
Modèles macroscopiques de la circulation

Hamzeh Alizadeh, Ph.D.

Directeur – Recherches et valorisation des données
ARTM

Introduction

➤ Tel que discuté précédemment, il existe deux types de relations entre les caractéristiques des flux de trafic :

1. La relation débit-vitesse-densité ou la relation d'identité:

$$q = k \times v$$

- Une identité est une égalité qui est vraie quelles que soient les valeurs choisies pour ses variables. Ils sont souvent utilisés pour simplifier ou réorganiser des expressions algébriques: $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$.
- Il est spécifique à l'emplacement et au temps: $q(t, x) = k(t, x) \times v(t, x)$, c'est-à-dire que le débit, la vitesse et la densité doivent se référer au même endroit et au même moment.

Introduction

➤ Tel que discuté précédemment, il existe deux types de relations entre les caractéristiques de flux de trafic:

2. Relations par paires ou modèles d'équilibre:

$$v = V(k)$$

$$q = Q(k)$$

$$v = U(q)$$

Ces relations:

- Définissent le diagramme fondamental.
- Ils sont spécifiques à un emplacement, c'est-à-dire que différents emplacements et routes peuvent avoir différents diagrammes fondamentaux.
- Ce sont des modèles d'équilibre, c'est-à-dire qu'ils décrivent un comportement en régime permanent à long terme et ne sont donc pas spécifiques à un moment particulier.
- Telles relations n'ont qu'une signification statistique; c'est-à-dire que les signes égaux ne sont pas strictement valables dans le monde réel.

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} v(x) = V(k(x)) \\ q(x) = Q(k(x)) \\ v(x) = U(q(x)) \end{array}$$

Théorie de la circulation- Objectif

- Le principal objectif de la formulation d'une théorie de la circulation est d'aider à mieux comprendre l'état de la circulation et, par l'application de ces connaissances, de contrôler le trafic pour des opérations plus sûres et plus efficaces.
- Donc, une bonne théorie devrait pouvoir aider à répondre aux questions suivantes:
 - Compte tenu des conditions de circulation existantes sur une route et des arrivées futures, comment les conditions de circulation routière évoluent-elles dans le temps?
 - Où sont les goulots d'étranglement, le cas échéant?
 - En cas de congestion, combien de temps dure-t-elle et jusqu'où les files d'attente se propagent?
 - En cas d'incident, quelle est la meilleure stratégie pour minimiser l'impact sur la circulation?
- Les réponses à ces questions impliquent l'analyse de l'évolution dynamique des états de la circulation dans le temps et dans l'espace.
- Les modèles d'équilibre ne sont capables que de décrire des états d'équilibre et ne fournissent pas de mécanisme pour analyser comment ils évoluent.
- Ce chapitre présente des modèles dynamiques pour répondre à ces questions.

L'équation de continuité

- La dérivation d'une équation dynamique commence par l'examen d'un petit volume de trafic routier en tant qu'un flux continu.
- On considère le flux de trafic comme un fluide compressible unidimensionnel, comme un gaz.
- Les lois de conservation s'appliquent à ce type de fluide.
- La forme de conservation de premier ordre est la conservation de masse, également connue sous le nom d'équation de continuité.
- Nous introduisons 3 perspectives différentes pour dériver cette équation de continuité:
 - Dérivation 1 - Différence finie,
 - Dérivation 2 - Dynamique des fluides,
 - Dérivation 3 - Représentation tridimensionnelle du flux de trafic.

$$q_x + k_t = 0$$

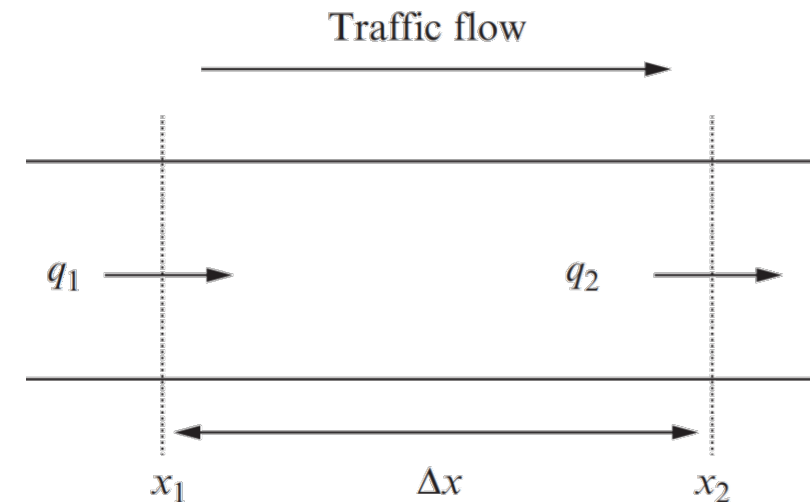
Dérivation 1 - Différence finie

- Supposons qu'une section d'autoroute soit délimitée par deux stations d'observation à x_1 et x_2 .
- Soit $\Delta x = x_2 - x_1$ la longueur de la section.
- Pendant l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$, N_1 véhicules ont dépassé x_1 et N_2 véhicules ont dépassé x_2 . Par conséquent, les débits à ces endroits sont:

$$q_1 = \frac{N_1}{\Delta t} \quad , \quad q_2 = \frac{N_2}{\Delta t}$$

- Le changement du nombre de véhicules dans la section est:

$$\Delta N = N_2 - N_1 = (q_2 - q_1)\Delta t = \Delta q \Delta t$$



*Section de route pour obtenir
l'équation de continuité*

Dérivation 1 - Différence finie

- Supposons que les densités de trafic dans la section au moments t_1 et t_2 soient respectivement k_1 et k_2 .
- Par conséquent, il y a $M_1 = k_1 \Delta x$ véhicules dans la section au temps t_1 et $M_2 = k_2 \Delta x$ véhicules dans la section au temps t_2 .
- Le changement du nombre de véhicules dans la section peut être exprimé comme:

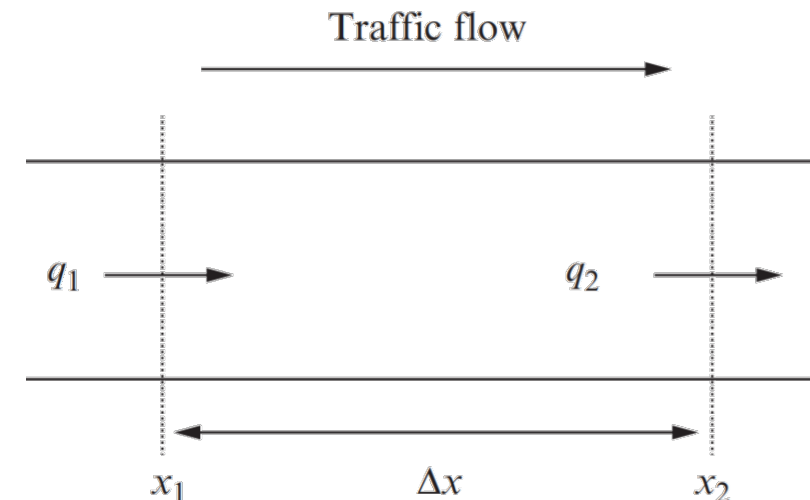
$$\Delta M = k_1 \Delta x - k_2 \Delta x = (k_1 - k_2) \Delta x = -\Delta k \Delta x.$$

- Puisque les véhicules ne peuvent pas être créés ou détruits à l'intérieur de la section, le changement du nombre de véhicules doit être le même dans la même section pendant le même intervalle de temps. Par conséquent, $\Delta N = \Delta M$ - c'est-à-dire:

$$\Delta q \Delta t = -\Delta k \Delta x, \quad \rightarrow \quad \Delta q \Delta t + \Delta k \Delta x = 0$$

- En divisant les deux côtés par $\Delta x \Delta t$, nous obtenons:

$$\frac{\Delta q}{\Delta x} + \frac{\Delta k}{\Delta t} = 0 \quad \begin{matrix} \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad q_x + k_t = 0$$



Section de route pour obtenir l'équation de continuité

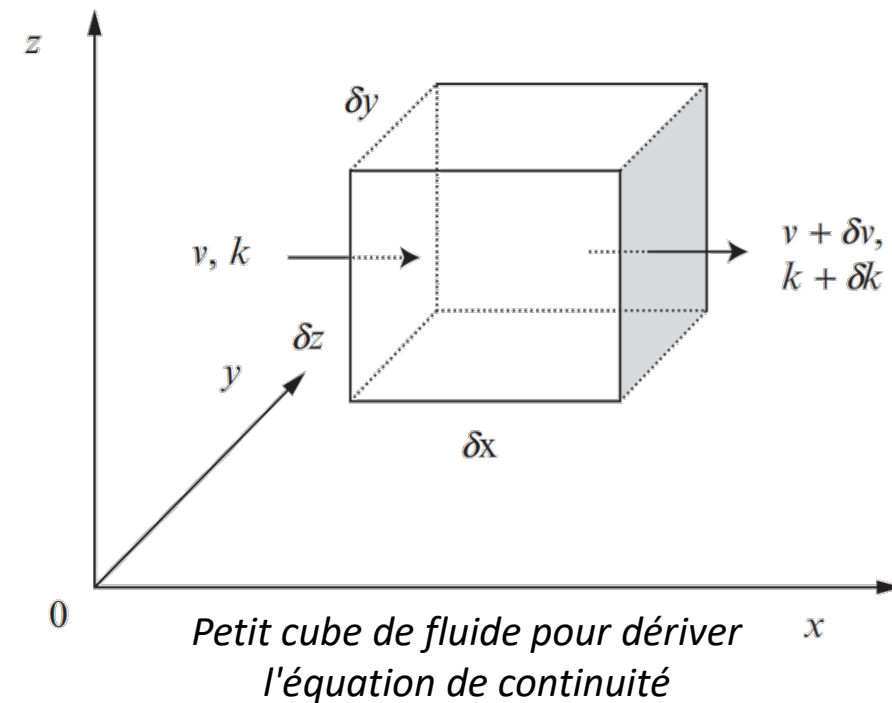
Dérivation 2 - Dynamique des fluides

- La figure illustre un petit cube fluide de taille $\delta x \times \delta y \times \delta z$
- La vitesse du fluide v et la densité k de deux côtés du cube sont aussi indiquées.
- Le débit de masse entrant dans le cube est de $vk\delta y\delta z$.
- Le débit de masse sortant du cube est de:

$$\begin{aligned} (v + \delta v)(k + \delta k)\delta y\delta z &= \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\delta x \right) \left(k + \frac{\partial k}{\partial x}\delta x \right) \delta y\delta z \\ &= \left(vk + v\frac{\partial k}{\partial x}\delta x + k\frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial k}{\partial x}\delta x\delta x \right) \delta y\delta z. \end{aligned}$$

- La masse stockée dans le cube équivaut à la masse qui entre moins la masse qui en sort:

$$\begin{aligned} \left(v\frac{\partial k}{\partial x}\delta x + k\frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial k}{\partial x}\delta x\delta x \right) \delta y\delta z \\ = \left(v\frac{\partial k}{\partial x} + k\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial k}{\partial x}\delta x \right) \delta x\delta y\delta z \end{aligned}$$



Dérivation 2 - Dynamique des fluides

➤ Si nous ignorons le terme d'ordre supérieur, nous obtenons: $\left(v \frac{\partial k}{\partial x} + k \frac{\partial v}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z = \frac{\partial(kv)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$

➤ Un traitement similaire s'applique aux deux autres directions du cube, donc la masse totale stockée dans le cube est:

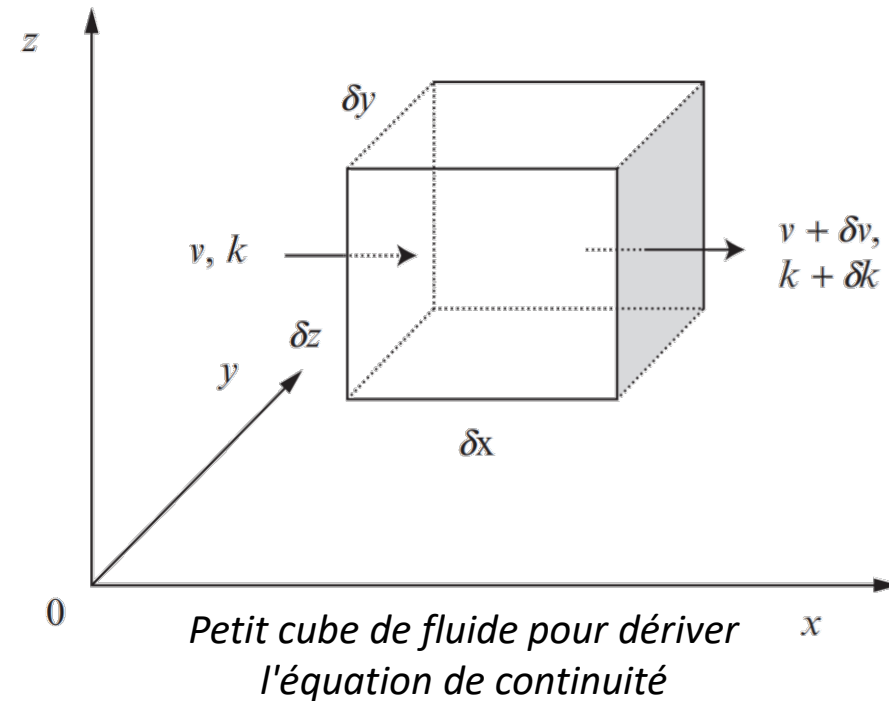
$$\left(\frac{\partial(kv)}{\partial x} + \frac{\partial(ku)}{\partial y} + \frac{\partial(kw)}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z$$

➤ La masse stockée dans le cube doit être équilibrée par le changement de masse entrant et sortant le cube: $\frac{\partial k}{\partial t} \delta x \delta y \delta z$

➤ La loi de la conservation de masse exige que:

$$\left(\frac{\partial(kv)}{\partial x} + \frac{\partial(ku)}{\partial y} + \frac{\partial(kw)}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial k}{\partial t} \delta x \delta y \delta z = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial k}{\partial t} + \left(\frac{\partial(kv)}{\partial x} + \frac{\partial(ku)}{\partial y} + \frac{\partial(kw)}{\partial z} \right) = 0$$



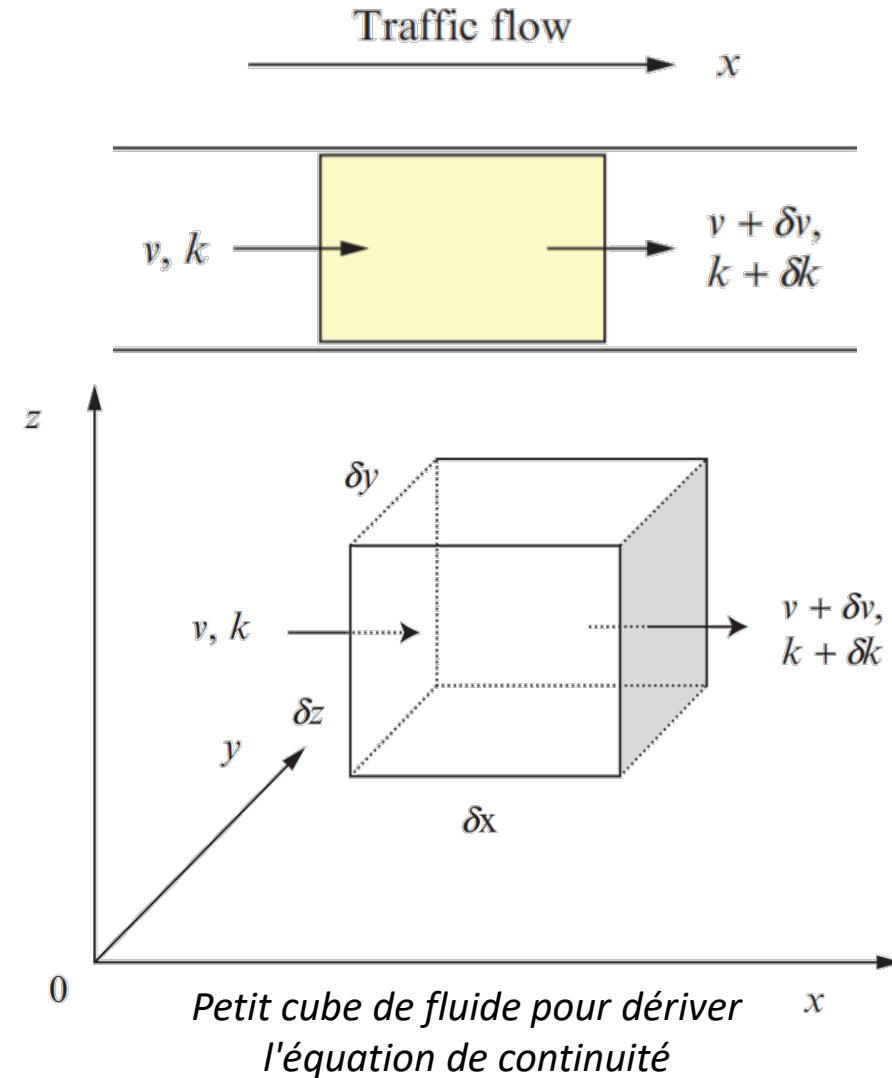
Dérivation 2 - Dynamique des fluides

- Le trafic routier constitue un cas particulier de la situation ci-dessus avec une seule dimension:

$$\frac{\partial(kv)}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial t} = 0$$

- Notez que $q = kv$. Donc:

$$q_x + k_t = 0$$



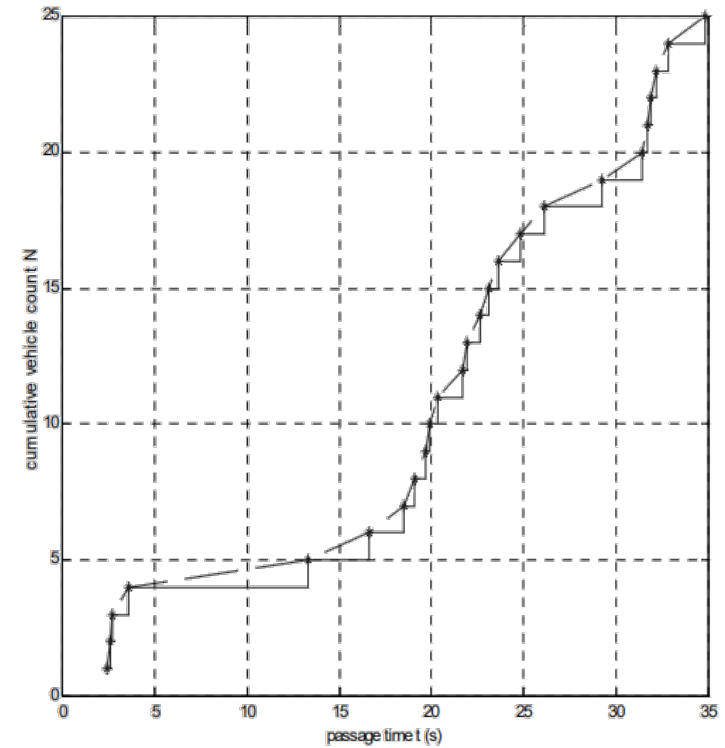
Dérivation 3: Représentation tridimensionnelle

- Comme discuté précédemment, la surface qui représente le nombre cumulé de véhicules, N , peut être exprimée en fonction du temps t et de l'espace x — c'est-à-dire, $N = N(t, x)$.
- La densité d'un point espace-temps (t, x) est la première dérivée partielle de $N(t, x)$ par rapport à x , mais prend une valeur négative:

$$k(t, x) = -\frac{\partial N(t, x)}{\partial x}$$

- Le débit en (t, x) est la première dérivée partielle de $N(t, x)$ par rapport à t :

$$q(t, x) = \frac{\partial N(t, x)}{\partial t}$$



Fonction du nombre cumulé de véhicule $N(x, t)$

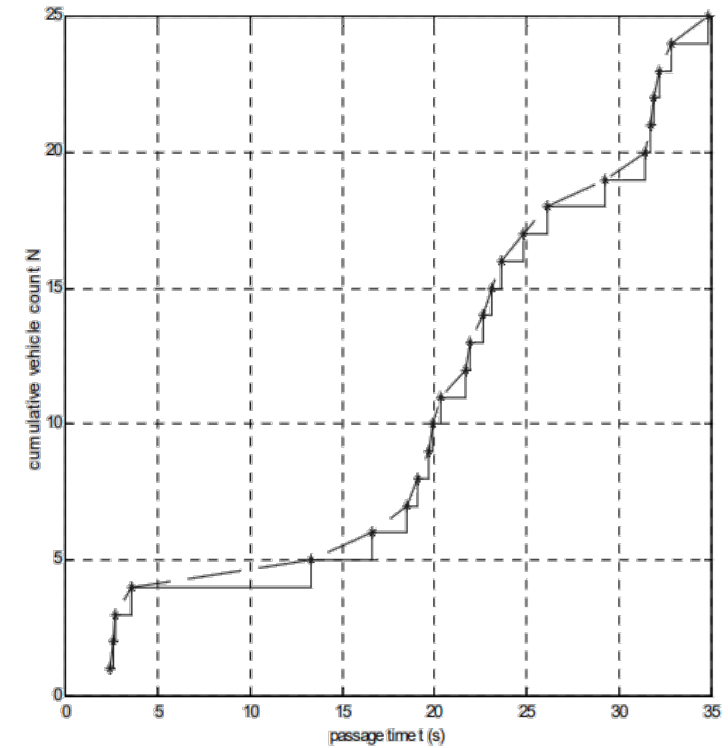
Dérivation 3: Représentation tridimensionnelle

- Si le débit et la densité ont des dérivés du premier ordre:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q(t, x)}{\partial x} &= \frac{\partial N(t, x)/\partial t}{\partial x} = \frac{\partial N^2(t, x)}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial k(t, x)}{\partial t} &= \frac{-\partial N(t, x)/\partial x}{\partial t} = -\frac{\partial N^2(t, x)}{\partial x \partial t} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\partial q(t, x)}{\partial x} = -\frac{\partial k(t, x)}{\partial t}$$

- Donc:

$$q_x + k_t = 0$$



Fonction du nombre cumulé de véhicule $N(x, t)$

Modèle dynamique de premier ordre

- L'évolution de la circulation est le processus de changement des états de la circulation (débit q , vitesse v et densité k) au fil du temps t et de l'espace x en considérant certaines conditions initiales (par exemple, $k_0 = k(0, x)$) et les conditions aux limites (par exemple, $q(t) = q(t, x_0)$).
- On reconnaît que le temps t et l'espace x sont des variables indépendantes et les états de la circulation sont des variables dépendantes, c'est-à-dire que ce sont des fonctions du temps et de l'espace ($q = q(t, x)$, $v = v(t, x)$, $k = k(t, x)$).
- Les équations de continuité dérivées avant relient dynamiquement le changement de débit q_x au changement de densité k_t
$$q_x + k_t = 0$$
- Cette équation contient deux variables inconnues $q(t, x)$ et $k(t, x)$. Puisque le nombre de variables inconnues est supérieur au nombre d'équations, le problème est sous-spécifié. Pour cette raison, une autre équation simultanée est nécessaire.
- La fonction d'identité devient pratique:

$$q(t, x) = k(t, x) \times v(t, x)$$

Modèle dynamique de premier ordre

- En ajoutant cette nouvelle équation, nous introduisons une troisième variable inconnue — la vitesse $v(t, x)$.
- Par conséquent, une troisième équation simultanée est nécessaire.
- Nous sommes incapables de trouver une troisième équation gouvernante qui soit valable pour n'importe quelle condition de temps et espace.
- Par conséquent, nous devons accepter l'option (moins qu'idéale) en examinant les modèles d'équilibre (par exemple, le modèle Greenshields), qui ne sont valides que statistiquement. Un tel modèle prend la forme de: $v = V(k)$
- En mettant tout ensemble, on obtient un système de trois équations impliquant trois variables inconnues:
- Si les conditions initiales et aux limites sont fournies, le système d'équations ci-dessus peut être résolu.
- On peut déterminer l'état de la circulation à un point arbitraire de l'espace-temps (t, x) —c'est-à-dire, $q(t, x)$, $v(t, x)$, et $k(t, x)$, et répondre aux questions posées au début de cette section.
- Cependant, résoudre un tel système d'équations n'est pas facile!

$$\begin{cases} q_x + k_t = 0, \\ q = kv, \\ v = V(k). \end{cases}$$

Le modèle LWR

- Comme illustré précédemment, en utilisant la loi de conservation, on obtient un système de trois équations impliquant trois variables inconnues décrivant un modèle dynamique de la circulation :

$$\begin{cases} k_t + q_x = 0, \\ q = kv, \\ v = V(k), \end{cases}$$

- Où $q = q(t, x)$ est le débit, $k = k(t, x)$ est la densité et $v = v(t, x)$ est la vitesse moyenne de la circulation.

- Si l'on combine les deuxième et troisième équations en éliminant v , on obtient une relation débit-densité $q = Q(k)$, et le modèle dynamique devient:

$$\begin{cases} k_t + q_x = 0, \\ q = Q(k), \end{cases}$$

- Ou encore: $k_t + Q'(k)k_x = 0$

- Où : $Q'(k) = \frac{dQ(k)}{dk}$

- C'est le modèle appelé *LWR* pour honorer les trois pionniers, Lighthill, Whitham et Richards, qui ont initialement étudié ce problème.
- Le modèle LWR est essentiellement une équation différentielle partielle homogène, quasi-linéaire du premier ordre.

Modèle LWR avec Greenshields

- Le modèle Greenshields suppose la relation linéaire $v - k$ suivante:
$$v = v_f \left(1 - \frac{k}{k_j}\right)$$
- Où v_f est la vitesse d'écoulement libre et k_j est la densité de congestion.

- Ce modèle implique la relation quadratique $q - k$ suivante

$$q = Q(k) = v_f \left(k - \frac{k^2}{k_j}\right) \rightarrow c(k) \equiv Q'(k) = v_f - 2\frac{v_f}{k_j}k$$

- Si la vitesse de la circulation $v_f = 60$ miles par heure et la densité $k_j = 240$ véhicules par mile, la forme explicite du modèle *LWR* devient:

$$k_t + \left(60 - \frac{k}{2}\right)k_x = 0$$

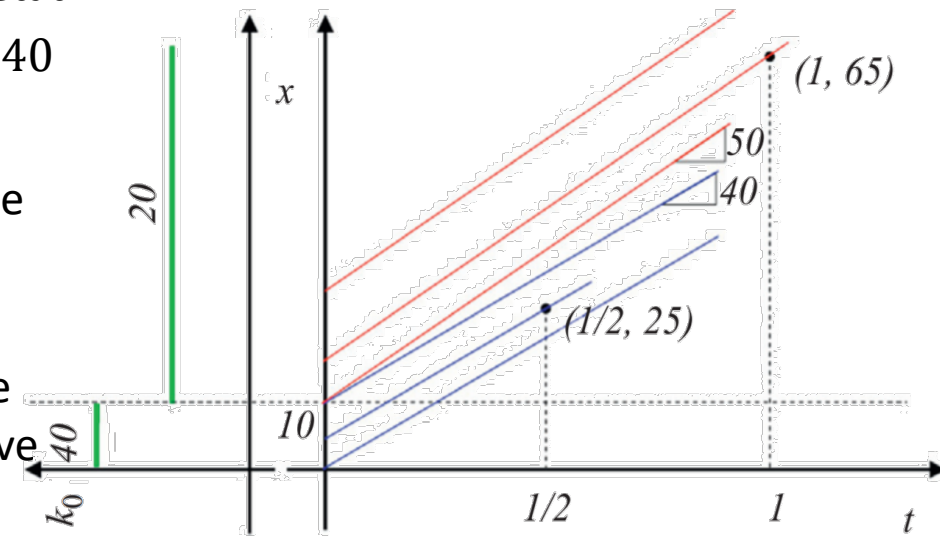
- Supposons la condition initiale suivante:

$$k(0, x) = k_0(x) \begin{cases} 40 \text{ vehicles per mile} & \text{if } 0 < x \leq 10 \text{ miles,} \\ 20 \text{ vehicles per mile} & \text{if } x > 10 \text{ miles.} \end{cases}$$

- Trouvez des solutions aux points ($t = 1/2h, x = 25\text{miles}$) et ($t = 1h, x = 65\text{miles}$)

Modèle LWR avec Greenshields

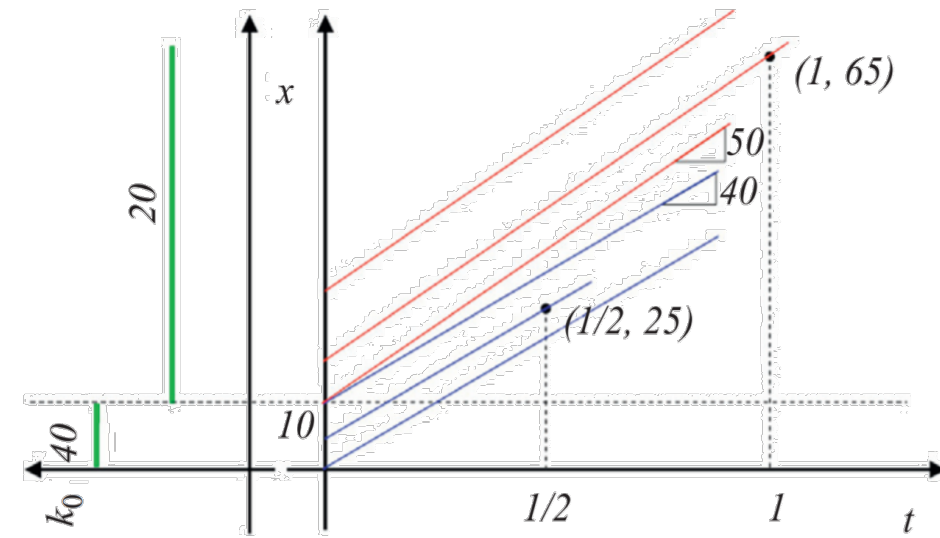
- Construisez un diagramme espace-temps.
- Illustrez la condition initiale sur le côté du diagramme.
- Identifiez les deux points en question.
- Construisez les caractéristiques.
 - Toutes les caractéristiques tracées entre $0 < x \leq 10$ miles porteront une valeur k de 40 véhicules par mile, qui peut être lue à partir de l'état initial; donc que la pente de ces caractéristiques est $c = 60 - \frac{k}{2} = 40$ miles par heure.
 - Le point $(t = 1/2, x = 25)$ est dans cette zone, et la caractéristique passant ce point intercepte l'axe x en $(0, 5)$. Donc, $k(1/2, 25) = k(0, 5) = 40$ véhicules par mile.
 - De même, toutes les caractéristiques tirées de $x > 10$ miles ont une pente $c = 50$ miles par heure, et le point $(t = 1, x = 65)$ se trouve dans cette zone.
 - La caractéristique passant ce point intercepte l'axe des t en $(0, 15)$. Donc, $k(1, 65) = k(0, 15) = 20$ véhicules par mile.



Exemple de modèle LWR avec Greenshields

Modèle LWR avec Greenshields

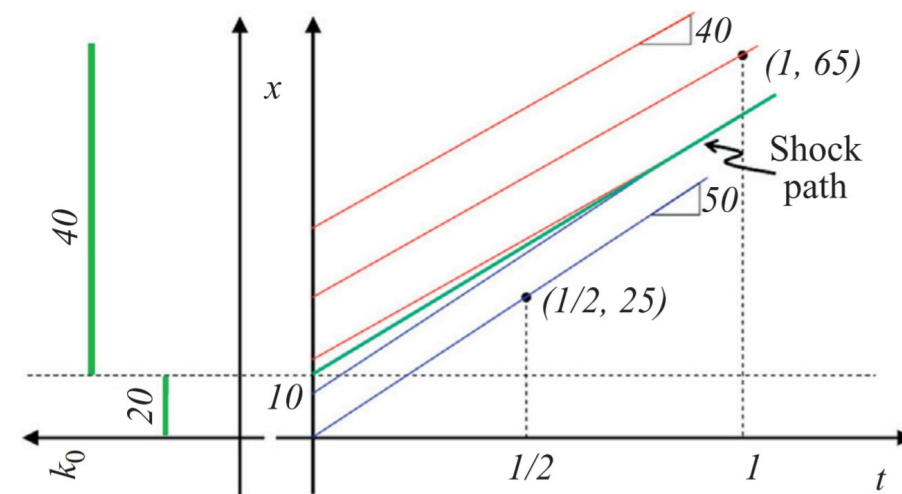
- Cet exemple implique deux pelotons: un rapide devant et un lent derrière.
- Chaque peloton correspond à une famille de caractéristiques appelée onde cinématique.
- Les caractéristiques du peloton rapide ont une pente de 50 miles par heure, qui est la vitesse de l'onde cinématique rapide.
- De même, la vitesse de l'onde cinématique lente est de 40 miles par heure.
- Notamment, il existe une zone vide entre les deux familles de caractéristiques à partir de $(0, 10)$, ce qui signifie qu'il y a un écart croissant entre les deux pelotons.



Exemple de modèle LWR avec Greenshields

Modèle LWR avec Greenshields

- Si les deux pelotons sont inversés, c'est-à-dire que le peloton lent se trouve devant le peloton rapide, tôt ou tard le peloton rapide rattrapera le peloton lent.
- Lorsque cela se produit, le premier véhicule du peloton rapide devra adopter la vitesse du dernier véhicule du peloton lent.
- Peu de temps après, le deuxième véhicule du peloton rapide devra ralentir, de même que le troisième véhicule, le quatrième véhicule, et ainsi de suite.
- L'effet de «ralentissement» se propage vers l'arrière le long du peloton rapide.
- La propagation d'un changement soudain des conditions de circulation crée une onde de choc qui délimite des régions de conditions de circulation différentes.
- Cette ligne dans le plan $x - t$ est appelée le chemin du choc.



Exemple de modèle LWR avec Greenshields

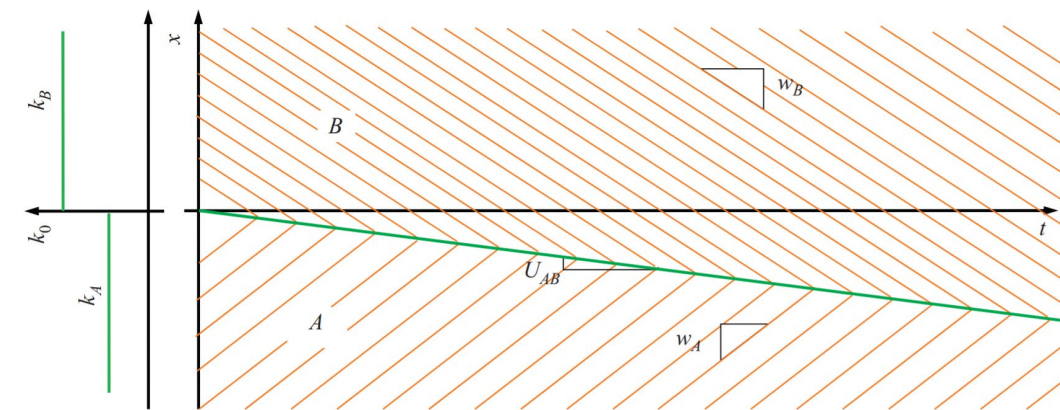
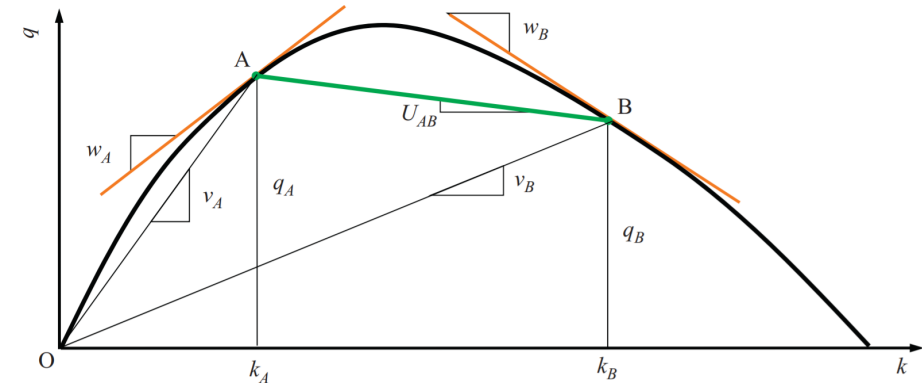
Modèle LWR - Relation générale Q-K

- Dans l'exemple ci-dessus, la relation $q - k$ sous-jacente est explicitement donnée par le modèle Greenshields.
- Donc, il est pratique de déterminer la vitesse d'une onde cinématique à partir de la condition initiale.
- Cependant, il est reconnu que le modèle Greenshields souffre d'inexactitude, et souvent la relation $q - k$ sous-jacente est donnée graphiquement par ajustement à partir de données empiriques.
- Dans ce cas, la solution du modèle *LWR* avec une relation générale $q - k$ est généralement déterminée graphiquement.

- Considérons le modèle LWR suivant avec une relation $q - k$ générale:
$$\begin{cases} k_t + q_x = 0, \\ q = Q(k), \\ k(t, 0) = k_0(x) = \begin{cases} A & \text{if } x \leq 0, \\ B & \text{if } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

Modèle LWR - Relation générale Q-K

- La relation $q - k$ est illustrée sur la figure
- Le point A est un point de fonctionnement caractérisé par le débit q_A , la densité k_A , et la vitesse v_A . Une notation similaire s'applique au point B .
- Un diagramme espace-temps est construit en bas du diagramme $q - k$ avec la condition initiale à côté.
- Comme discuté précédemment, si c est une constante qui dépend de k mais ne dépend pas explicitement de t ou de x , la caractéristique résultante est une ligne droite.
- Chaque onde cinématique a une pente constante et le chemin du choc sera une ligne droite.
- A partir de la condition initiale, il y a deux ondes cinématiques: l'onde cinématique A émise à partir de $x \leq 0$, et l'onde cinématique B émise à partir de $x > 0$.



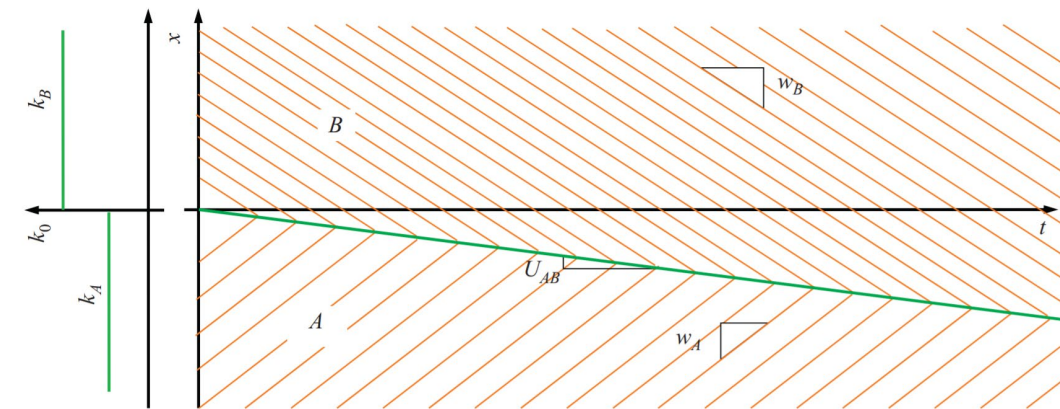
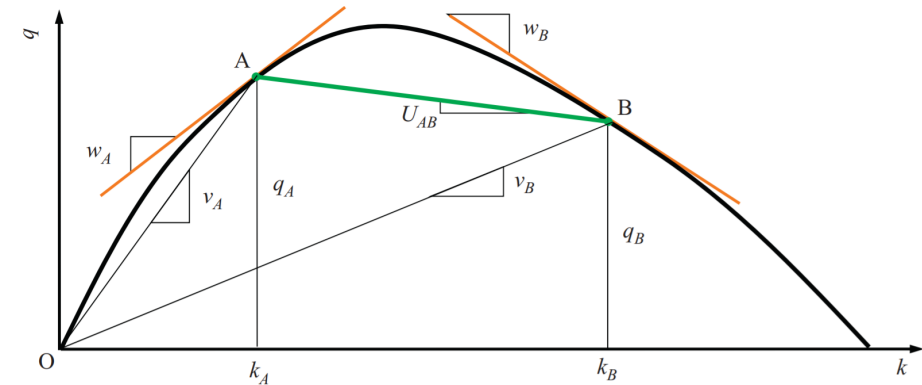
Exemple de modèle LWR avec une relation $q-k$ générale

Modèle LWR - Relation générale Q-K

- La vitesse de l'onde cinématique A est la dérivée de la relation $q - k$ évaluée au point A .

$$w_A = \frac{dQ}{dk} = Q'(k)|_{k=k_A}$$

- C'est la tangente à la courbe $q - k$ au point A .
- Donc, on construit l'onde cinématique A en traçant une famille de droites parallèles tirées de $x \leq 0$ avec une pente de w_A .
- De même, la vitesse de l'onde cinématique B , w_B , est la tangente à la courbe $q - k$ au point B .



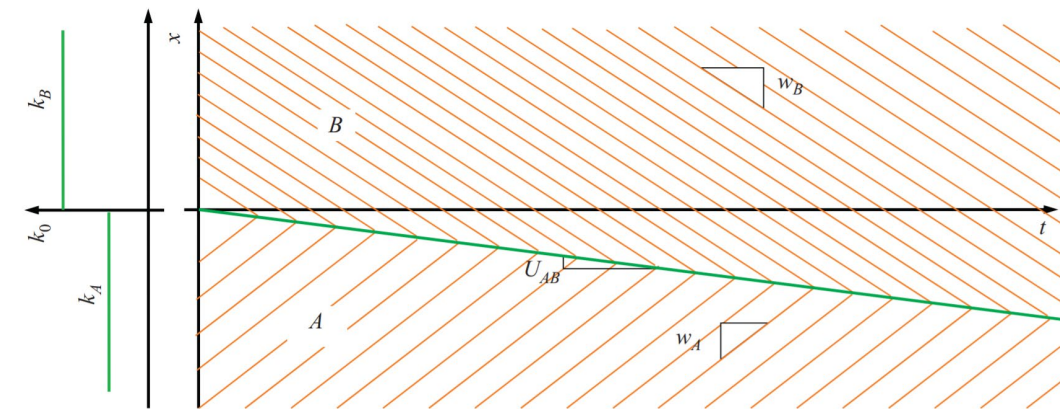
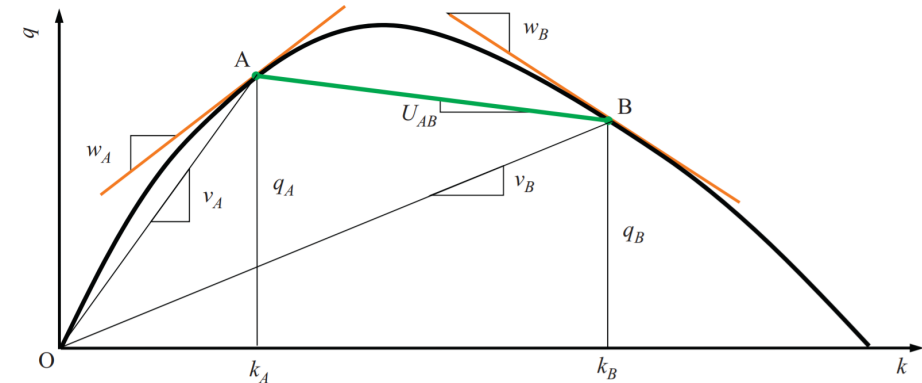
Exemple de modèle LWR avec une relation $q-k$ générale

Modèle LWR - Relation générale Q-K

- L'onde cinématique B représente un peloton dense et lent devant.
- L'onde cinématique A représente un peloton moins dense et plus rapide derrière
- L'onde cinématique A rattrapera l'onde cinématique B, créant une onde de choc.
- La pente (vitesse) de l'onde de choc est déterminée par la condition de saut de Rankine Hugoniot en utilisant:

$$U_{AB} = \frac{q_B - q_A}{k_B - k_A}$$

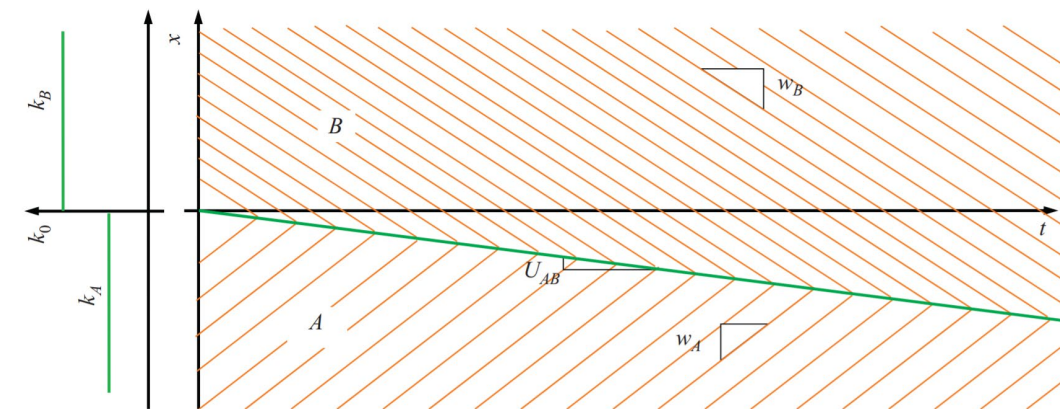
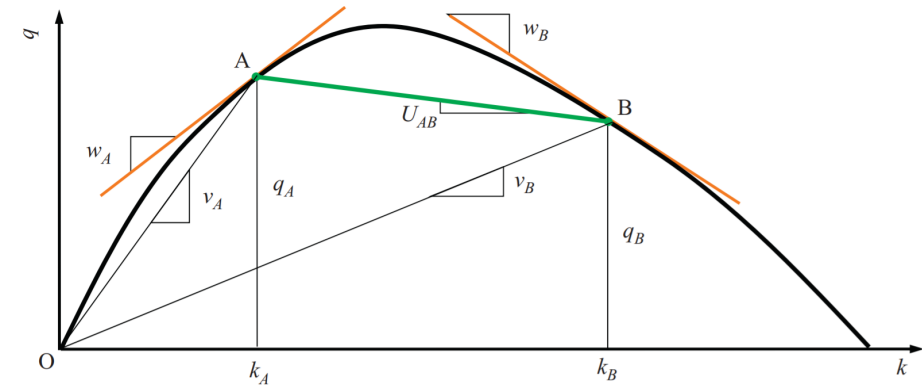
- Le chemin du choc est une ligne droite.
- Il s'agit de la pente de la ligne reliant les points A et B dans la courbe $q - k$.
- De plus, on sait déjà à partir de la condition initiale que le trajet du choc commence à l'origine dans le diagramme espace-temps. On peut donc déterminer le chemin du choc en traçant une ligne à partir de l'origine avec la pente U_{AB} .



Exemple de modèle LWR avec une relation $q-k$ générale

Modèle LWR - Relation générale Q-K

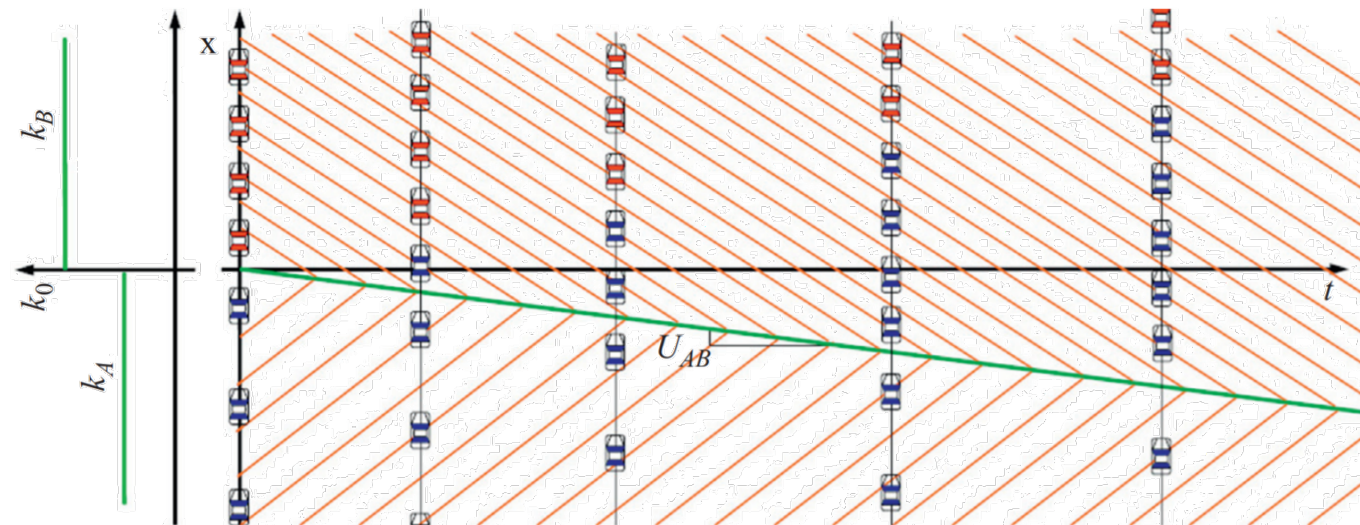
- Les caractéristiques des deux ondes cinématiques prendront fin une fois qu'elles rencontrent le chemin du choc.
- Par conséquent, la solution d'onde de choc est construite graphiquement et se compose de deux solutions lisses par morceaux.
- La région au-dessus du chemin de choc a une condition de trafic uniforme $B (q_B, k_B, u_B)$.
- La région au-dessous du chemin de choc a la condition $A (q_A, k_A, u_A)$.
- Bien que les caractéristiques soient utilisées pour illustrer comment trouver le chemin du choc, elles ne sont pas nécessaires.
 - Avec un point connu sur le chemin du choc et une vitesse de choc connue, le chemin du choc peut être déterminé directement sans que les caractéristiques soient dessinées.



Exemple de modèle LWR avec une relation $q-k$ générale

Chemin de choc et les files d'attente

- Comme illustré sur la figure, la trajectoire du choc représente l'emplacement variable dans le temps, qui sépare le peloton rapide et le peloton lent → La queue (le bout) d'une file d'attente en mouvement.
- Quand le véhicule de tête du peloton rapide rattrape la queue du peloton lent, ce véhicule rejoint le peloton lent et devient sa nouvelle queue.
- Puisque le peloton lent est toujours en mouvement, l'emplacement de sa queue change de façon dynamique en fonction de la rapidité avec laquelle le peloton rapide arrive.
- La figure montre quelques exemples dans le temps pour illustrer un tel processus dynamique.



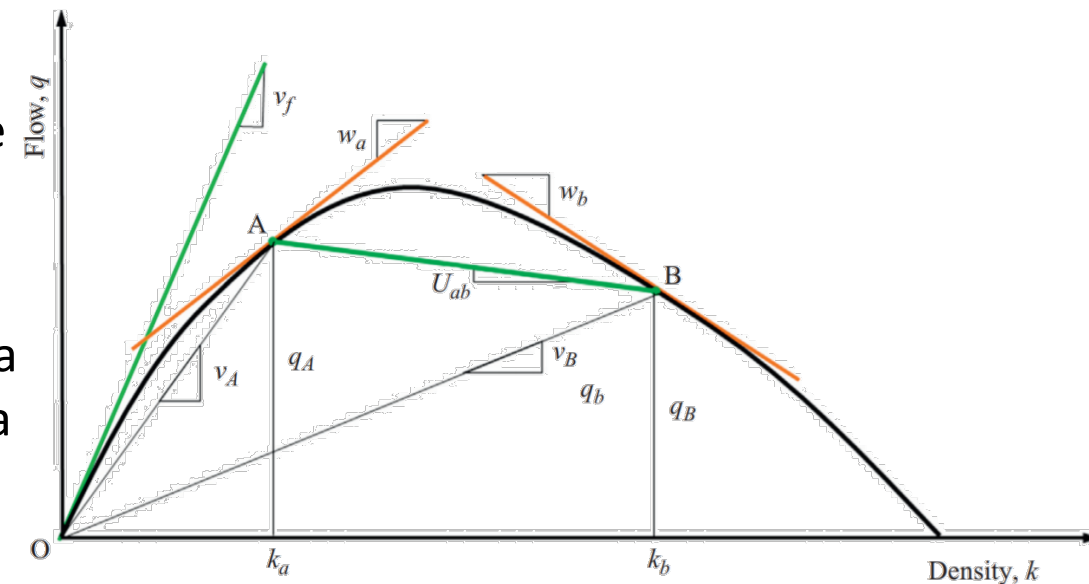
Chemin de choc et les files d'attente

Relation vitesse-débit-densité

➤ Pour un observateur stationnaire de la circulation:

- Le point A représente l'état du trafic avec le débit q_A et la densité k_A
- La vitesse correspondante à la condition A , par définition:
$$v_A = \frac{q_A}{k_A}$$
- Graphiquement, cela peut être représenté par la pente de la ligne reliant l'origine O et le point A .
- Si k_A diminue, le point A se déplacera le long de la courbe vers l'origine O . Dans le cas limite où $k_A \rightarrow 0$, la ligne OA devient la tangente de la courbe à l'origine. La pente de cette tangente désigne la vitesse de la circulation lorsque la densité est proche de zéro.

$$v_f = \lim_{A \rightarrow O} v_A = \lim_{k_A \rightarrow 0} \frac{q_A}{k_A}$$



Représentation graphique de la relation vitesse-débit-densité

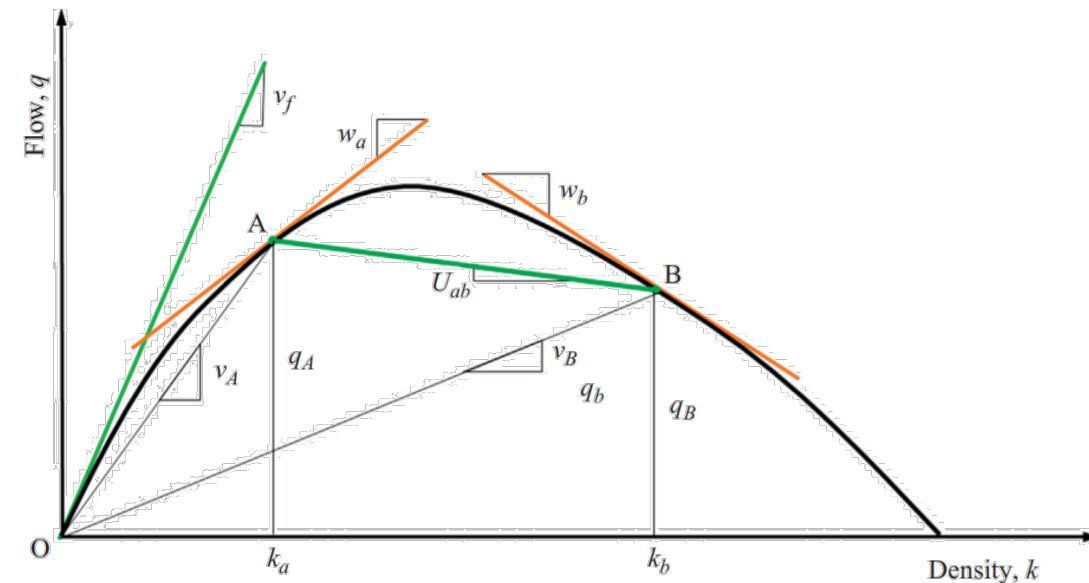
Relation vitesse-débit-densité

- Si l'on trace la tangente de la courbe au point A , la pente de cette tangente est la vitesse d'une onde cinématique transportant des conditions de la circulation du point A :

$$w_A = Q'(k)|_{k=k_A}$$

- Si A et B représentent deux conditions de circulation différentes, comme discuté ci-dessus, la pente de la corde AB est la vitesse de l'onde de choc séparant les deux conditions de circulation.

$$U_{AB} = \frac{q_B - q_A}{k_B - k_A}$$



Représentation graphique de la relation vitesse-débit-densité

Modèle LWR – Goulot d'étranglement

Problème

- Le trafic arrivant au point situé en amont d'une autoroute était initialement dans l'état A (voir tableau).
- À 9:00 *a.m.*, le trafic passe à l'état B .
- Après 1 *h*, le trafic revient à l'état A .
- La capacité au goulot d'étranglement est de 1400 véhicules par heure.

Trouvez dans quelle mesure la file d'attente se prolonge et combien de temps la file d'attente persiste.

Condition	q (véhicules/h)	k (véhicules/km)	v (km/h)
A	600	8.57	70
B	2000	40	50
D	1400	21.5	65
D'	1400	130	10.8

Modèle LWR – Goulot d'étranglement

Solution

- La vitesse à laquelle la file d'attente augmente est:

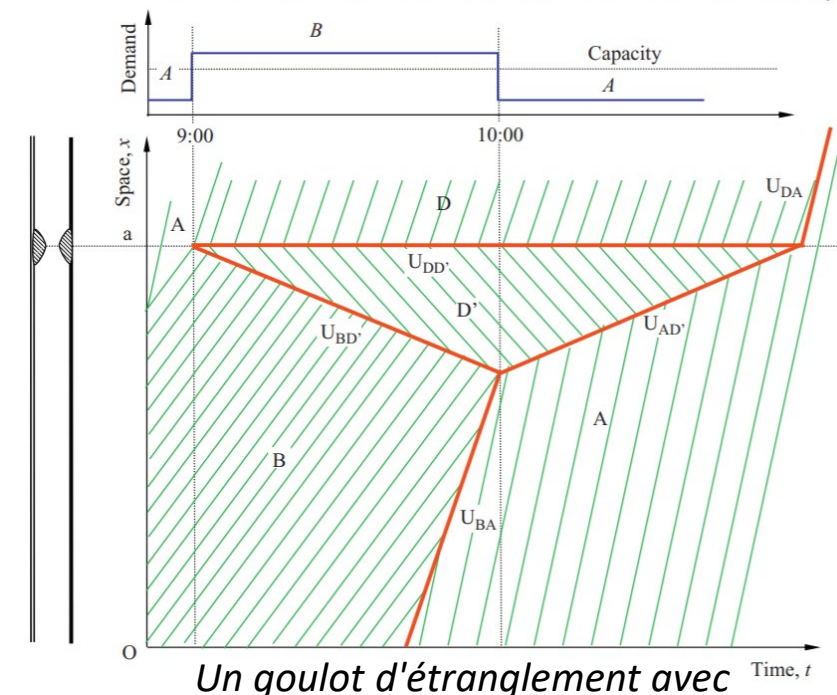
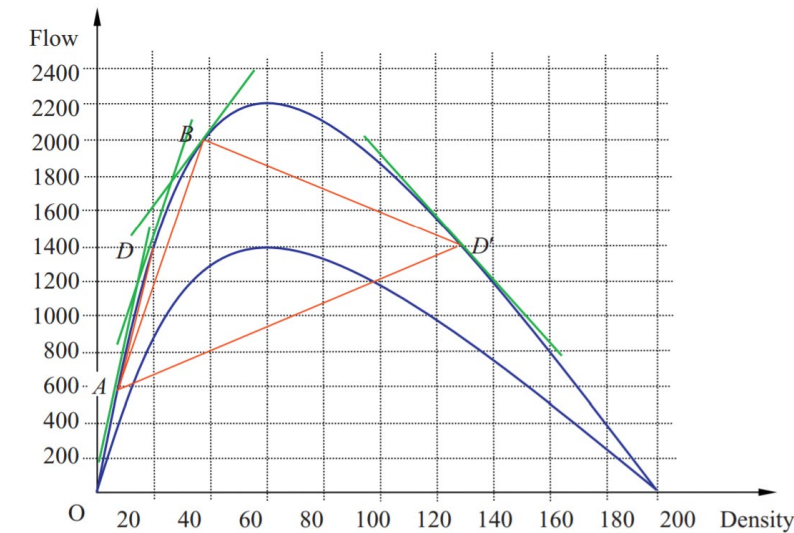
$$U_{BD'} = \frac{q_{D'} - q_B}{k_{D'} - k_B} = \frac{1400 - 2000}{130 - 40} = -\frac{600}{90} = -6.67 \text{ km/h}$$

La file d'attente se prolonge à ce rythme pendant 1 h, de sorte que le point le plus éloigné atteint 6,67 km en amont du goulot.

- La vitesse à laquelle la file d'attente se dissipe est:

$$U_{AD'} = \frac{q_{D'} - q_A}{k_{D'} - k_A} = \frac{1400 - 600}{130 - 8.57} = 6.60 \text{ km/h}$$

- Ainsi, le temps nécessaire pour dissiper la file d'attente est de $6.67/6.60 = 1.01 \text{ h}$, et le temps total pendant lequel la file d'attente persiste est de 2.01 h .



Un goulot d'étranglement avec une demande variable

Modèle LWR – Goulot d'étranglement

Problème

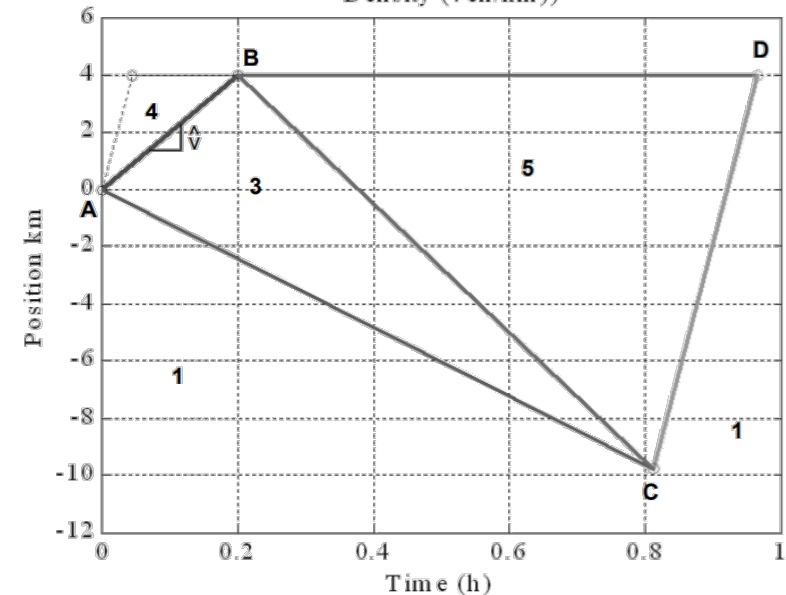
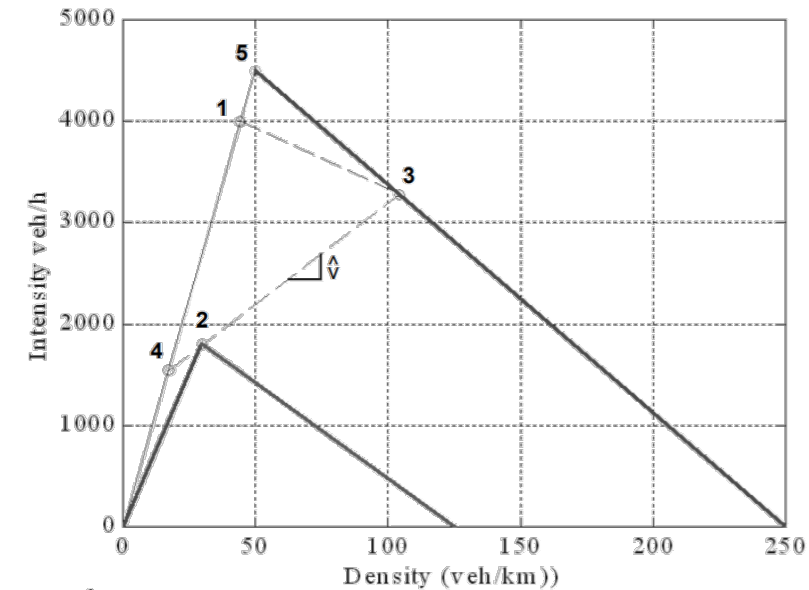
- Un goulot d'étranglement mobile présent sur une route sur une distance donnée pendant une période donnée.
- Un exemple pratique d'un goulot mobile est un véhicule lent, par ex. un tracteur agricole d'une vitesse de 20 km / h, sur une route à deux voies. La capacité du goulot est déterminée par les opportunités de dépassement, donc par le flux opposé et la distance de visibilité pour le dépassement. Ces deux facteurs peuvent conduire à une capacité plus ou moins constante du b-n.
- Considérons les conditions suivantes:
 - Route:
 - Capacité = 4500 veh/h;
 - Vitesse $u_c = 90$ km/h;
 - Densité de congestion $k_j = 250$ veh/km.
 - Le goulot en mouvement
 - Vitesse $\hat{v} = 20$ km/h
 - Distance = 4 km.
 - Capacité = 1800 veh/h,
 - Vitesse $\hat{u}_c = 60$ km/h
 - $k_j = 125$ veh/km

Trouvez quand l'impact du camion disparaîtra.

Modèle LWR – Goulot d'étranglement

Solution

- De manière générale, le goulot d'étranglement entraînera une congestion en amont et une circulation fluide en aval.
- Le débit en aval devrait être égal à la capacité du goulot d'étranglement.
- Une fois le goulot d'étranglement est disparu (le tracteur quitte la route), la congestion diminuera jusqu'à ce que l'écoulement libre soit rétabli sur toute la section de route affectée.
- Il est évident que dans le goulot d'étranglement, l'état de la circulation est à la capacité: état 2.
- En amont du goulot, une transition d'un état congestionné 3 à l'état 4 doit se produire et se déplacer avec la vitesse \hat{v} .
- Cela implique que dans le diagramme $q - k$ les ondes de choc sont représentées par la droite passant par le point de capacité du goulot avec une pente égale à \hat{v} .
- Par conséquent, l'état de la circulation en amont du goulot est l'état 3 et l'état en aval du goulot est l'état 4.

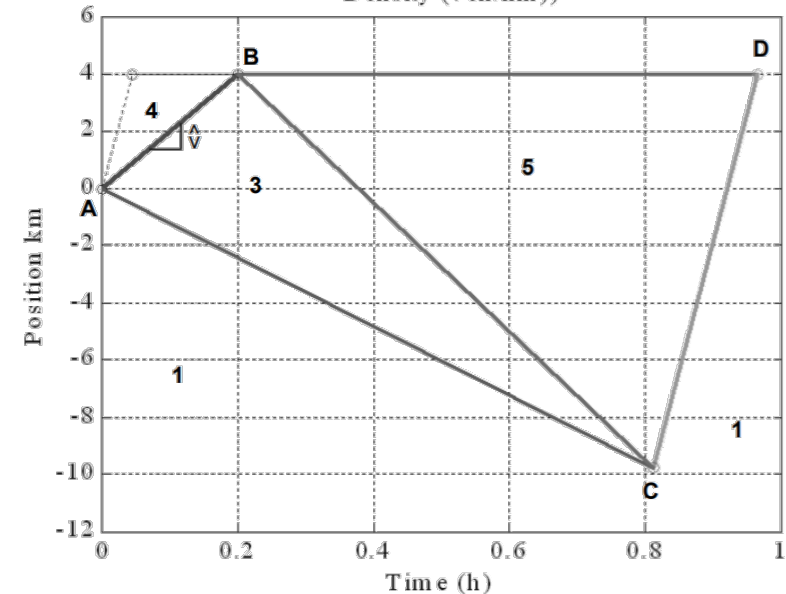
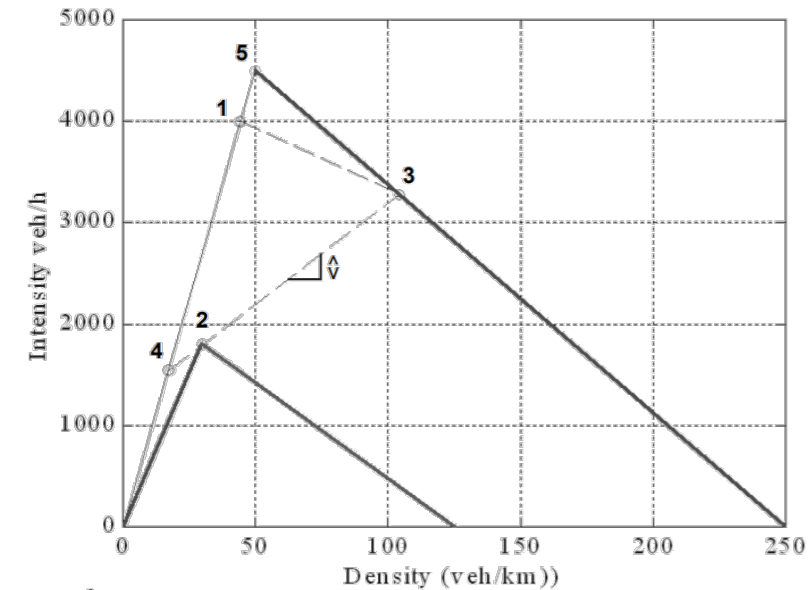


Un goulot en mouvement avec une demande constante

Modèle LWR – Goulot d'étranglement

Solution

- Notez que le débit en aval du goulot d'étranglement n'est pas égal à la capacité du goulot d'étranglement, mais il est moindre.
- L'état d'écoulement libre 1 et l'état congestionné 3 déterminent la vitesse de l'onde de choc spécifiée par la fin de la file d'attente (onde de choc de vitesse ω_{13}).
- L'origine dans le diagramme x-t est l'endroit où le goulot commence.
- Il se déplace avec une vitesse \hat{v} jusqu'à ce qu'il quitte la route.
- A un moment prévu et à une position donnée, le goulot mobile quitte la route (point B).
- La congestion, l'état 3, se transforme alors en état de capacité 5 et une onde de choc entre l'état 3 et l'état 5 commence et fait diminuer la taille de la file d'attente (la distance congestionnée).

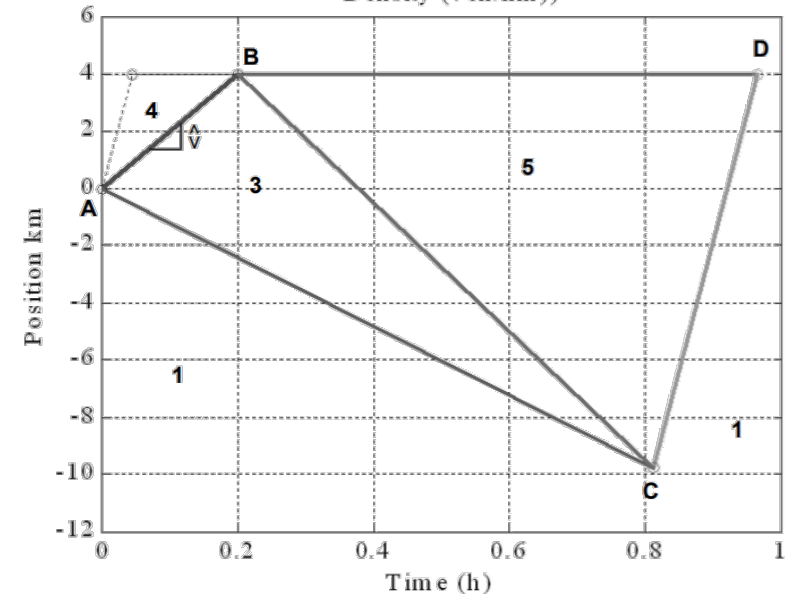
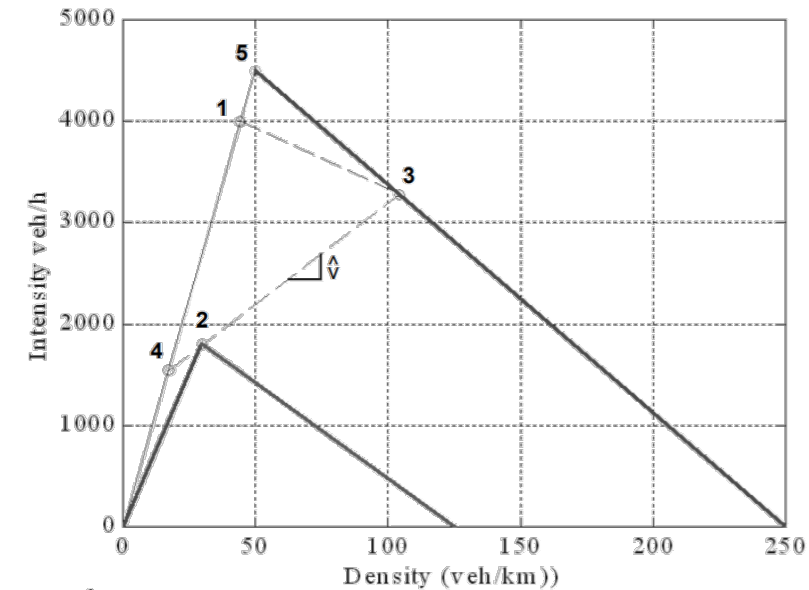


Un goulot en mouvement avec une demande constante

Modèle LWR – Goulot d'étranglement

Solution

- Les ondes de choc S_{13} et S_{53} se rencontrent au point C , puis démarre une onde de choc représentant la transition de l'état non perturbé 1 à l'état de capacité 5.
- La ligne AB est une onde de choc de vitesse ω_{24} .
- Remarque: En aval du point B , le diagramme de Daganzo fonctionne de manière moins réaliste. Les trois états 4, 5 et 1 se propagent tous à la même vitesse et ne se mélangent pas. En réalité, $u_4 > u_1 > u_5$ et les conducteurs accéléreront vers des zones de plus faible densité.



Un goulot en mouvement avec une demande constante

Types d'ondes de choc

- Plusieurs types d'ondes de choc peuvent se former, en fonction des conditions de circulation qui conduisent à leur formation.

Stationnaire avant

- Formé lorsque la capacité diminue soudainement à zéro à une approche sur un ensemble de voies, par exemple le feu rouge à une intersection signalisée ou lorsqu'une autoroute est complètement fermée en raison d'un incident grave.

Formation arrière

- Formé lorsque la capacité est réduite en dessous de la demande, ce qui entraîne la formation d'une file d'attente en amont du goulot. Cela peut se produire sur une autoroute où le nombre de voies est réduit.

Récupération arrière

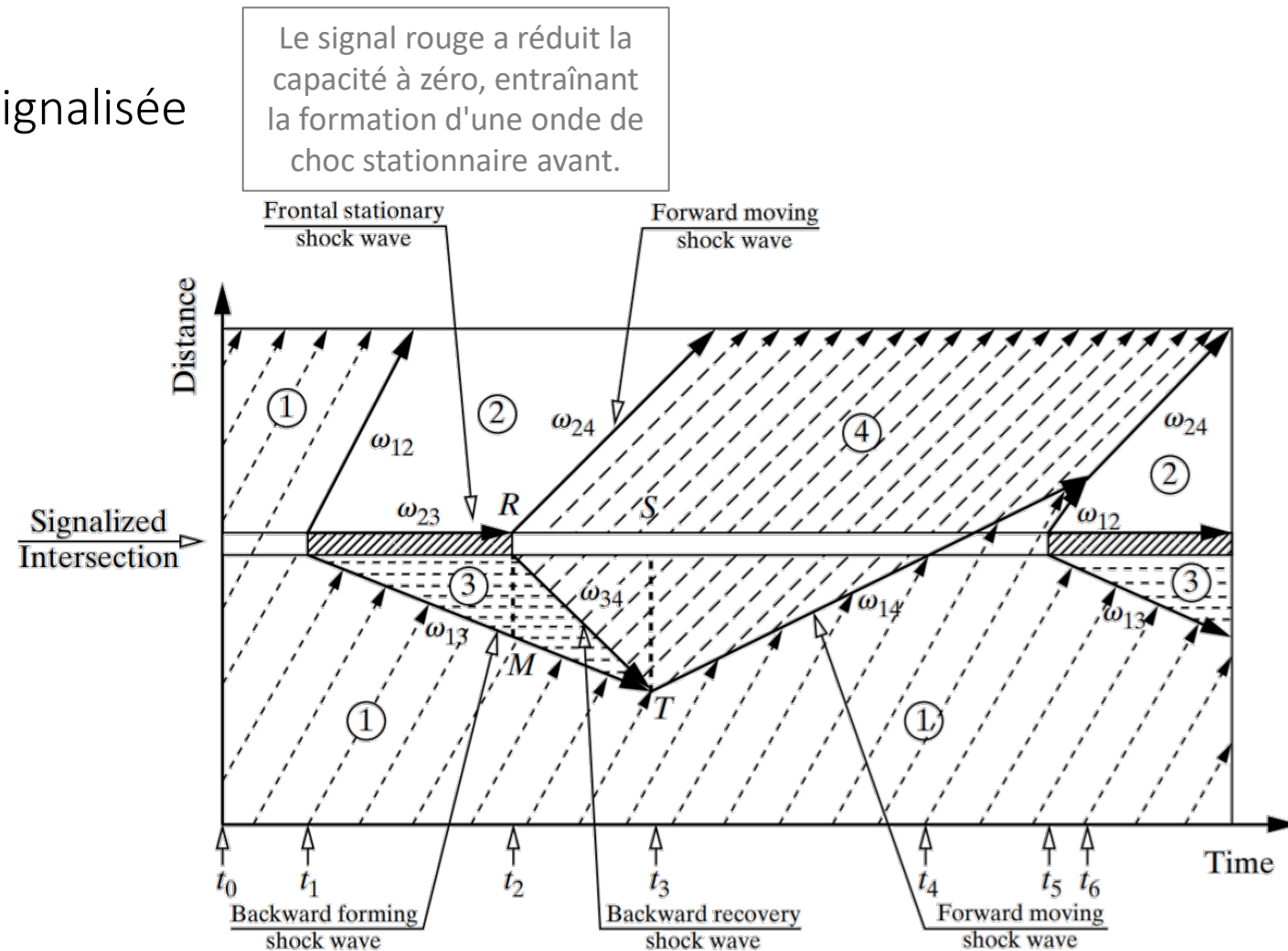
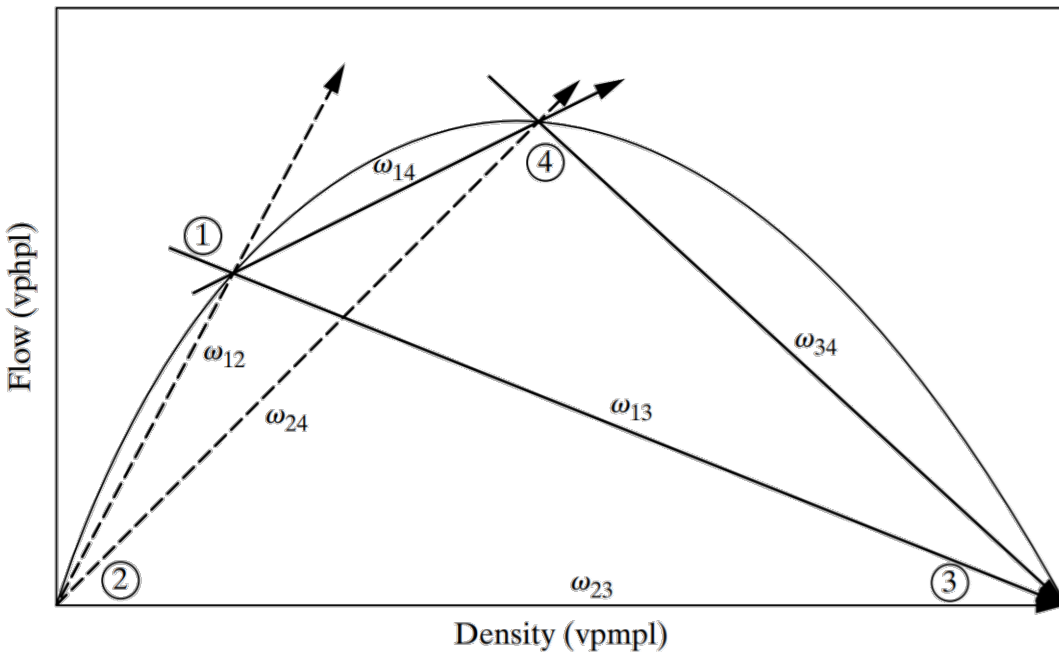
- Formé lorsque le débit devient inférieur à la capacité du goulot d'étranglement ou lorsque la restriction provoquant la réduction de capacité est supprimée. L'intersection de l'onde de choc de formation arrière et de l'onde de choc de récupération arrière indique la fin de la file d'attente.

Stationnaire arrière et récupération avant

- Formé lorsque le débit en amont d'un goulot d'étranglement est d'abord supérieur à la capacité du goulot, puis le débit se réduit à la capacité du goulot.

Types d'ondes de choc

Types d'ondes de choc à une intersection signalisée



Le signal rouge a réduit la capacité à zéro, entraînant la formation d'une onde de choc stationnaire avant.

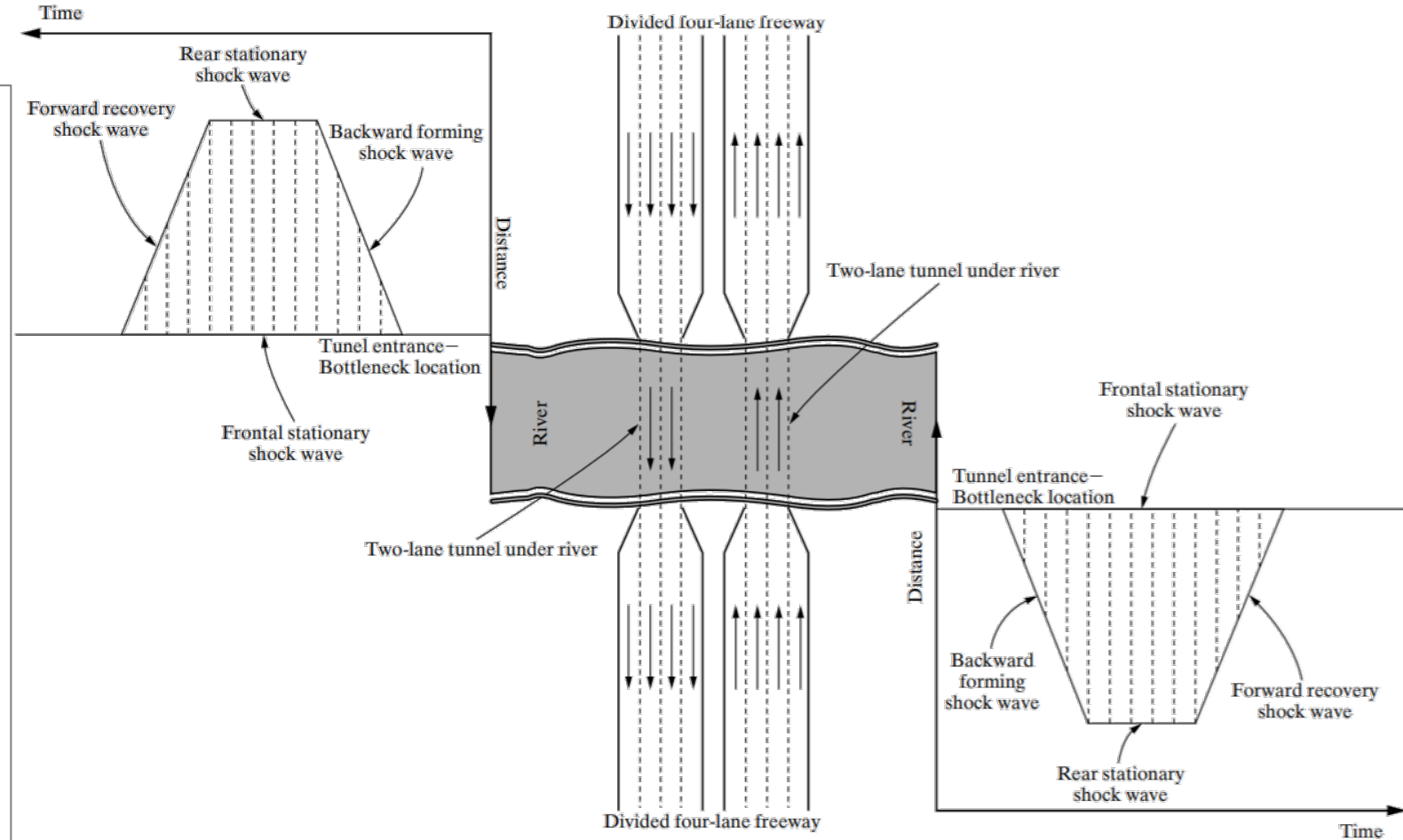
La réduction de capacité en dessous de la demande entraîne la formation d'une file d'attente en amont du goulot.

Le feu devient vert, le trafic sur cette approche est libre de traverser l'intersection.

Types d'ondes de choc

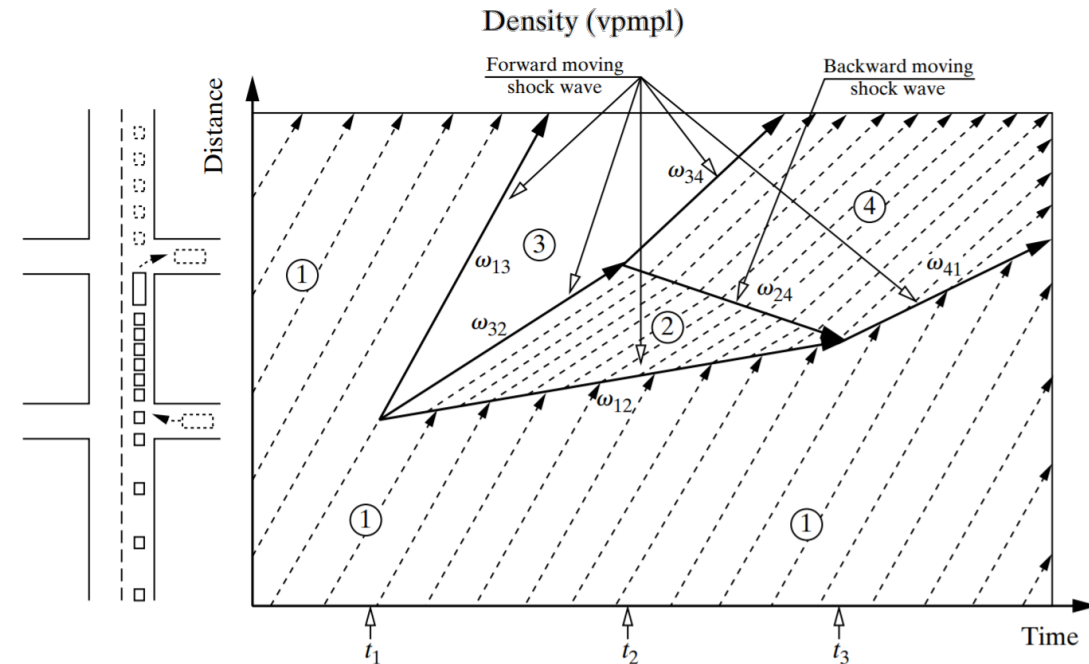
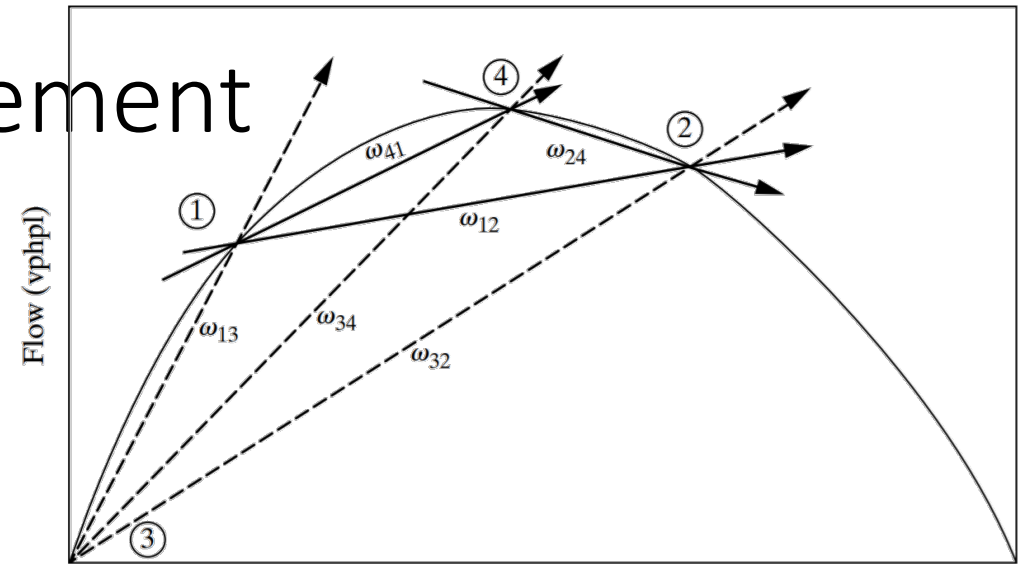
Types d'ondes de choc dues à un goulot d'étranglement

- Pendant la période hors pointe où la demande est inférieure à la capacité du tunnel, aucune onde de choc ne se forme.
- Lorsque la demande devient supérieure à la capacité du tunnel pendant l'heure de pointe, une onde de choc de type « formation arrière » se forme.
- Cette onde de choc continue à se déplacer en amont du goulot tant que le flux de demande est supérieur à la capacité du tunnel.
- Vers la fin de la période de pointe, la demande diminue jusqu'à ce qu'il soit identique à la capacité du tunnel.
- À ce stade, une onde de choc stationnaire arrière se forme jusqu'à ce que la demande devienne inférieure à la capacité du tunnel, ce qui entraîne la formation d'une onde de choc de récupération avant.



Onde de choc - Goulot d'étranglement

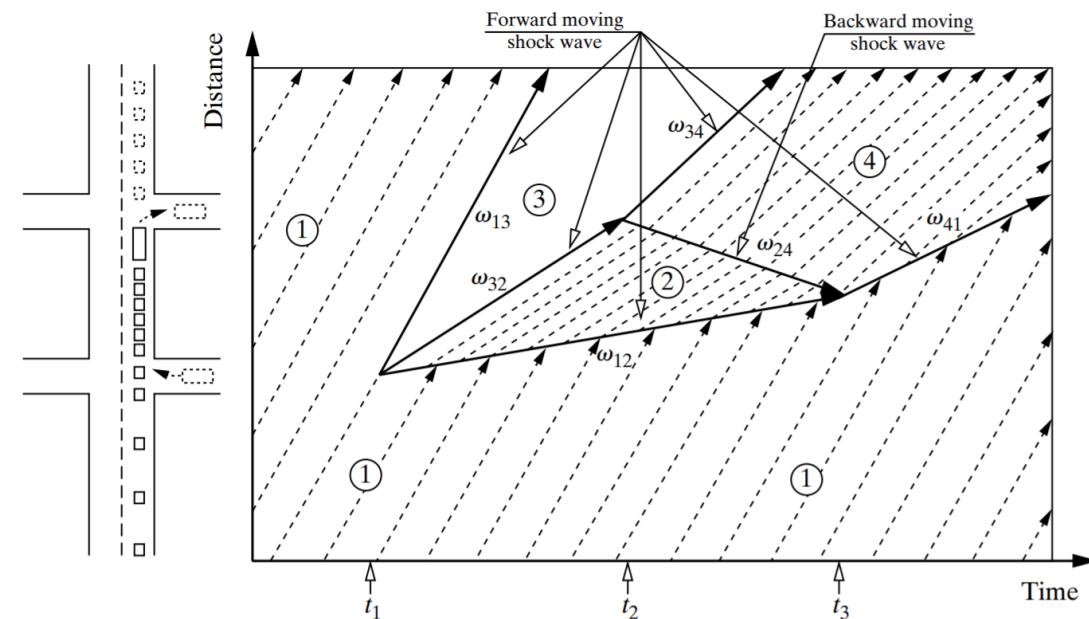
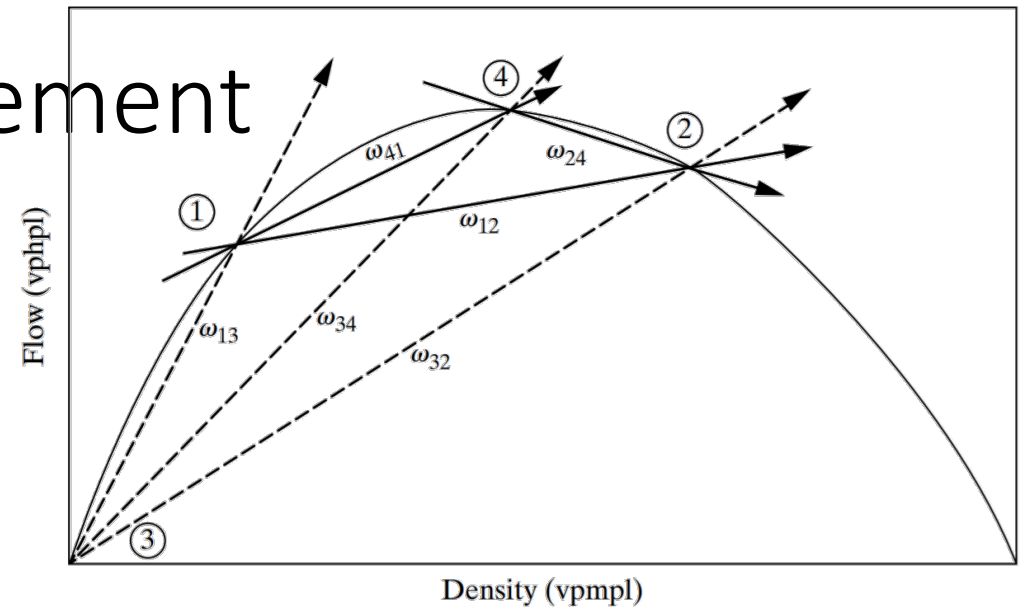
- Considérons maintenant la situation où la vitesse normale sur une autoroute est temporairement réduite sur un segment où le débit est relativement élevé mais inférieur à sa capacité.
- Par exemple, considérons un camion qui entre sur une autoroute à deux voies au moment t_1 et qui roule à une vitesse bien inférieure à la vitesse des véhicules qui roulent derrière.
- Le camion se déplace pendant un certain temps sur l'autoroute et quitte finalement l'autoroute au moment t_2 .
- Si les conditions de circulation sont telles que les véhicules ne peuvent pas dépasser le camion, les ondes de choc qui vont se former sont indiquées sur la figure.
- Les conditions de circulation avant que le camion entre sur l'autoroute au moment t_1 sont décrites par le point 1.



Onde de choc créée par une circulation lente

Onde de choc - Goulot d'étranglement

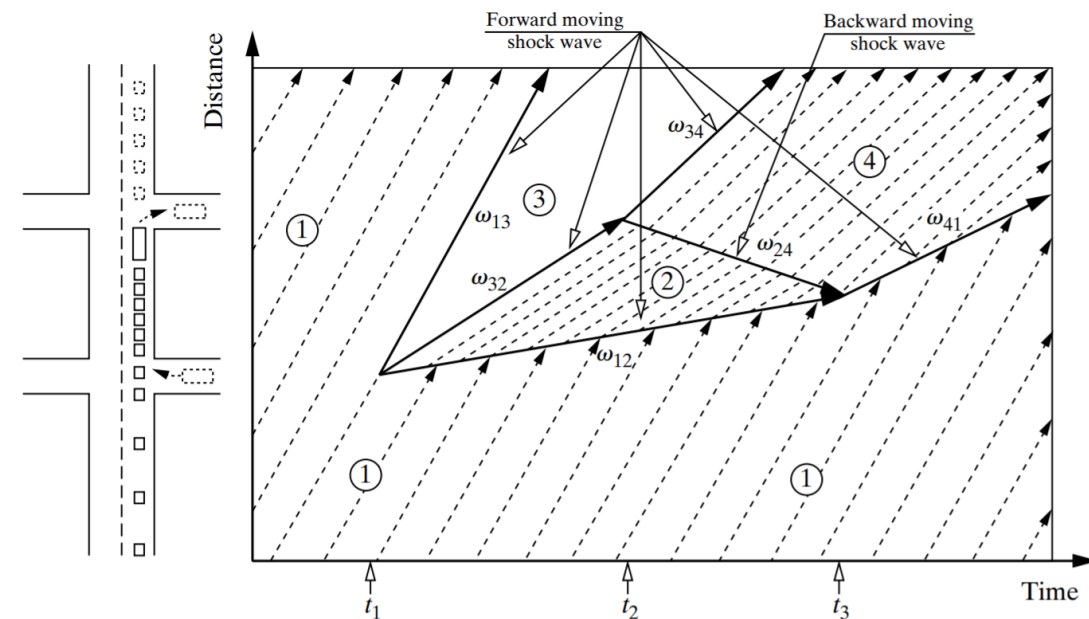
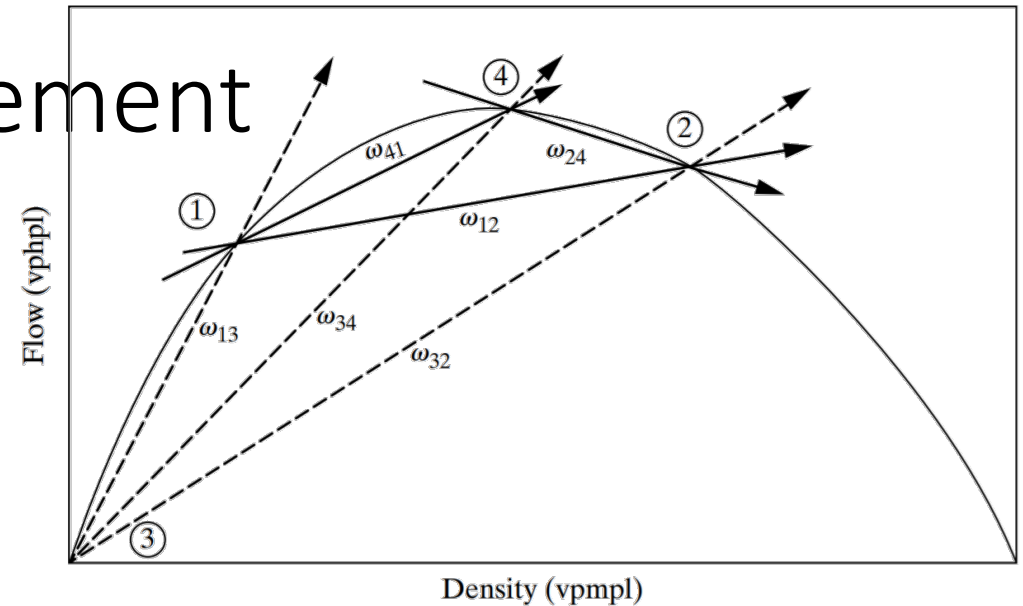
- Au temps t_1 , les véhicules immédiatement derrière le camion réduiront leur vitesse à celle du camion. Cela se traduit par une densité accrue immédiatement derrière le camion, ce qui entraîne la condition de circulation 2 → L'onde de choc en mouvement avec une vitesse de ω_{12} se forme.
- Aussi, comme les véhicules devant le camion continueront de rouler à leur vitesse d'origine, une section sur l'autoroute juste en aval du camion n'aura aucun véhicule, créant ainsi des conditions de circulation 3 → Cela entraîne également la formation d'ondes de choc en mouvement vers l'avant avec vitesses de ω_{13} , et ω_{32} .



Onde de choc créée par une circulation lente

Onde de choc - Goulot d'étranglement

- Au moment t_2 lorsque le camion quitte l'autoroute, le débit augmente à la capacité de l'autoroute avec la condition de circulation 4. Il en résulte la formation d'une onde de choc arrière de vitesse ω_{24} et d'une onde de choc avant de vitesse ω_{34} .
- Au moment t_3 , les ondes de choc avec les vitesses ω_{12} et ω_{24} coïncident entraînant une nouvelle onde de choc se déplaçant vers l'avant avec une vitesse ω_{41} . Il est à noter que les conditions de circulation 2 et 4 dépendent des conditions de circulation d'origine 1 et de la vitesse du camion.



Onde de choc créée par une circulation lente

Solutions numériques

- Le modèle LWR, la démarche pour sa solution et quelques exemples concrets ont été fournis pour montrer comment appliquer la procédure.
- Ces problèmes ont été résolus graphiquement en travaillant manuellement sur un diagramme espace-temps en utilisant la méthode des caractéristiques.
- Bien qu'illustrative, l'approche graphique présente des limites puisqu'elle ne peut traiter que des problèmes simples, qui impliquent un seul tronçon d'autoroute homogène et des conditions initiales simples.
- Dans le monde réel, un système de circulation peut consister en plusieurs segments ou autoroutes avec le trafic entrant et sortant via des rampes.
- De plus, les conditions initiales et aux limites peuvent être plus compliquées.
- Dans ces cas, l'approche graphique est insuffisante et parfois irréalisable.

Solutions numériques

- De plus, l'objectif de la résolution des problèmes de LWR est de prédire la dynamique de la circulation afin que les ingénieurs de la circulation puissent anticiper la congestion et développer des stratégies pour la réduire.
- Dans de telles applications, le temps est un problème critique et la résolution de ces problèmes en temps réel est souhaitable.
- De plus, le large déploiement de systèmes de transport intelligents permet de fournir des conditions de circulation en temps réel et de permettre des prévisions en ligne.
- Par conséquent, une solution informatisée du modèle LWR est essentielle pour faire face à des problèmes plus complexes du monde réel, pour permettre la prédiction en temps réel et pour automatiser ces prédictions par le développement d'applications en ligne.

Schéma de discrétisation

- La première étape pour développer une solution informatisée est de discrétiser le temps et l'espace.
- Les ordinateurs sont des machines numériques qui ne peuvent fonctionner que de manière discrète, de sorte que les solutions informatisées du modèle LWR doivent être numériques et discrètes.
- La figure illustre un diagramme espace-temps où le temps t est l'axe horizontal et l'espace x est l'axe vertical avec la route tracée sur le côté.
- La chaussée est divisée en une série de segments étiquetés $j \in (0, 1, \dots, J)$. Si x_0 est choisi comme point de référence et que la longueur du segment x est uniforme, l'emplacement de la fin du segment j est:

$$x_j = x_0 + j\Delta x$$

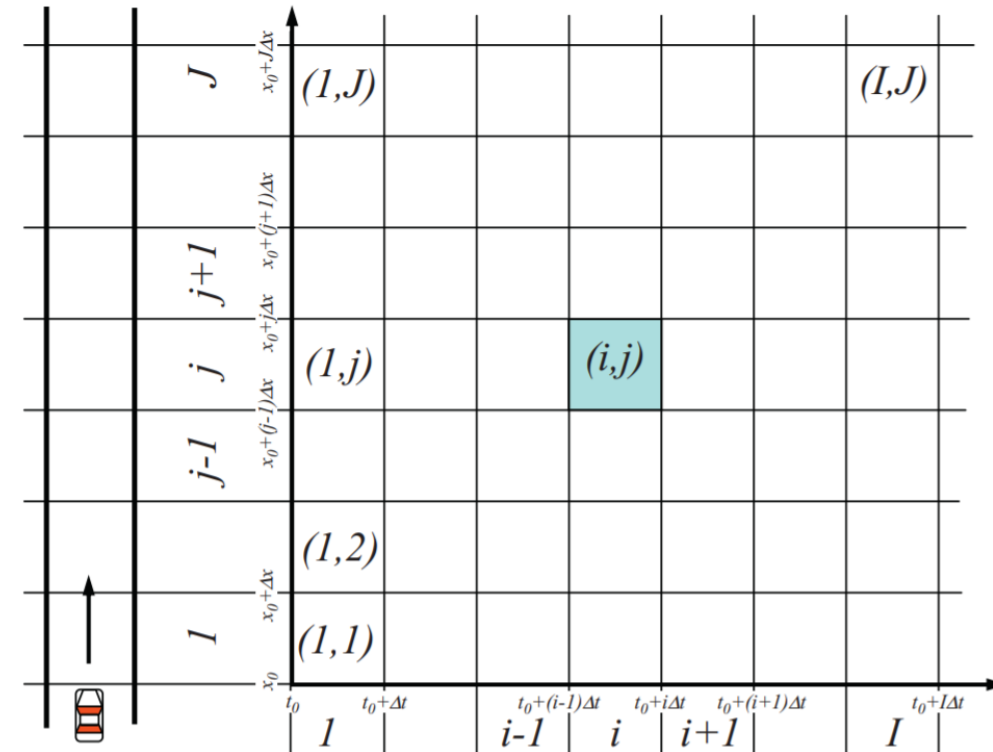


Schéma de discrétisation

Schéma de discrétisation

- De même, le temps est divisé en une série de durées $i \in (0, 1, \dots, I)$ de taille t . Si le point de référence du temps est t_0 , la fin de la durée i est au temps:

$$t_i = t_0 + i\Delta t$$

- En général, la relation suivante est requise dans un schéma de discrétisation, où v_f est la vitesse d'écoulement libre, pour garantir qu'un véhicule ne doit pas traverser plus d'un segment x dans un pas de temps t :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} > v_f$$

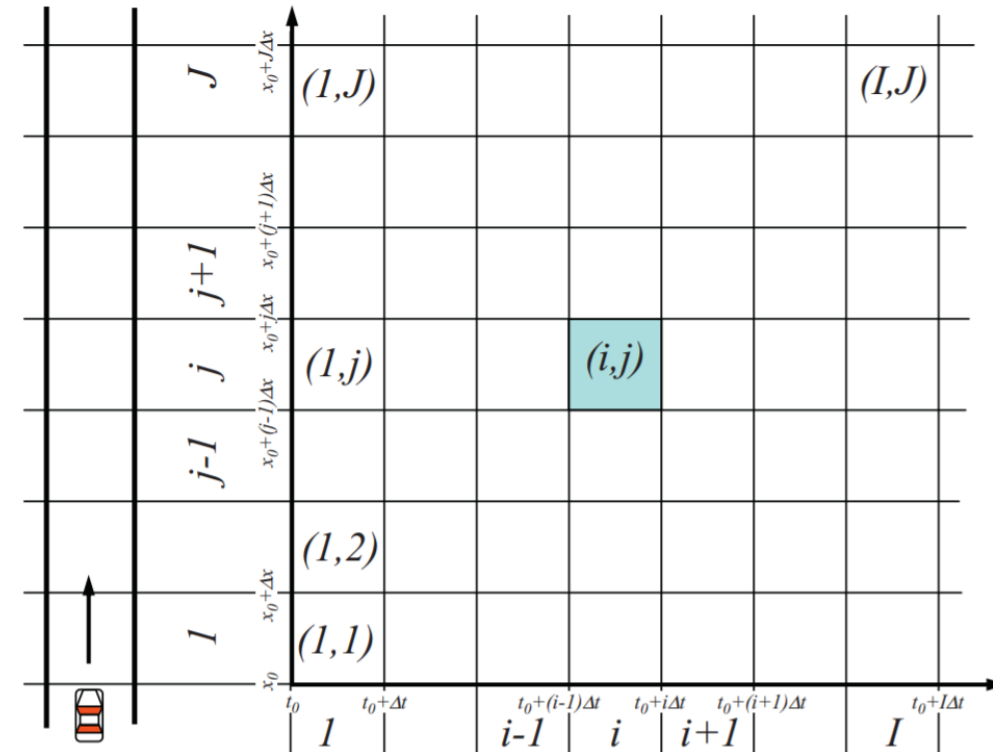


Schéma de discrétisation

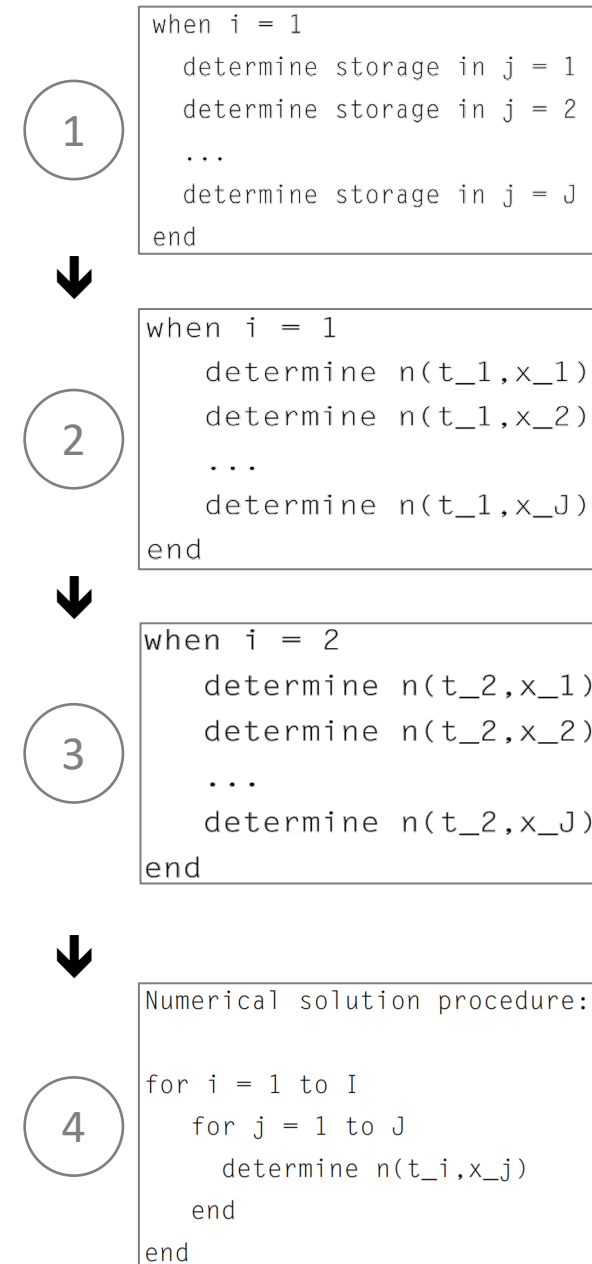
Schéma de discrétisation

1. Une solution numérique typique au problème *LWR* commence par les conditions initiales en déterminant le nombre de véhicules contenus dans chaque segment de route, un par un, sur tout le segment étudié.
2. Pour référence, la région de l'espace-temps délimitée dans la durée i et le segment j est appelée « cellule » et notée (i, j) et le nombre de véhicules contenus dans le segment j à la fin de la durée i est noté $n(t_i, x_j)$.
3. Après cela, le temps avance d'une étape et le processus ci-dessus recommence.
4. Par conséquent, la solution numérique consiste en deux boucles: le temps t_i comme boucle externe et l'espace x_j comme boucle interne..
5. Le processus se termine lorsque toutes les cellules ont été traversées et que la solution est donnée sous forme de nombre de véhicules par cellule

$$[n(t_i, x_j) | i \in (1, 2, \dots, I), j \in (1, 2, \dots, J)]$$

ou, alternativement, par des conditions de circulation:

$$k(t_i, x_j), q(t_i, x_j), \text{ and } v(t_i, x_j)$$



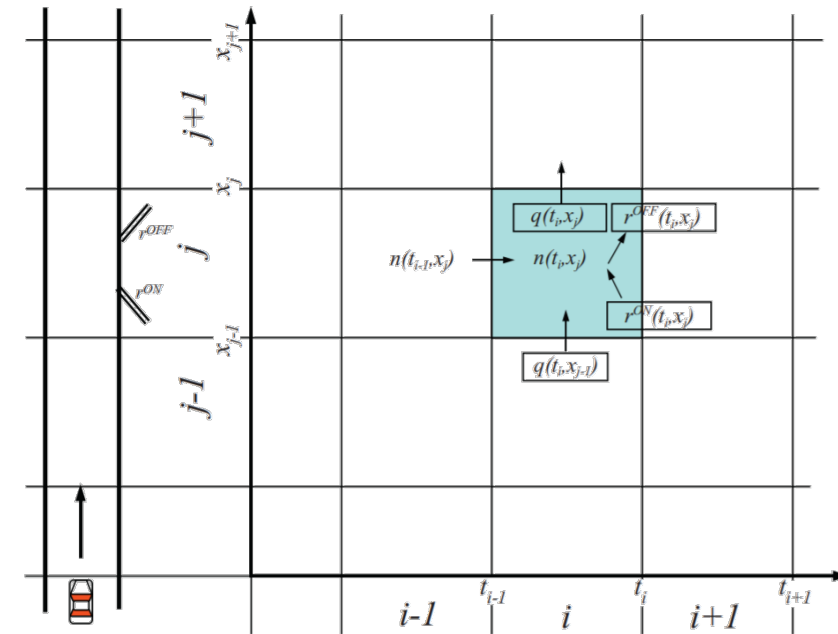
FREFLO

- FREFLO est probablement le plus ancien modèle de simulation macroscopique informatisé de la circulation, développé par Payne à la fin des années 1970.
- Comme le modèle LWR, FREFLO se compose de trois équations avec un schéma de discrétisation, illustré dans la figure.
- La première équation est la loi de conservation:
 - Stockage dans la cellule actuelle = Stockage à l'étape précédente + Véhicules arrivés de l'amont - Véhicules partis vers l'aval + Véhicules entrés via la rampe - Véhicules sortis par la sortie de la rampe
- Mathématiquement, cela peut être exprimé comme suit:

$$n(t_i, x_j) = n(t_{i-1}, x_j) + \Delta t q(t_i, x_{j-1}) - \Delta t q(t_i, x_j) + \Delta t g(t_i, x_j)$$

- Où $g(t_i, x_j)$ est le débit net via les rampes - c'est-à-dire, $g(t_i, x_j) = r^{on}(t_i, x_j) - r^{off}(t_i, x_j)$.
- Note that $n = k\Delta x$, and the above equation becomes

$$k(t_i, x_j) = k(t_{i-1}, x_j) + \frac{\Delta t}{\Delta x} [q(t_i, x_{j-1}) - q(t_i, x_j) + g(t_i, x_j)]$$



Discrétisation dans FREFLO

FREFLO

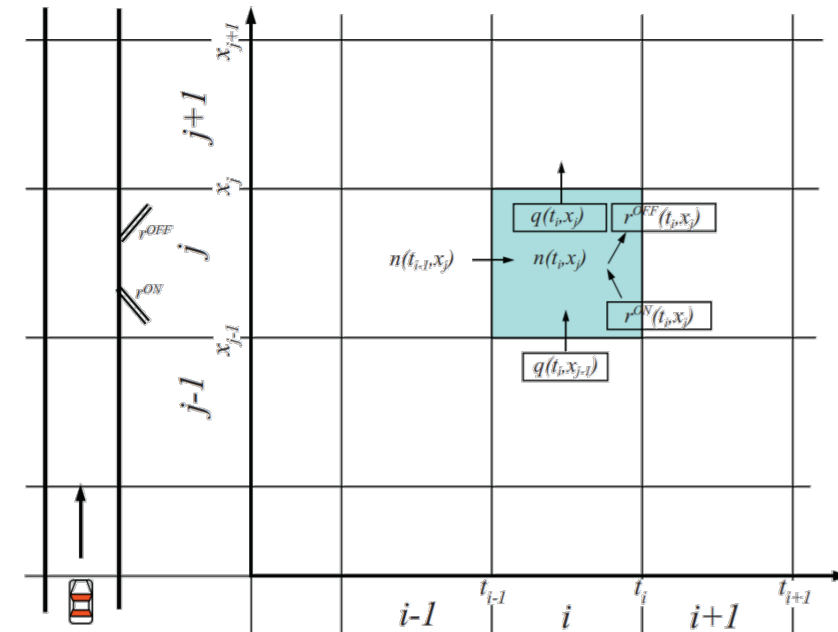
- La deuxième équation de FREFLO est l'équation d'identité sous forme discrète:

$$q(t_i, x_j) = k(t_i, x_j)v(t_i, x_j)$$

- Pour la troisième équation, FREFLO utilise une relation dynamique vitesse-densité:

vitesse dans la cellule actuelle = vitesse à l'étape précédente - convection + relaxation + anticipation

- Convection - les véhicules ont tendance à poursuivre leur vitesse lorsqu'ils se déplacent dans la section en amont,
- Relaxation - les véhicules ont tendance à adopter la relation vitesse-densité d'équilibre,
- Anticipation - les véhicules ont tendance à s'adapter aux conditions en aval, c'est-à-dire à ralentir si congestionnées.



Discretisation dans FREFLO

FREFLO

- Mathématiquement, cela peut être exprimé comme suit:

$$v(t_i, x_j) = v(t_{i-1}, x_j) - \Delta t \left\{ v(t_{i-1}, x_j) \frac{v(t_{i-1}, x_j) - v(t_{i-1}, x_{j-1})}{\Delta x_i} + \frac{1}{T_j} [v(t_{i-1}, x_j) - V(k(t_{i-1}, x_j))] + \frac{b_j}{k(t_{i-1}, x_j)} \frac{k(t_{i-1}, x_{j+1}) - k(t_{i-1}, x_j)}{\Delta x_j} \right\}$$

$$T_j = c_T \Delta x_j$$

$$b_j = c_b \Delta x_j$$

c_T et c_b sont respectivement des coefficients de temps de relaxation et d'anticipation

- En utilisant les données observées, la relation vitesse-densité d'équilibre $V(k)$ prend la forme suivante:

$$v = V(k) = \min\{88.5, (172 - 3.72k + 0.0346k^2 - 0.00119k^3)\}$$

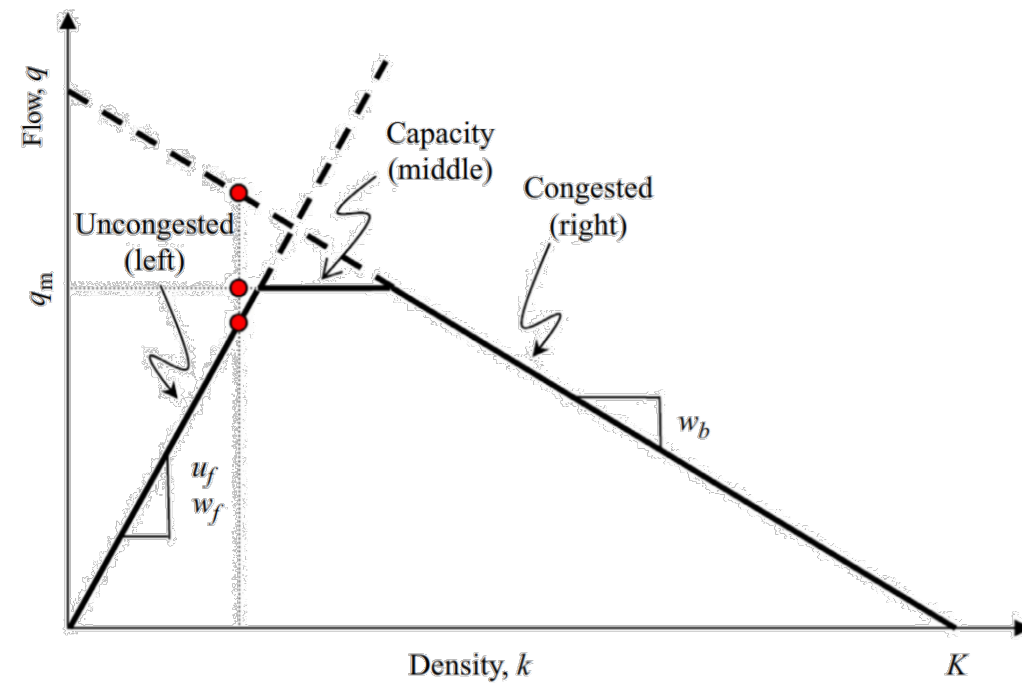
- Avec les équations ci-dessus, on peut déterminer l'état (q, k, v) de chaque cellule en partant des conditions initiales et en suivant la procédure de résolution numérique.

Cell Transmission Model

- Ce modèle a été proposé par Daganzo au milieu des années 1990.

Principe du minimum

- La figure montre une relation triangulaire débit-densité.
- La relation se compose de trois sections:
 - Non congestionné (à gauche), avec une vitesse d'écoulement libre v_f égale à la vitesse cinématique de l'onde avant w_f ,
 - Capacité (milieu) q_m ,
 - et, congestionné (à droite), avec une vitesse d'onde arrière w_b et la densité de congestion K .



Relation triangulaire débit-densité

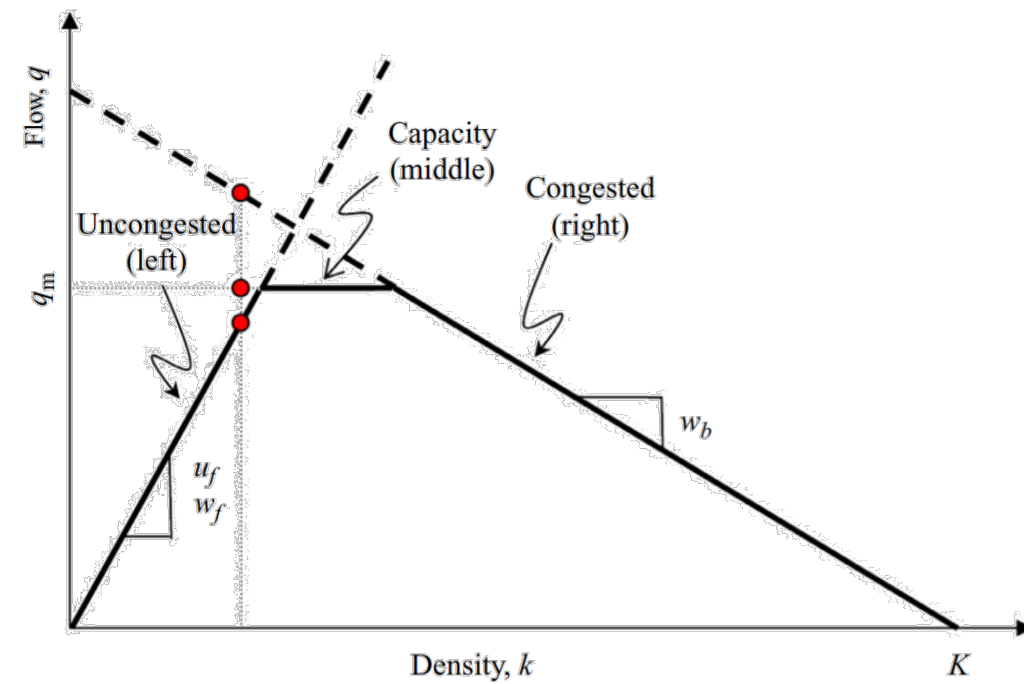
Cell Transmission Model

Principe du minimum

- Une ligne verticale à n'importe quelle densité k coupera les trois sections à hauteur kw_f , q_m , and $(K - k)w_b$. Donc, le débit correspondant à cette densité est le minimum des trois intersections:

$$q = \min\{kw_f, q_m, (K - k)w_b\}$$

- Donc, si l'on considère la section de gauche comme des conditions dictées par le trafic d'arrivée, la section du milieu comme la capacité locale et la section de droite comme des conditions dictées par la circulation en aval, l'équation ci-dessus exprime que le trafic passant par un point d'autoroute ne doit pas dépasser le taux d'arrivée en amont, la capacité locale et le taux autorisé par les conditions en aval.



Relation triangulaire débit-densité

Cell Transmission Model

Scénario principal

- Le CTM utilise le même schéma de discrétisation présenté précédemment.
- Tout le reste est le même, sauf une chose: la cellule a maintenant une longueur uniforme comme la distance parcourue par un véhicule à vitesse d'écoulement libre pendant un pas de temps unique:

$$\Delta x = v_f \Delta t$$

- Selon le principe du minimum, le trafic pouvant s'écouler dans le segment j , $q_j(t_i)$, est contraint par ce qui suit:

$$q_j(t_i) = \min\{k_{j-1}(t_{i-1})w_f, q_m, (K - k_j(t_{i-1}))w_b\}$$

- Donc, le nombre de véhicules pouvant se déplacer dans le segment j , $y_j(t_i)$, est obtenu en multipliant les deux côtés par Δt :

$$y_j(t_i) = q_j(t_i) \Delta t = \min\{k_{j-1}(t_{i-1})w_f \Delta t, q_m \Delta t, (K - k_j(t_{i-1}))w_b \Delta t\}$$

- Notez que $n = k\Delta x$, $x = v_f \Delta t$, et $v_f = w_f$ en raison de la relation triangulaire débit-densité.

Cell Transmission Model

Scénario principal

- L'équation précédente peut être transformée sous la forme suivante:

$$y_j(t_i) = \min\{k_{j-1}(t_{i-1})\Delta x, q_m \Delta t, \frac{w_b}{w_f}(K - k_j(t_{i-1}))\Delta x\}$$



$$y_j(t_i) = \min\{n_{j-1}(t_{i-1}), q_m \Delta t, \frac{w_b}{w_f}(K \Delta x - n_j(t_{i-1}))\}$$

- L'équation ci-dessus implique que le nombre de véhicules pouvant se déplacer dans le segment j , $y_j(t_i)$, est contraint par:
 - Le nombre de véhicules dans $j - 1$ précédemment: $n_{j-1}(t_{i-1})$,
 - La capacité du segment j , $q_m \Delta t$,
 - L'espace vide dans j : $\frac{w_b}{w_f}(K \Delta x - n_j(t_{i-1}))$

Cell Transmission Model

Scénario principal

- L'équation précédente peut encore être réduite à: $\gamma_j(t_i) = \min\{S_{j-1}, R_j\}$
 - Débit envoyé depuis une position en amont $S_{j-1} = \min\{n_{j-1}(t_{i-1}), q_m \Delta t\}$
 - Débit prêt à être reçu en aval $R_j = \min\{q_m \Delta t, \frac{w_b}{w_f} (K \Delta x - n_j(t_{i-1}))\}$

- Par conséquent, l'évolution de la circulation sur une voie principale d'autoroute peut être définie comme

Storage in current cell =
Storage in the cell previously +
Vehicles flowed in -
vehicles flowed out

- Mathématiquement, cela peut être exprimé comme suit:

$$n_j(t_i) = n_j(t_{i-1}) + \gamma_j(t_i) - \gamma_{j+1}(t_i)$$

Modèles d'ordre élevé

- Les modèles macroscopiques de flux de trafic discutés jusqu'à présent, y compris les modèles analytiques et numériques, se sont concentrés sur le modèle LWR et ses variantes.
- Au centre de ces modèles se trouve la conservation de masse ou de véhicule, qui peut être mathématiquement exprimée sous la forme d'une équation différentielle partielle du premier ordre:

$$\frac{\partial k(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = 0$$

où k et q sont la densité et le débit, qui dépendent du temps t et de l'espace x .

- Par conséquent, ces modèles sont appelés modèles de premier ordre.
- Les modèles du premier ordre prédisent une onde de choc lorsque deux ondes cinématiques se rencontrent.
- Par conséquent, un véhicule traversant l'onde de choc doit changer brusquement de vitesse, ce qui est physiquement impossible.
- Les efforts visant à traiter ces caractéristiques indésirables ont conduit de nombreux chercheurs à trouver des modèles plus réalistes pour représenter la dynamique du trafic.
- Ces efforts ont donné lieu à des modèles dynamiques d'ordre élevé.

Modèles d'ordre élevé

- Daganzo a noté que le modèle LWR, qui est un modèle de flux continu de premier ordre, est proposé pour une circulation dense avec un équilibre et qu'il est déficient pour la circulation dans des conditions de faible densité.
- Lorsque le dépassement des véhicules est autorisé, le modèle LWR produit des résultats insatisfaisants dans les aspects suivants:
 - Le modèle LWR prédit un changement de vitesse brusque lorsqu'un véhicule traverse une onde de choc, ce qui est irréaliste dans le monde réel.
 - Le modèle LWR ne peut pas prédire les instabilités des conditions de « stop and go ».
 - Le modèle LWR suppose un temps de réaction nul, ce qui ne se produit pas dans le monde réel.
- Ces lacunes impliquent que lorsque le dépassement est autorisé, le modèle LWR ne reconnaît pas que la vitesse préférée pour chaque véhicule varie dans le temps et que les vitesses souhaitées parmi un groupe de véhicules varient également.
- Ces variations peuvent entraîner la dispersion d'un peloton d'une manière qui n'est pas prévue par le modèle LWR.

Modèles d'ordre élevé

- Les modèles développés jusqu'à présent ont tenté de corriger ces lacunes, et presque tous ces modèles intègrent une équation de « momentum conservation ».
- Payne et Whitham ont proposé un modèle dynamique, le modèle PW (1971), en tentant de lisser la discontinuité du changement de vitesse à travers les ondes de choc.
- Une équation de « momentum conservation » a été introduite dans ce modèle pour décrire la structure d'une onde de choc.
- Ce travail fondateur a inspiré de nombreux travaux futurs.

PW Model (1971)

- Proposé par Payne et indépendamment par Whitham, le modèle PW consiste en un système de deux équations:
 - Le premier est la conservation de masse ou de véhicule donnée dans le modèle LWR,
 - La deuxième équation est dérivée de l'équation de mouvement de Navier-Stokes pour une fluide compressible unidimensionnelle avec une pression et un terme de relaxation.

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -v \frac{\partial v}{\partial x} - \lambda(v - V_d(k)) - \frac{1}{k} \frac{dP}{dk} \frac{\partial k}{\partial x} \end{cases}$$

où v est la vitesse du trafic, $V_d(k)$ est la relation d'équilibre vitesse-densité, $P(k)$ est la pression du trafic et λ est un coefficient.

- L'équation du moment de ce modèle décrit la structure d'une onde de choc.
- Cette équation tente de lisser la discontinuité du changement de vitesse à travers les ondes de choc.
- Notez que FREFLO (présenté précédemment) est une solution numérique du modèle PW.

PW Model (1971)

➤ Plusieurs lacunes se trouvent dans le modèle PW:

1. Il ne lisse pas toutes les ondes de choc.
2. Les véhicules du modèle PW peuvent ajuster leur vitesse en réponse aux perturbations venant de l'arrière, alors qu'en réalité, les véhicules répondent généralement aux véhicules en avant.
3. Le modèle PW incorpore une équation de moment, qui est dérivée d'un modèle de suivi de voiture. Cette équation de moment ne prend pas en compte les termes d'espacement et de vitesse de second ordre et d'ordre supérieur, ce qui peut ne pas être négligeable lorsque les espacements et les vitesses ne varient pas lentement.
4. Le modèle PW ainsi que d'autres modèles d'ordre élevé produisent toujours des vitesses de vagues supérieures aux vitesses de trafic. C'est une propriété peu attrayante des modèles macroscopiques car elle implique que les conditions futures d'un véhicule sont partiellement décidées par ce qui se passe derrière lui.

PW Model (1971)

- Plusieurs lacunes se trouvent dans le modèle PW:
 5. La force que les modèles d'ordre élevé atténuent les chocs s'avère être la faiblesse de ces modèles. En effet, tout modèle qui tente de lisser toutes les discontinuités doit parfois prédire des vitesses négatives et ces vitesses négatives ne peuvent pas être supprimées par des méthodes d'approximation numérique convergente.
 6. Sixièmement, mais probablement pas le dernier, les modèles d'ordre élevé impliquent des équations différentielles partielles plus complexes et plus de variables, ce qui augmente la complexité des calculs et sont plus difficiles à calibrer et à mettre en œuvre.
- Compte tenu de ces limites, de nombreux chercheurs ont tendance à croire que les modèles d'ordre élevé, malgré leur complexité supplémentaire et leurs paramètres supplémentaires, pourraient ne pas être supérieurs au modèle LWR.

Références

- May, A. D. (1990). *Traffic flow fundamentals*.
- Gartner, N. H., Messer, C. J., & Rathi, A. (2002). Traffic flow theory-A state-of-the-art report: revised monograph on traffic flow theory.
- Ni, D. (2015). *Traffic flow theory: Characteristics, experimental methods, and numerical techniques*. Butterworth-Heinemann.
- Kessels, F., Kessels, R., & Rauscher. (2019). *Traffic flow modelling*. Springer International Publishing.
- Treiber, M., & Kesting, A. (2013). Traffic flow dynamics. *Traffic Flow Dynamics: Data, Models and Simulation, Springer-Verlag Berlin Heidelberg*.
- Garber, N. J., & Hoel, L. A. (2014). *Traffic and highway engineering*. Cengage Learning.
- Elefteriadou, L. (2014). *An introduction to traffic flow theory* (Vol. 84). New York: Springer.
- Victor L. Knoop (2017), Introduction to Traffic Flow Theory, Second edition
- Serge P. Hoogendoorn, Traffic Flow Theory and Simulation
- Nicolas Saunier, Course notes for “Traffic Flow Theory – CIV6705”
- Mannering, F., Kilareski, W., & Washburn, S. (2007). *Principles of highway engineering and traffic analysis*. John Wiley & Sons.
- Haight, F. A. (1963). *Mathematical theories of traffic flow* (No. 519.1 h3).

