \quad \Rightarrow$$

$$\Phi = \frac{Q}{N D^3}$$

$$W_e = gH \quad \Rightarrow \quad \Psi = \frac{W_e}{N^2 D^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Psi = \frac{gH}{N^2 D^2}$$

# Relations entre coefficients

Ces deux coefficients adimensionnels de similitude  $\Phi$  et  $\Psi$ , ainsi que **le rendement  $\eta$** , caractérisent ce type de turbomachine. En pratique, il est d'usage d'exprimer un en fonction des autres

Tout le long de ce cours, le fluide a été considéré sans viscosité, mais dans un contexte plus large, il faudra en tenir compte. Dans le monde adimensionnel, l'influence de la **viscosité** se manifeste dans le **nombre de Reynolds**

On peut écrire alors

# Relations pour les pompes

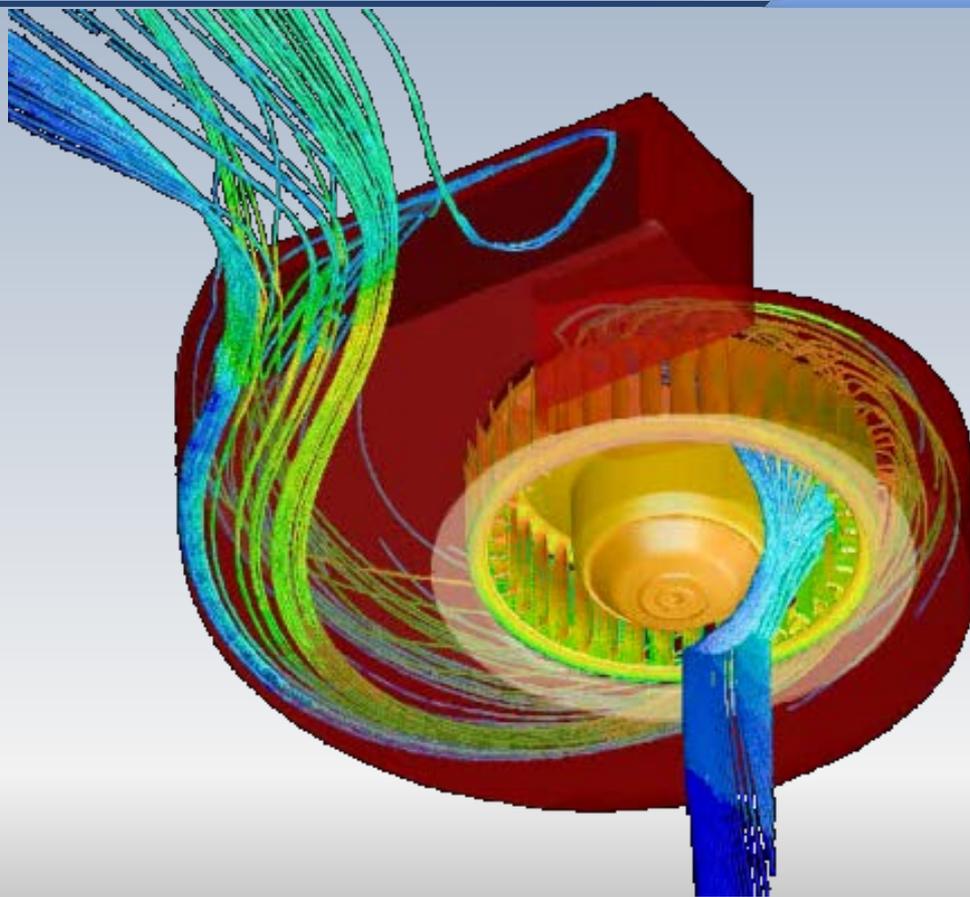
$$\Psi = f(\Phi, \text{Re}, \text{Géo})$$

$$\frac{gH}{N^2 D^2} = f\left(\frac{Q}{ND^3}, \square, \frac{l_i}{D}\right)$$

Une formulation similaire peut être imaginée pour le rendement

$$\eta = g\left(\frac{Q}{ND^3}, \square, \frac{l_i}{D}\right)$$

# Ventilateurs



# Faible nombre de Mach

À partir de quelle vitesse peut-on considérer l'écoulement d'un fluide compressible comme étant incompressible?

Le consensus établie indique qu'un **écoulement dont le nombre de Mach satisfait  $M < 0.3$ , peut être traité comme étant incompressible**

Ce critère, peut être expliqué si l'on regarde la relation entre la pression statique et la pression totale (d'arrêt ou de stagnation):

$$\frac{p_0}{p} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)^{\gamma/\gamma - 1}$$

# Rappel

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{\gamma/\gamma-1} \Rightarrow p_0 - p = \frac{1}{2} \rho V^2 \left(1 + \frac{Ma^2}{4} + O(Ma^4)\right)$$

Pour  $Ma < 0.3$



$$p_0 - p \approx \frac{1}{2} \rho V^2$$

Pression dynamique

# Ventilateurs

L'écoulement dans un ventilateur est à faible nombre de Mach ( $\approx$  *incompressible*).

Le coefficient de débit  $\Phi$  sera ainsi basé sur le débit volumique  $Q$ , et le coefficient de charge  $\Psi$  sur la variation de pression  $\Delta P$  entre l'amont et l'aval du rotor

$$\Phi = \frac{Q}{ND^3}$$

$$\Psi = \frac{\Delta P / \rho}{N^2 D^2}$$

# Ventilateurs: coefficients

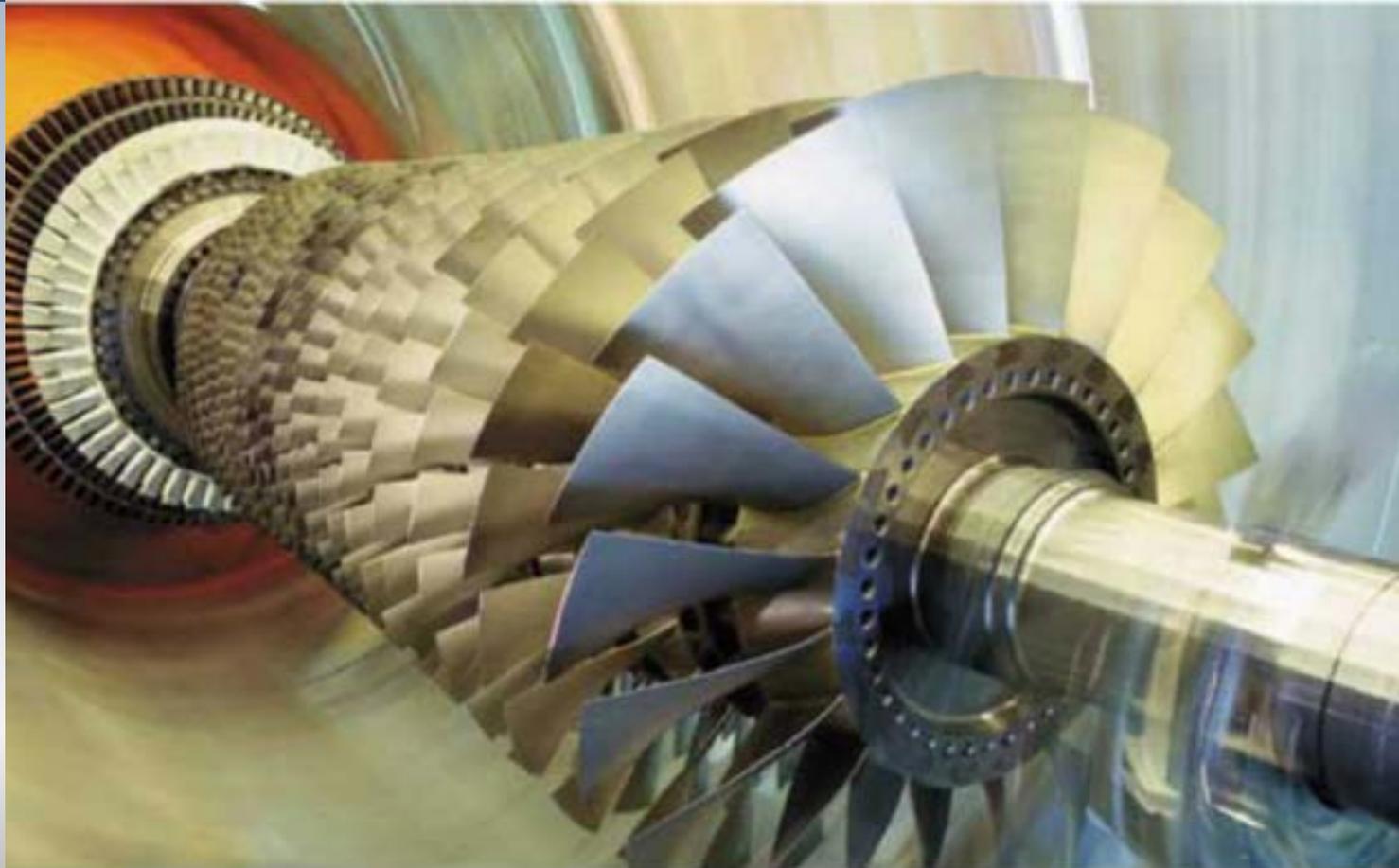
$$\Psi = f(\Phi, \text{Re}, \text{Géo})$$

$$\frac{\Delta P / \rho}{N^2 D^2} \Rightarrow = f\left(\frac{Q}{ND^3}, \square, \frac{l_i}{D}\right)$$

et pour le rendement

$$\eta = g\left(\frac{Q}{ND^3}, \square, \frac{l_i}{D}\right)$$

# Compresseurs et turbines à gaz



# Nombre de Mach et $\gamma$

Dans **un compresseur ou dans une turbine à gaz** on retrouve l'écoulement d'un gaz à haute vitesse. On doit alors tenir compte de la **compressibilité** qui se manifeste dans **le nombre de Mach**

La nature du gaz devra également être incluse. Celle-ci sera prise en compte par **le rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma$**

Pour caractériser un compresseur, on a alors identifié les paramètres suivants:

# Paramètres dimensionnels

la puissance, le débit massique, l'état à l'entrée, les capacités calorifiques du fluide, la vitesse de rotation, la viscosité, le diamètre caractéristique

$$\dot{W} = f(\dot{m}, \rho_{01}, T_{01}, c_p, c_v, N, \mu, D)$$

Cette relation peut être simplifiée une fois qu'elle est exprimée sous une forme adimensionnelle. Notamment,

# Forme adimensionnelle

$$\frac{\dot{W}}{\rho_{01} N^3 D^5} = f \left( \frac{\dot{m}}{\rho_{01} N D^3}, \frac{\rho_{01} N D^2}{\mu}, \frac{N D}{\sqrt{\gamma R T_{01}}}, \gamma \right)$$

P( $\Psi$ )

$\Phi$

Re

M

$\gamma$

Le coefficient de puissance P remplace le coefficient de charge  $\Psi$ , puisque la puissance c'est le travail par unité de temps

Après quelques manipulations, cette relation peut être transformée sous la forme équivalente:

# Forme pratique équivalente

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = f \left( \frac{\dot{m} \sqrt{RT_{01}}}{p_{01} D^2}, \frac{\rho_{01} N D^2}{\mu}, \frac{N D}{\sqrt{RT_{01}}}, \gamma \right)$$

$\Psi$

$\Phi$

Re

M

$\gamma$

↑  
P

À partir de cette relation on peut construire la carte du compresseur moyennant quelques simplifications

# Simplifications

$\eta$ ,  $\Psi$   $\Phi$    $M$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}}, \eta = f, g \left( \frac{\dot{m} \sqrt{\square T_{01}}}{p_{01} \square}, \square, \frac{N \square}{\sqrt{\square \square T_{01}}}, \square \right)$$

- Reynolds élevé (turbulent): au-delà d'un nombre de Reynolds limite, la performance ne varie pas trop (similitude restreinte)
- Même fluide ( $R, \gamma$ )
- Même machine ( $D = cnste$ )

# Alors...

 $\Psi$  $\Phi$  $M$ 

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = f \left( \frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{p_{01}}, \frac{N}{\sqrt{T_{01}}} \right)$$

$$\eta = g \left( \frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{p_{01}}, \frac{N}{\sqrt{T_{01}}} \right)$$

Fonction similaire  
pour le rendement

La carte qui synthétise la performance  
d'un compresseur est caractérisée par



$$\begin{cases} M = f(\Psi, \Phi) \\ \eta = g(\Psi, \Phi) \end{cases}$$

# La carte du compresseur

L'évaluation de la performance d'un compresseur est caractérisée au moyen de l'ensemble de paramètres  $\eta, \Psi, \Phi, M$ .

Le champ d'opération du compresseur est représenté par des courbes de nombre de Mach **M constant** dans le plan  $\Psi, \Phi$ . Il est d'usage de superposer dans carte du compresseur, des contours d'**isorendement  $\eta$**

Selon les simplifications présentées, en pratique on utilise le taux de compression  $p_{02}/p_{01}$  au lieu d'une autre forme pour le coefficient  $\Psi$  et le **débit corrigé**  $\dot{m}\sqrt{T_{01}}/p_{01}$  à la place de  $\Phi$

# La carte du compresseur

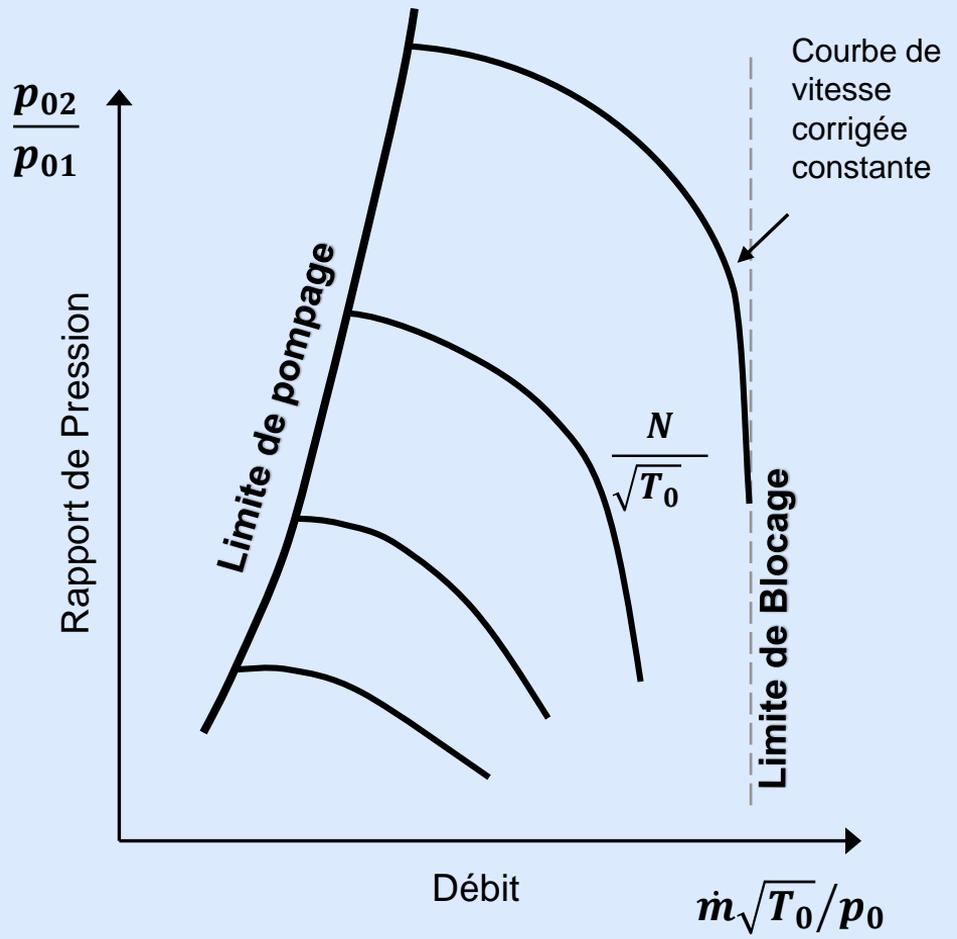
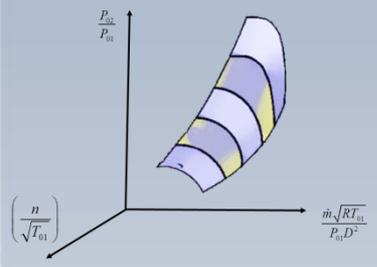
Aussi, le nombre de Mach  $M$  est substitué par la vitesse de rotation corrigée  $N/\sqrt{T_{01}}$

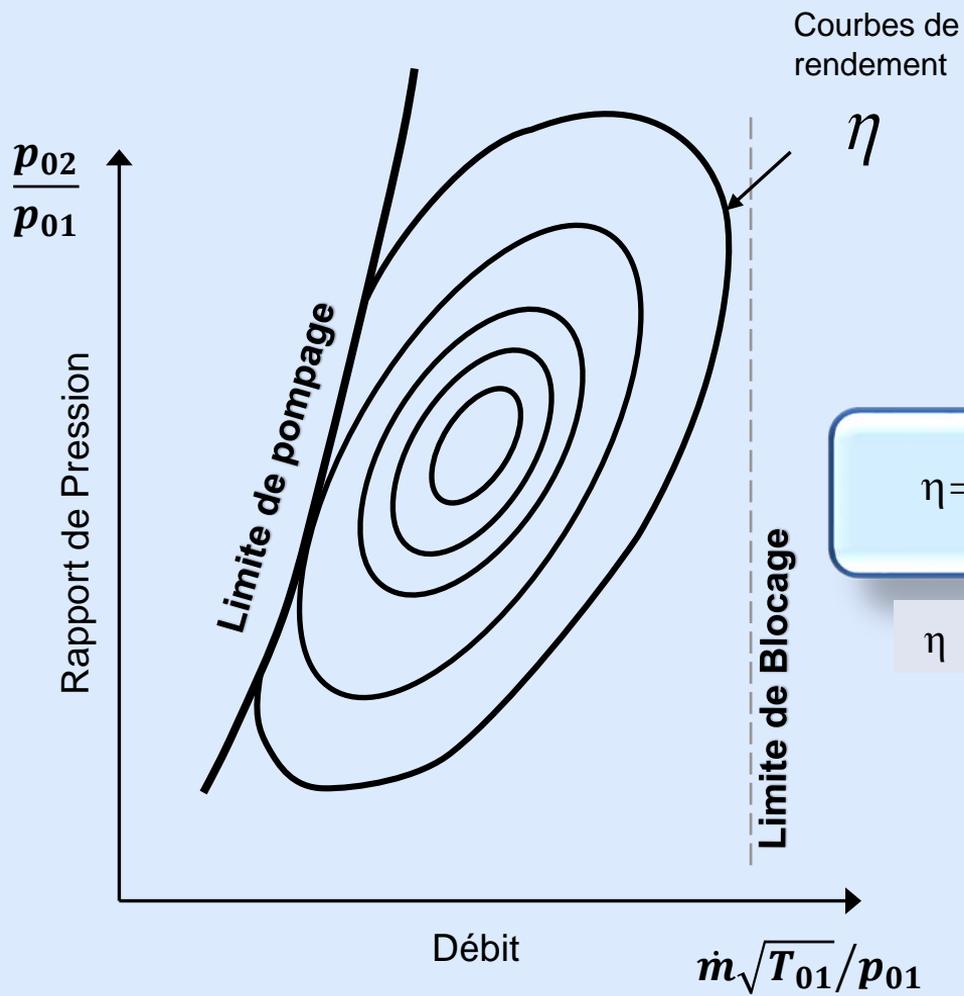
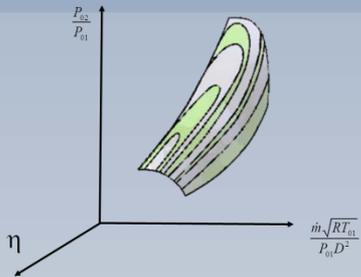
Dans cette carte on distingue *deux limites* qui contraignent la plage d'opération d'un compresseur: **le pompage et le blocage sonique**

# La carte du compresseur

**Le pompage:** il s'agit d'un phénomène qui a lieu des faibles débits. Il est associé à une chute soudaine du taux de compression suivie par des fortes oscillations de la pression, parfois accompagnée d'une inversion de l'écoulement. Sous cette condition le compresseur est inopérable

**Le blocage sonique:** ce phénomène a lieu à des forts débits. Il s'agit de la l'apparition d'une section sonique dans l'étage qui limite le débit massique maximal. Dans cette limite, la performance du compresseur chute rapidement



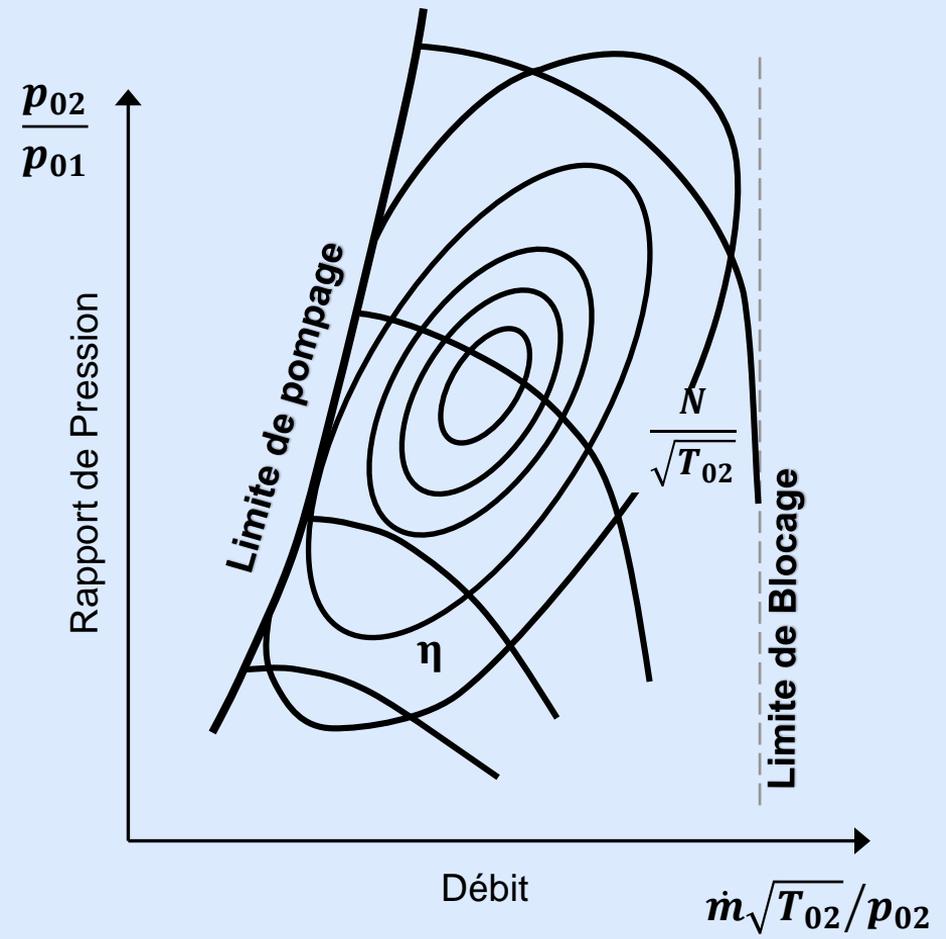
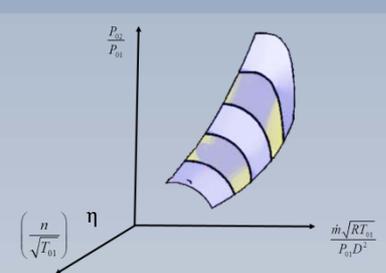


$$\eta = g \left( \frac{p_{02}}{p_{01}}, \frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{p_{01}} \right)$$

$\eta$

$\psi$

$\Phi$



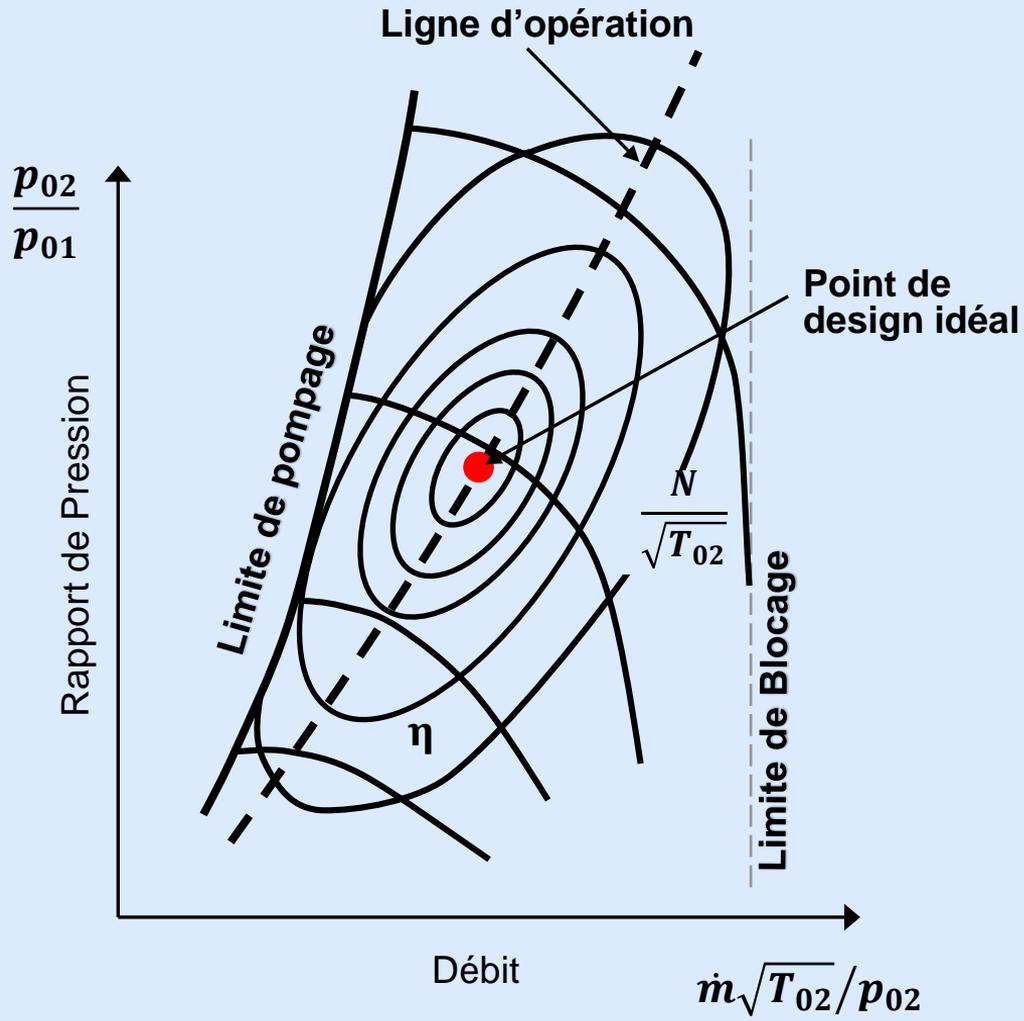
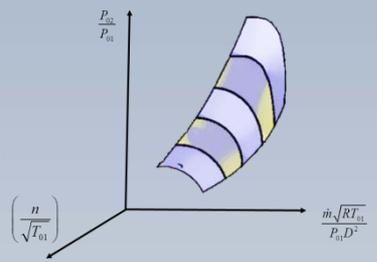
# La ligne d'opération

Sur la carte d'un compresseur on trace également la ligne d'opération ou ligne de fonctionnement du compresseur

Elle correspond à la ligne reliant chacun des points de **rendement maximal sur chaque isovitesse**

Chaque compresseur a un point d'opération optimal sur la ligne d'opération

Cette position dans la carte c'est le point de design où le compresseur fonctionnera la plupart du temps



# Carte d'une turbine

Pour construire la carte d'une turbine, on utilise les mêmes paramètres que pour le compresseur

On note la **faible dépendance** de la performance en fonction de la vitesse corrigée, ce qui contraste avec le compresseur, sur lequel la vitesse de rotation corrigée a un fort impact

On remarque aussi que **les vitesses de rotation corrigée sont confondues**, lorsque **un écoulement sonique** est atteint dans le canal inter-aube. La turbine est ainsi **bloquée, et le débit est maximal**

# Carte d'une turbine

