

---

# **Les diagrammes fondamentaux**

---

**Hamzeh Alizadeh, Ph.D.**

Directeur – Recherches et valorisation des données  
ARTM

# Introduction

- Il est raisonnable de supposer que les conducteurs prendront en moyenne les mêmes décisions dans les mêmes conditions moyennes.
- Si les conducteurs circulent dans une circulation qui a une certaine vitesse  $u$ , ils conserveront en moyenne le même espacement  $s$  par rapport au véhicule précédent.
- Ceci dit, si nous considérons une circulation stationnaire (indépendante du temps), il est raisonnable de supposer qu'il existe une relation entre
  - la densité  $k$  et la vitesse moyenne  $v$ ,
  - et entre la densité et le débit, ou le débit et la vitesse.
- Cette relation est parfois appelée la relation d'équilibre et s'exprime par:

$$q = k \times v$$

# Introduction

- Analogie avec la dynamique des fluides: le flux de trafic est similaire au flux de fluides et l'état de la circulation est décrit en fonction de la vitesse  $v$ , de la densité  $k$  et du débit  $q$ .
- Cette relation dépend
  - des différentes propriétés de la route (largeur des voies, pente, etc.),
  - de la composition du flux de trafic (pourcentage de camions, fraction de navetteurs, conducteurs expérimentés, etc.),
  - des conditions extérieures (conditions météorologiques, etc.),
  - de la réglementation de la circulation,
  - etc.
- Ce cours présente le concept de diagramme fondamental et la relation entre les caractéristiques macroscopiques de la circulation.

# Introduction

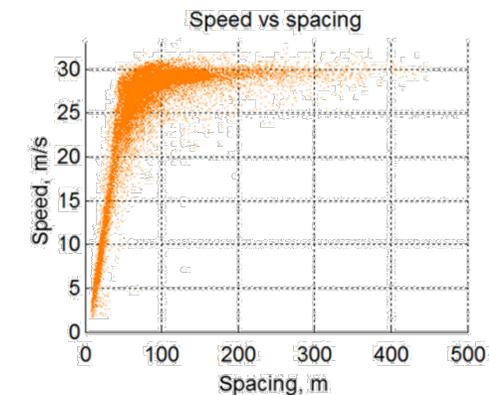
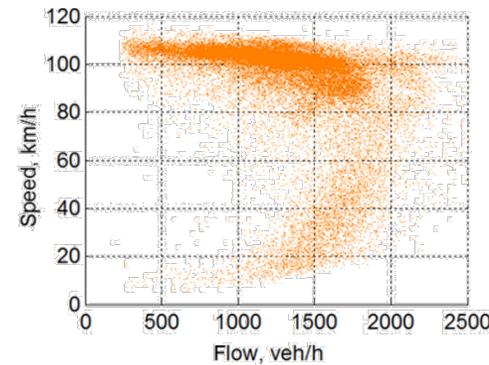
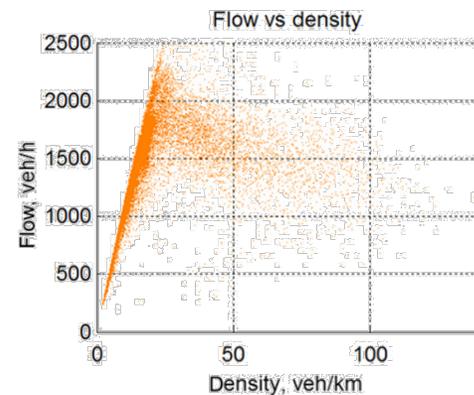
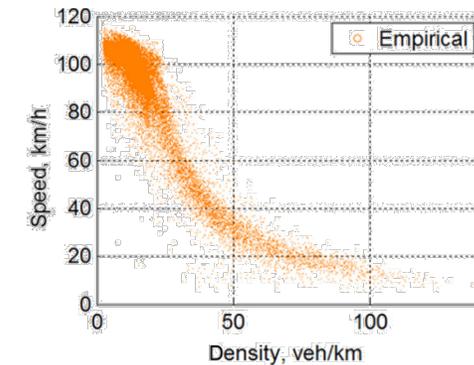
- L'image illustre les données capturées par une caméra vidéo de Georgia NaviGator, le système de transport intelligent de l'État de Géorgie.
- Comme indiqué précédemment, les données de trafic peuvent être extraites d'images vidéo à l'aide du traitement d'image.
- Un détecteur virtuel a été placé dans chaque voie.
- Données collectées:
  - Volume agrégé sur des périodes de 20 s
  - Occupation
  - La vitesse
  - Longueur moyenne du véhicule
  - Densité
  - Espacement



*Une image capturée par des caméras vidéo du système de collecte de données NaviGator*

# Introduction

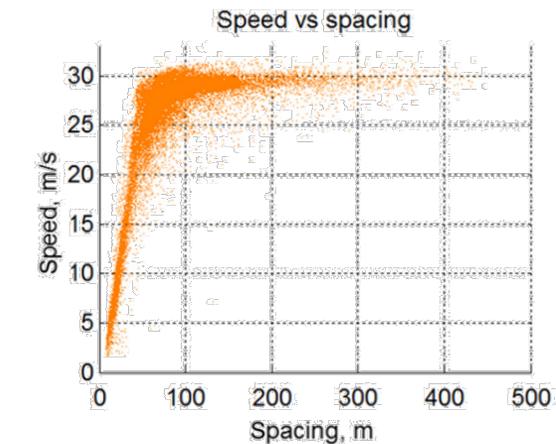
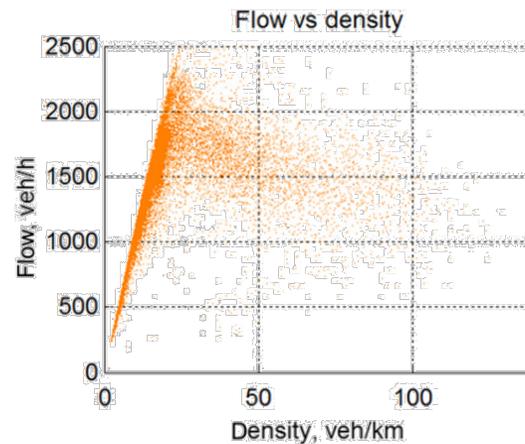
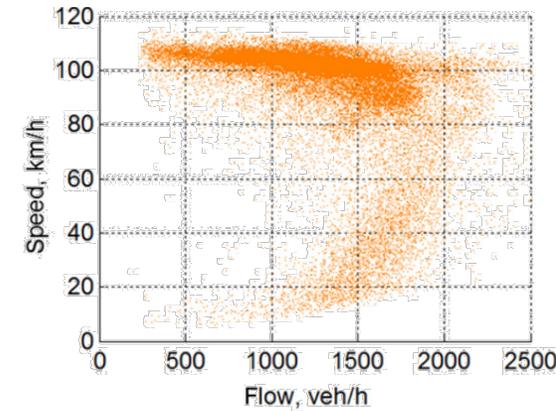
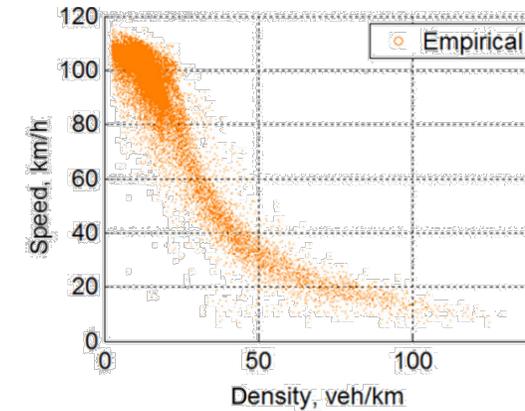
- Les diagrammes sont générés à l'aide de données collectées à un emplacement fixe.
- Un an d'observations sur le terrain agrégées à 5 min (c'est-à-dire que chaque point de la figure représente l'état de la circulation observé en 5 min).
- La vitesse du trafic est ici la vitesse moyenne temporelle, car il est impossible de calculer la vitesse moyenne spatiale à partir des données agrégées des capteurs fixes.
- La densité est estimée à partir du débit et de la vitesse (la méthode exacte n'est pas décrite).
- Donc, ces graphiques sont spécifiques à un emplacement, c'est-à-dire que les graphiques générés aux différents endroits peuvent différer.
- Les informations de temps sont perdues dans la figure → On ne peut pas déduire l'heure à laquelle un point de donnée a été observé.
- Donc, la figure représente en fait une relation d'équilibre → les modèles d'une telle relation sans référence au temps sont appelés «modèles d'équilibre» ou «modèles d'état stationnaire».



*Relations entre  $q$ ,  $k$  et  $v$  observées à partir du système de collecte de données NaviGator*

# Introduction

- Chaque graphique présente une relation par paire entre le débit, la vitesse et la densité.
- Par exemple, le graphique en haut à gauche montre une relation décroissante entre la vitesse et la densité avec deux interceptions intuitives.
- Une interception représente un scénario où il y a très peu de véhicules sur la route (c.-à-d.  $k \rightarrow 0$ ). Donc, on peut conduire à la vitesse désirée sans être bloqué par un véhicule lent ( $v \rightarrow v_f$ , la vitesse d'écoulement libre).
- L'autre interception correspond à une période de pointe de la circulation. Donc, la route est bloquée ( $k \rightarrow k_j$ , densité de congestion "jam"), ce qui entraîne une condition de « stop and go » ( $v \rightarrow 0$ ).
- De nombreuses fonctions ont été proposées pour établir la relation entre la vitesse et la densité.



Relations entre  $q$ ,  $k$  et  $v$  observées à partir du système de collecte de données NaviGator

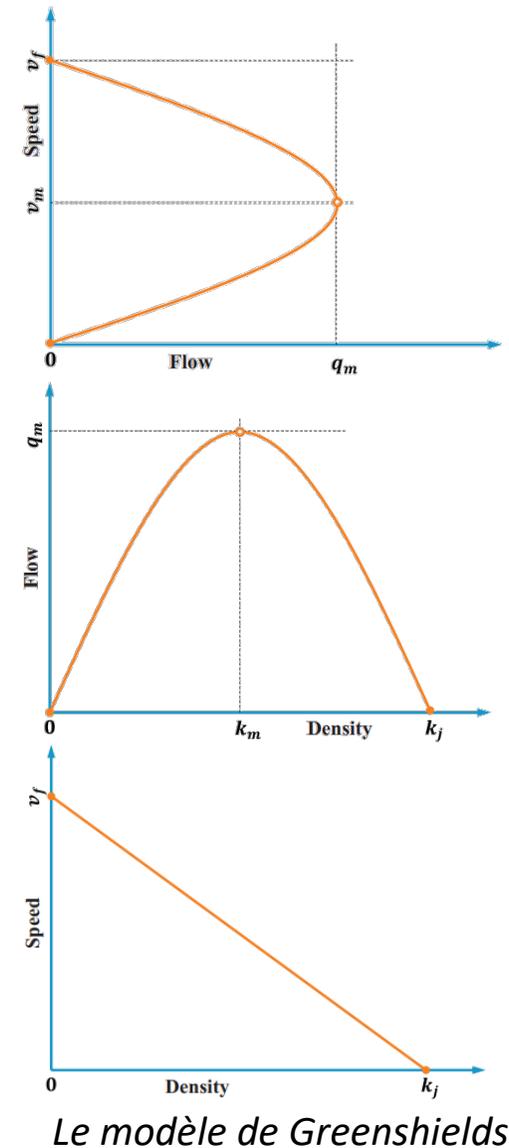
# Le modèle de Greenshields

- Greenshields a proposé une fonction linéaire pour illustrer la relation entre la vitesse et la densité.
- Premier diagramme fondamental proposé pour décrire l'état de la circulation.
- La fonction de Greenshields peut être complètement déterminée à partir de deux points sur la ligne:
  - $k = 0, v = v_f$
  - $k = k_j, v = 0$
- La relation vitesse - densité  $v - k$  peut être exprimée comme :

$$v = v_f \left(1 - \frac{k}{k_j}\right)$$

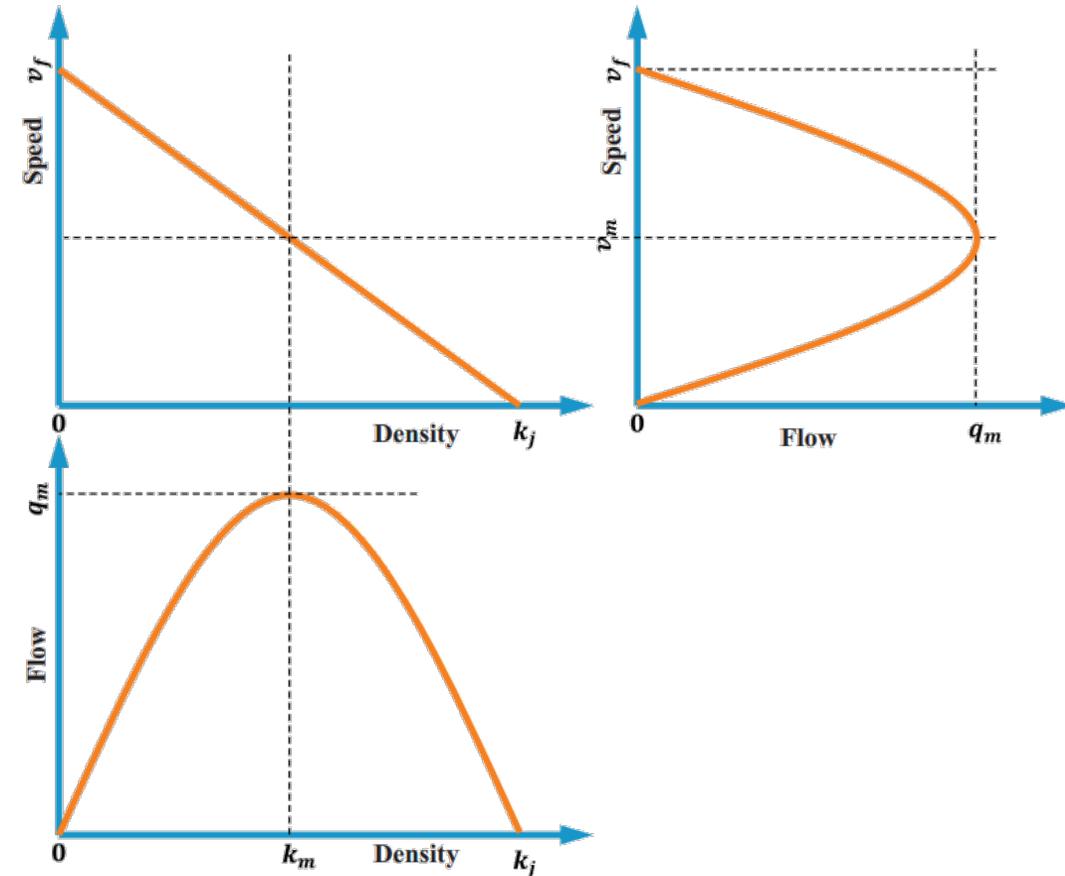
- En remplaçant dans la relation d'identité  $q = k \times v$  et en éliminant  $v$ , on peut déduire la relation débit-densité  $q - k$  impliquée par le modèle Greenshields:

$$q = v_f \left(k - \frac{k^2}{k_j}\right)$$



# Points particuliers du diagramme fondamental

- Il est intéressant de noter quelques points particuliers sur la courbe.
- Lorsque la densité est proche de zéro ( $k \rightarrow 0$ ), le débit tombe à zéro ( $q \rightarrow 0$ ), car la route est presque vide.
- Lorsque la route est congestionnée ( $k = k_j$ ), le débit devient également nul ( $q = 0$ ), car les véhicules ne peuvent pas bouger.
- En partant de l'origine ( $k = 0, q = 0$ ), le débit augmente à mesure que la densité augmente.
- Cette tendance se poursuit jusqu'à ce que, à un moment donné ( $k = k_m$ ), le débit atteigne son maximum ( $q = q_m = \frac{v_f k_j}{4}$ ).
- Après ce point, le débit commence à baisser à mesure que la densité continue d'augmenter, et le débit devient nul ( $q = 0$ ) lorsque la densité atteint la densité de congestion ( $k = k_j$ ).
- Dans cette notation,  $q_m$  est le débit maximum - c'est-à-dire la capacité - et  $k_m$  est la densité optimale (critique) - c'est-à-dire la densité lorsque le débit atteint son maximum.



*Le modèle de Greenshields*

# Points particuliers du diagramme fondamental

- Le modèle de Greenshields

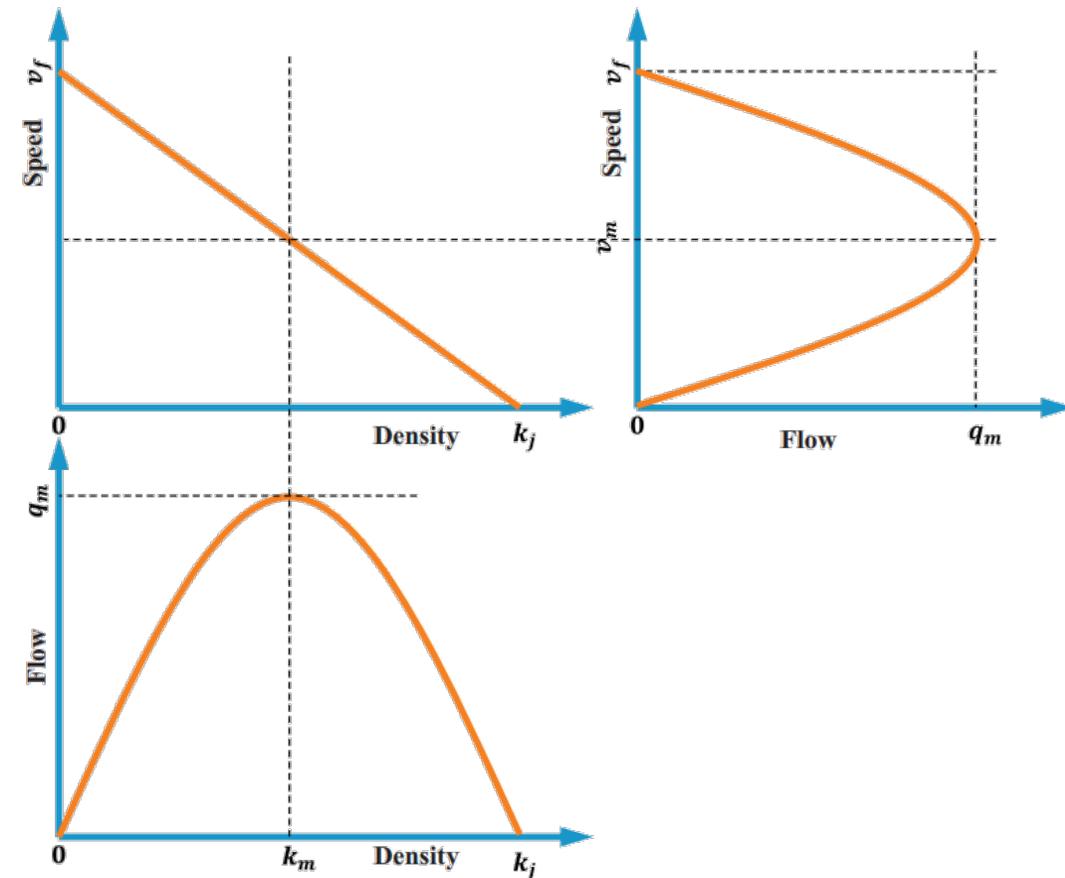
$$q = k_j \left( v - \frac{v^2}{v_f} \right)$$

- Lorsque le débit est proche de zéro ( $q \rightarrow 0$ ), deux scénarios sont possibles:

1. La route est presque vide et les quelques véhicules sur la route peuvent se déplacer à vitesse libre ( $v \rightarrow v_f$ );
2. La route est congestionnée, de sorte que personne ne peut bouger ( $v \rightarrow 0$ ).

- Alors, une valeur de débit inférieure à la capacité dans l'équation se traduira normalement par deux vitesses:

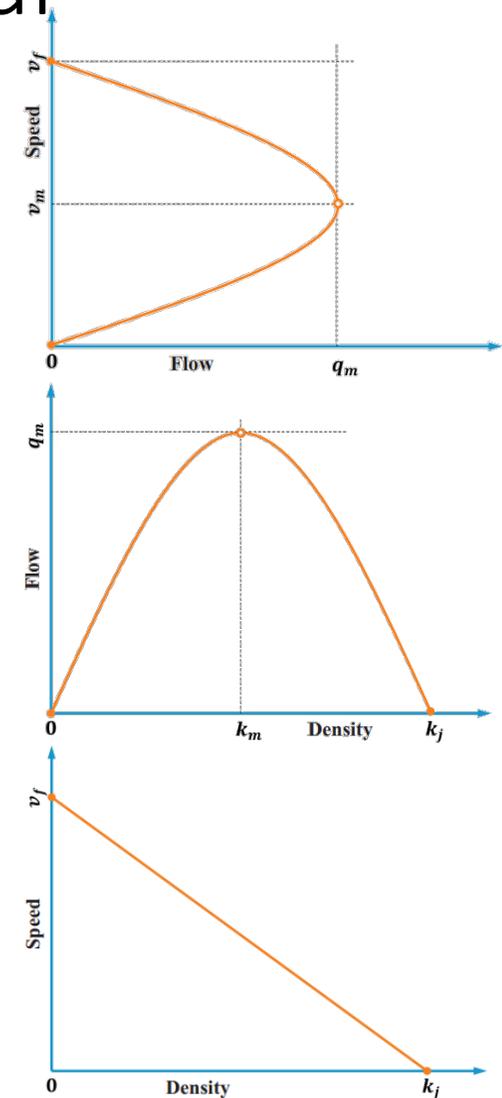
1. Une plus basse, qui correspond à une circulation congestionnée.
2. Une plus élevée, correspondant à une meilleure condition de la circulation (fluide). Lorsque le débit atteint sa capacité ( $q = q_m$ ), les deux vitesses deviennent une, ce qui est appelé la vitesse optimale (critique),  $v_m$ .



*Le modèle de Greenshields*

# Points particuliers du diagramme fondamental

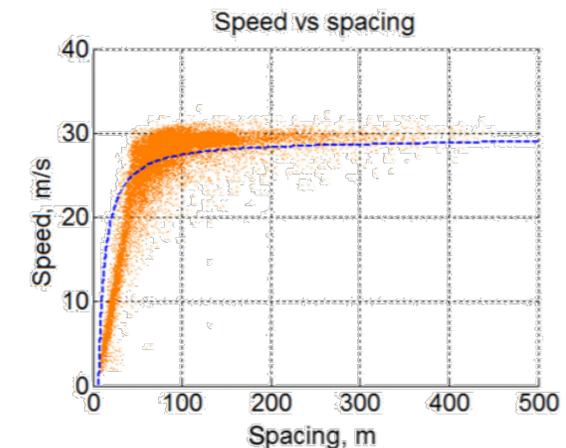
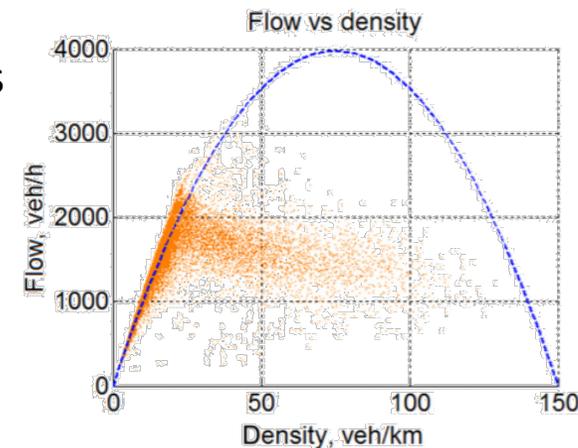
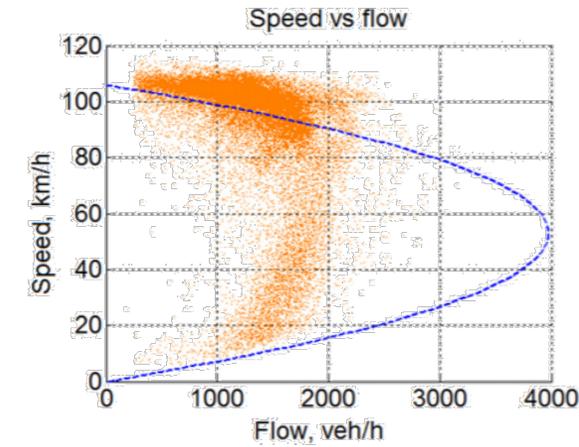
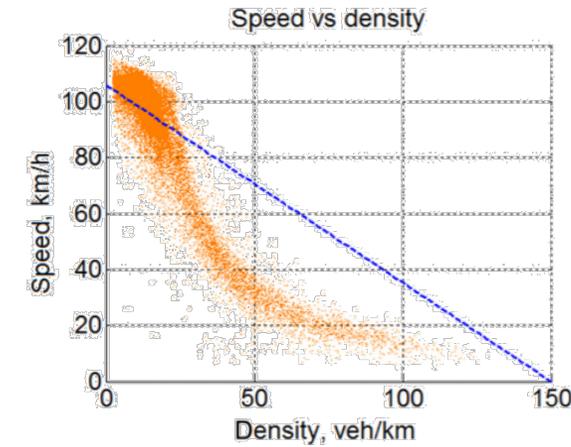
- Notez que les trois relations par paires - c'est-à-dire les relations vitesse-densité, débit-densité et vitesse-débit - reflètent différentes facettes de la relation débit-vitesse-densité.
- Par conséquent, ils ont différentes applications dans la théorie des flux de circulation. Par exemple:
  - La relation vitesse-densité relie le choix de vitesse du conducteur à la concentration de véhicules autour du conducteur. Donc, la relation est généralement utilisée pour comprendre comment les conducteurs ajustent leur vitesse en réponse du trafic dans leur voisinage, c'est-à-dire la modélisation du comportement de suivi des conducteurs.
  - Comme on le verra plus tard dans le cours, la relation débit-densité est pratique pour expliquer la propagation des perturbations dans le flux de trafic (telles que les ondes de chocs et leurs vitesses) et, par conséquent, est fréquemment utilisée dans la modélisation dynamique de la circulation.
  - La relation vitesse-débit est largement utilisée pour effectuer une analyse de la capacité routière et déterminer le niveau de service (LOS) sur les autoroutes à plusieurs voies.



*Le modèle de Greenshields*

# Modèles à régime unique

- Le modèle Greenshields est simple et représente bien la relation entre la vitesse  $v$ , la densité  $k$  et le débit  $q$ .
- Des observations empiriques révèlent que le modèle souffre d'un manque de précision.
- Par exemple, le modèle prédit que la capacité ( $q_m$ ) se produit à la moitié de la densité de congestion ( $k_m = 1/2k_j$ ).
- Si l'on suppose une longueur moyenne de véhicule de 6 m, la densité de congestion serait d'environ  $1000/6 \approx 164 \text{ veh/km}$ . La moitié de ce chiffre est  $82 \text{ veh/km}$ .
- Cependant, les observations réelles suggèrent que  $k_m$  est très probablement entre 25 à 40  $\text{veh/km}$ .
- De plus, contrairement à la façon dont la vitesse diminue linéairement avec la densité, les observations sur le terrain montrent que la vitesse d'écoulement libre peut être maintenue jusqu'à une densité d'environ 15  $\text{veh/km}$  avant qu'une baisse considérable de vitesse ne puisse être observée.



Le modèle de Greenshields et les données empiriques

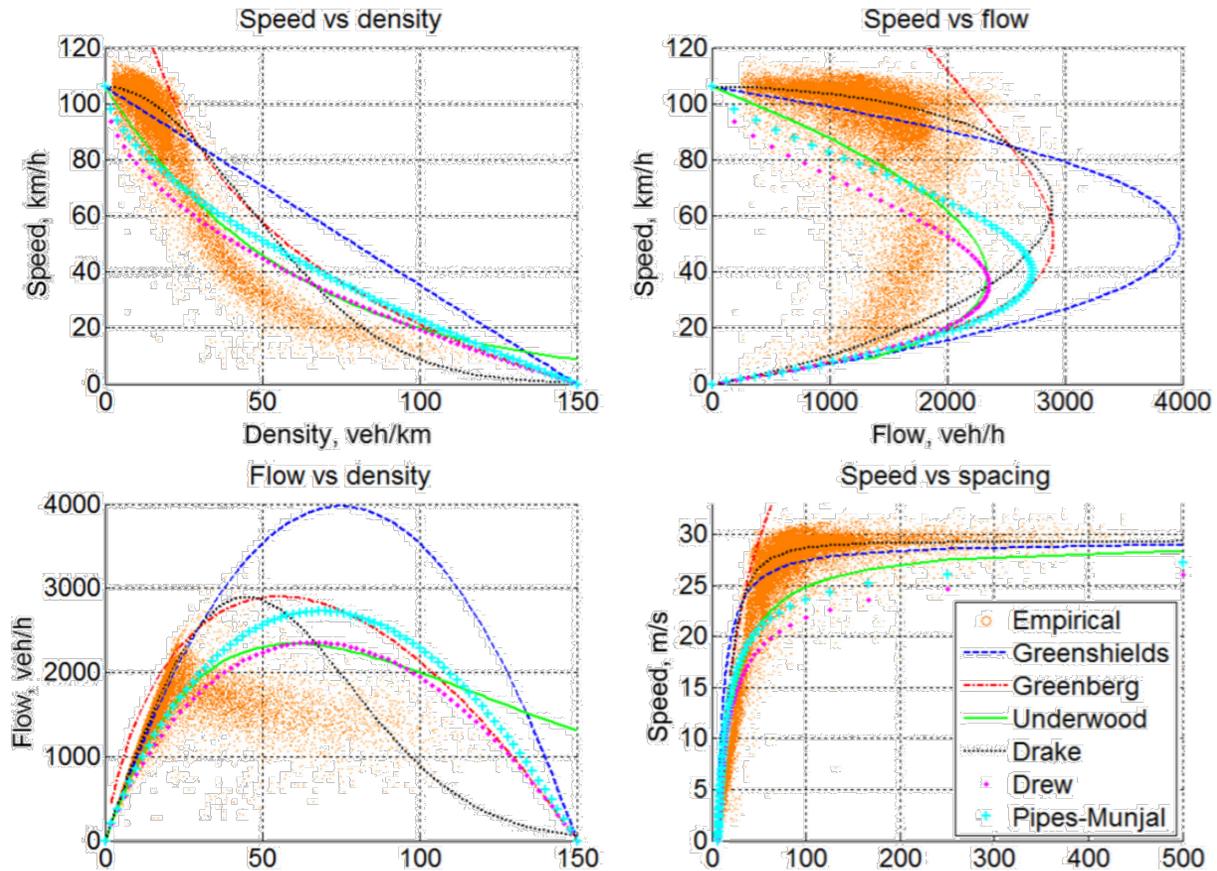
# Modèles à régime unique

- Inspirés par les travaux de Greenshields, de nombreux modèles ont été proposés par la suite pour formuler des relations vitesse-densité avec divers niveau et qualité d'ajustement aux données *empiriques*.

## Modèles à régime unique

Authors	Model	Parameters
Greenshields [9]	$v = v_f \left(1 - \frac{k}{k_j}\right)$	$v_f, k_j$
Greenberg [10]	$v = v_m \ln\left(\frac{k_j}{k}\right)$	$v_m, k_j$
Underwood [11]	$v = v_f e^{-\frac{k}{k_m}}$	$v_f, k_m$
Drake et al. [12]	$v = v_f e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{k_m}\right)^2}$	$v_f, k_m$
Drew [13]	$v = v_f \left[1 - \left(\frac{k}{k_j}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right]$	$v_f, k_j, n$
Pipes [14] and Munjal [15]	$v = v_f \left[1 - \left(\frac{k}{k_j}\right)^n\right]$	$v_f, k_j, n$

$v_f$  is free-flow speed,  $k_j$  is jam density,  $v_m$  is optimal speed,  $k_m$  is optimal density, and  $n$  is an exponent.



Modèles à régime unique et les données empiriques

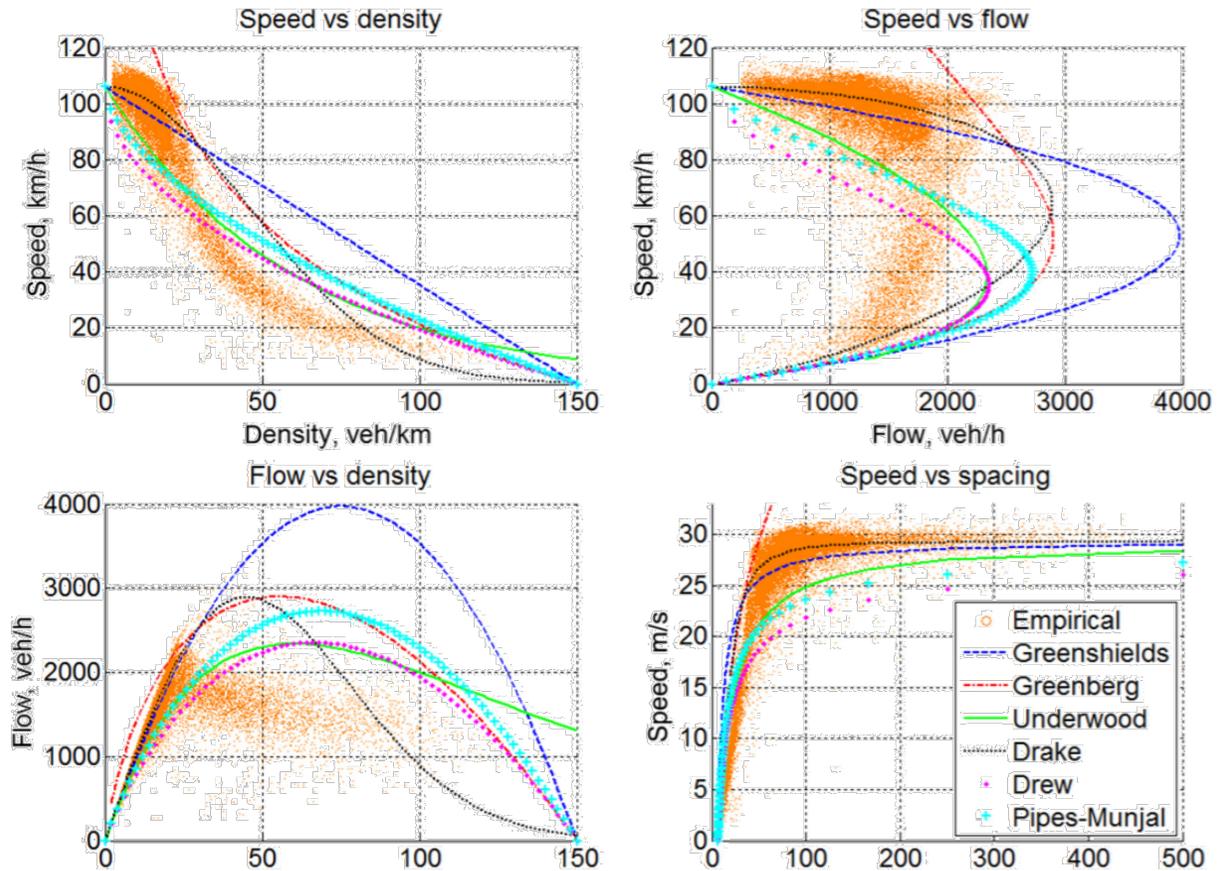
# Modèles à régime unique

- Tous ces modèles sont composés d'une équation, ce qui signifie qu'ils s'appliquent à toute la plage de densité. Par conséquent, ces modèles sont appelés « les modèles à régime unique ».

## Modèles à régime unique

Authors	Model	Parameters
Greenshields [9]	$v = v_f \left(1 - \frac{k}{k_j}\right)$	$v_f, k_j$
Greenberg [10]	$v = v_m \ln\left(\frac{k_j}{k}\right)$	$v_m, k_j$
Underwood [11]	$v = v_f e^{-\frac{k}{k_m}}$	$v_f, k_m$
Drake et al. [12]	$v = v_f e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{k_m}\right)^2}$	$v_f, k_m$
Drew [13]	$v = v_f \left[1 - \left(\frac{k}{k_j}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right]$	$v_f, k_j, n$
Pipes [14] and Munjal [15]	$v = v_f \left[1 - \left(\frac{k}{k_j}\right)^n\right]$	$v_f, k_j, n$

$v_f$  is free-flow speed,  $k_j$  is jam density,  $v_m$  is optimal speed,  $k_m$  is optimal density, and  $n$  is an exponent.



Modèles à régime unique et les données empiriques

# Modèles à régime unique

- Les modèles à régime unique tels que le modèle Greenshields, le modèle de Greenberg, etc. sont généralement simples, car ils impliquent peu de paramètres.
- De plus, dans ces modèles, la dérivée du débit par rapport à la densité  $dq/dk$  existe en chaque point dans toute la plage de densité. Cela rend ces modèles mathématiquement attrayants, car  $dq/dk$  peut être très utile plus tard dans la modélisation macroscopique dynamique, comme dans la résolution du modèle LWR.
- De plus, ces modèles macroscopiques sont étroitement liés à une famille de modèles microscopiques de poursuite.
- Ces modèles souffrent généralement d'une mauvaise qualité d'ajustement aux données *empiriques*.

# Modèles multirégimes

- Il semble qu'aucun des modèles à régime unique ne soit capable de raisonnablement bien reproduire les observations empiriques sur toute la plage de densité.
  - Certains modèles sont bons dans une plage de densité, tandis que d'autres sont supérieurs dans une autre plage.
- L'incapacité des modèles à régime unique à bien fonctionner sur toute la plage de densité a incité les chercheurs à vouloir ajuster les données par plage de densité en utilisant plusieurs équations.
- Cela a donné naissance à des modèles multirégimes.
- Ils s'adaptent mieux aux données empiriques que les modèles à régime unique, mais leur formulation par plages les rend moins attrayants.

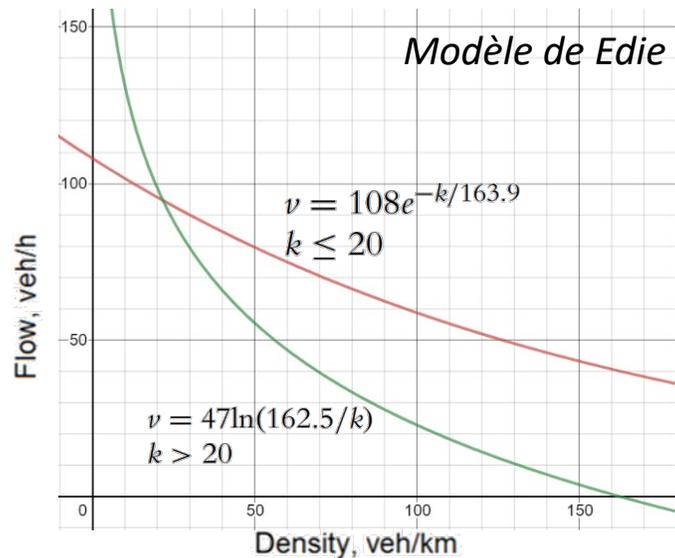
*Modèles multirégimes*

Regimes models	Free flow	Transitional	Congested
Edie model	$v = 108e^{-k/163.9}$ $k \leq 20$	- -	$v = 47\ln(162.5/k)$ $k > 20$
Two-regime model	$v = 108 - 0.515k$ $k \leq 30$	- -	$50 - 0.33k$ $k > 30$
Modified Greenberg model	$v = 103$ $k \leq 20$	- -	$v = 52\ln(150/k)$ $k > 20$
Three-regime model	$v = 108 - 0.5k$ $k \leq 20$	$v = 120 - 1.5k$ $20 < k \leq 65$	$v = 40 - 0.256k$ $k > 65$

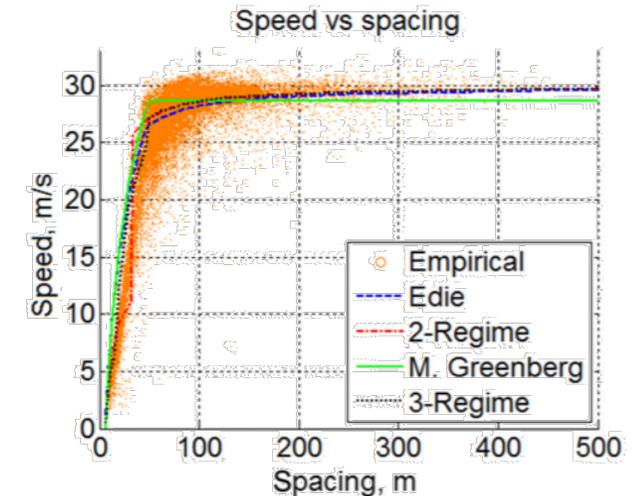
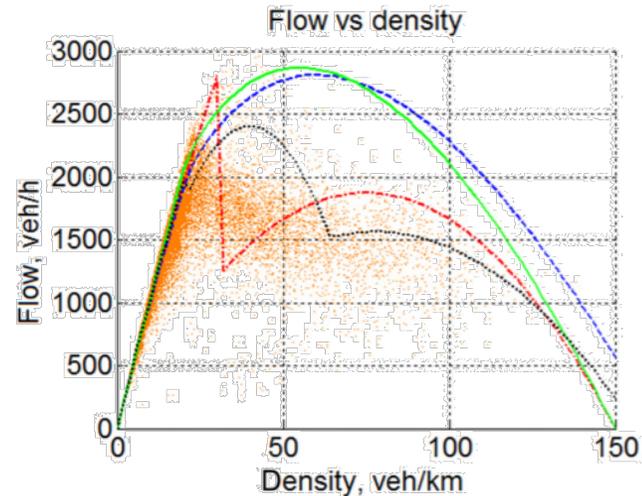
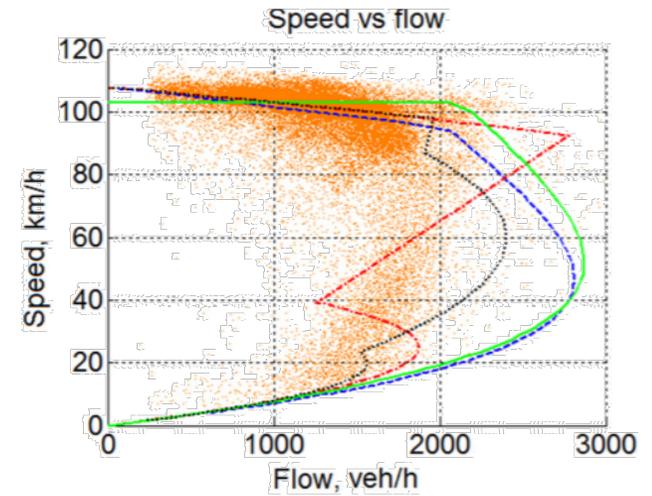
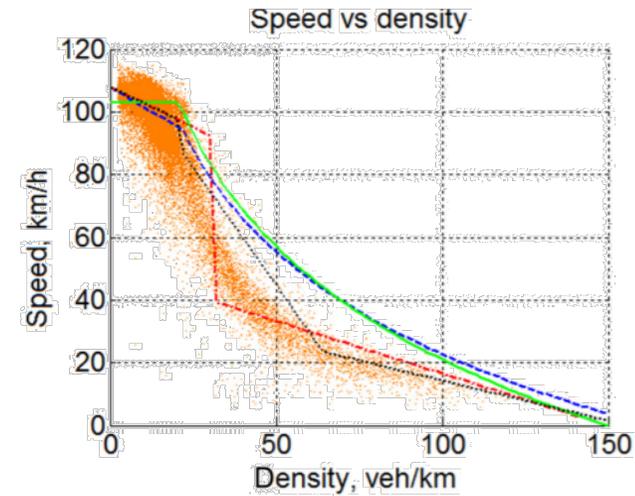
# Modèles multirégimes

## Modèles multirégimes

Regimes models	Free flow	Transitional	Congested
Edie model	$v = 108e^{-k/163.9}$ $k \leq 20$	-	$v = 47\ln(162.5/k)$ $k > 20$
Two-regime model	$v = 108 - 0.515k$ $k \leq 30$	-	$50 - 0.33k$ $k > 30$
Modified Greenberg model	$v = 103$ $k \leq 20$	-	$v = 52\ln(150/k)$ $k > 20$
Three-regime model	$v = 108 - 0.5k$ $k \leq 20$	$v = 120 - 1.5k$ $20 < k \leq 65$	$v = 40 - 0.256k$ $k > 65$



Source: <https://www.desmos.com/calculator>



Modèles multirégimes et les données empiriques

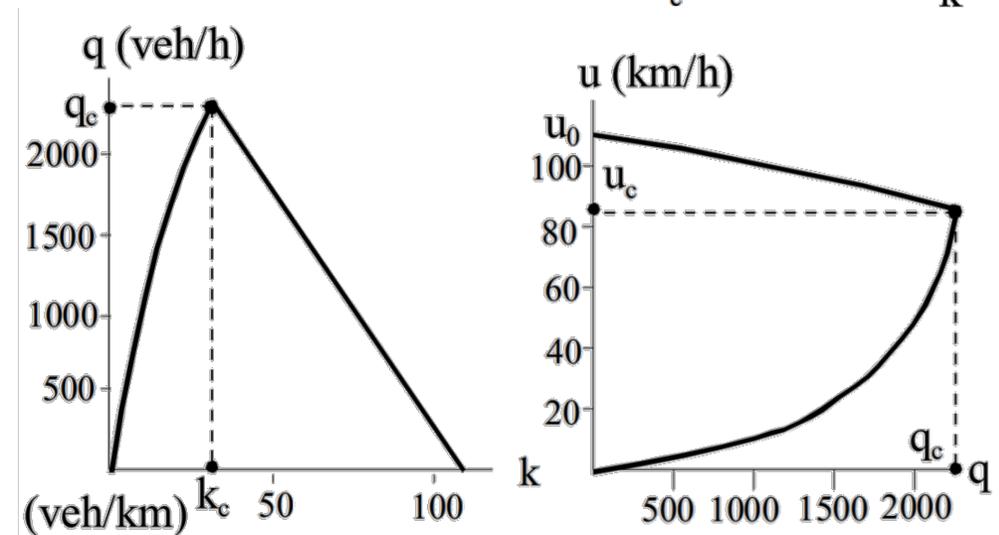
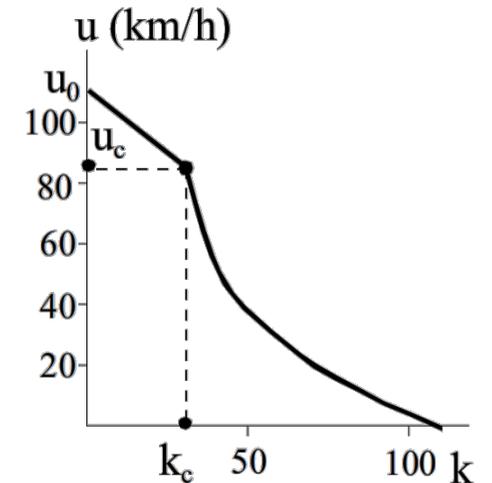
# Modèles multirégimes

➤ Smulders a introduit les équations suivantes:

$$u(k) = \begin{cases} u_0 (1 - k/k_j) & \text{for } k < k_c \\ \gamma (1/k - 1/k_j) & \text{for } k > k_c \end{cases}$$

- $u_0$  est la vitesse d'écoulement libre,
- $k_j$  est la densité de congestion,
- $k_c$  est la densité critique (aussi  $k_m$ ).

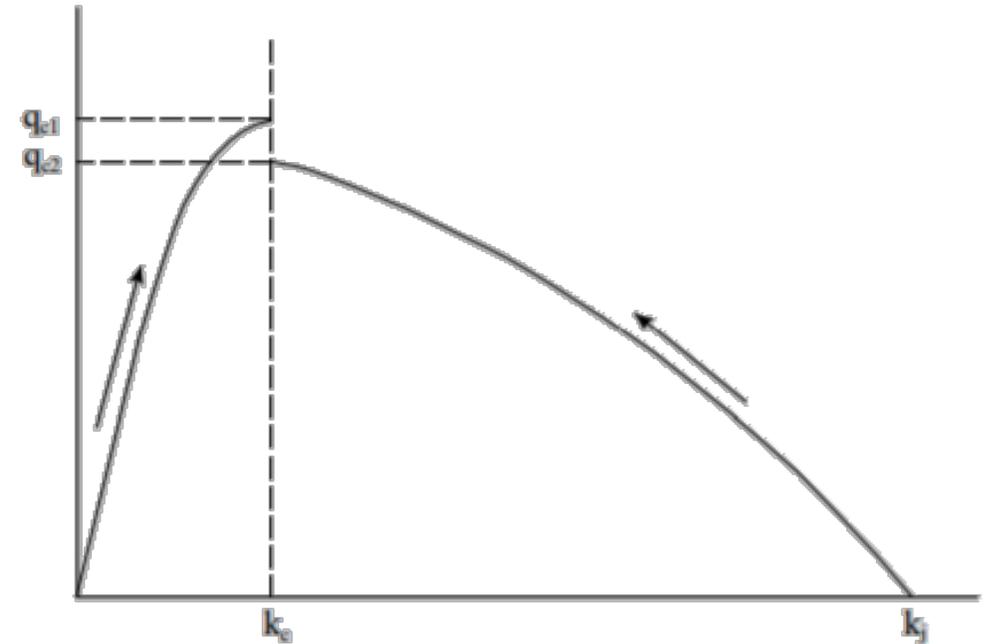
➤  $\gamma$  découle de l'exigence que  $u(k)$  soit continue au point  $k = k_c \rightarrow \gamma = u_0 k_c$



*Diagramme fondamental de Smulders*

# Concept de diagramme discontinu

- Edie a été le premier chercheur à indiquer la possibilité d'une discontinuité dans le diagramme autour du point de capacité.
- Cette idée est basée sur l'observation qu'un flux de trafic avec une densité croissante (à partir d'un flux stable ou une condition d'écoulement libre) atteint une valeur de capacité plus élevée ('capacité d'écoulement libre',  $q_{c1}$ ) qu'un flux de trafic qui commence à partir d'un état congestionné (dans le cas extrême d'une file d'attente immobile) qui se termine par la capacité de décharge de la file d'attente,  $q_{c2}$ .
- Ce phénomène est appelé la «baisse/chute de capacité»



*Diagramme fondamental avec discontinuité*

# Diagramme fondamental de Wu avec baisse de capacité

- Wu a développé un modèle pour le diagramme fondamental avec une baisse de capacité, basé sur des hypothèses sur le comportement microscopique.
- Dans ce modèle, deux régimes sont distingués: l'écoulement libre et l'écoulement congestionné.
- L'écoulement libre a des densités de  $k = 0$  à  $k = k_1$ . L'écoulement congestionné a une plage de densité allant de  $k = k_2$  jusqu'à la densité de congestion  $k_j$ . Les deux régimes se chevauchent en termes de plage de densité, c'est-à-dire  $k_1 > k_2$ .

## Hypothèse principale pour l'état d'écoulement libre

- Dans cet état, on suppose que la circulation est un mélange de véhicules en écoulement libre avec une vitesse moyenne  $u_0$  et des pelotons avec une vitesse  $u_p$ . Si la fraction de véhicules libres (en termes de densité) est  $p_{free}$ , alors la fraction de véhicules dans le peloton est  $(1 - p_{free})$ , et donc, la vitesse spatiale moyenne est égale à:

$$u = p_{free}u_0 + (1 - p_{free})u_p$$

- $p_{free} = 1 \rightarrow u = u_0$  pour  $k = 0$  et  $p_{free} = 0 \rightarrow u = u_p$  for  $k = k_1$

# Diagramme fondamental de Wu avec baisse de capacité

- Si nous supposons (cela peut également être argumenté sur la base de la théorie des files d'attente) que pour une route à deux voies (pour un trafic unidirectionnel)  $p_{free}$  diminue linéairement avec la densité:

$$p_{free} = 1 - k/k_1$$

- Pour une route à trois voies:

$$p_{free} = 1 - (k/k_1)^2$$

- En général, l'exposant est égal au nombre de voies moins 1, c'est-à-dire pour  $n$  voies:

$$u(k) = (1 - (k/k_1)^{n-1})u_0 + (k/k_1)^{n-1}u_p$$

- Cette fonction implique que  $u(k)$  commence plus plat si la chaussée a plus de voies.

- À la densité  $k_1$  chaque véhicule roule en peloton à la vitesse  $u_p$ . Cela implique une relation entre le temps inter véhiculaire net,  $h_{nett}^f$ , dans le peloton, la longueur effective du véhicule ( $1/k_j$ ) et la vitesse.

$$k_1 = \left( u_p h_{nett}^f + \frac{1}{k_j} \right)^{-1}$$

- Considérant les paramètres  $u_p$  et  $k_j$ , un des paramètres  $h_{nett}^f$  et  $k_1$  est considéré comme un paramètre libre du modèle.
- Wu a choisi  $h_{nett}^f$  car il peut être observé en pratique plus facilement que  $k_1$ , surtout si l'on suppose que  $h_{nett}^f$  est un paramètre constant pour tous les états d'écoulement libre.

# Diagramme fondamental de Wu avec baisse de capacité

Hypothèse pour l'état d'écoulement congestionné

- Dans un flux congestionné, sur la plage de densité  $k_2 < k < k_j$ , chaque véhicule est (plus ou moins) dans un état de poursuite et maintient un temps inter véhiculaire net constant,  $h_{nett}^c$ .
- Cette hypothèse implique une ligne droite pour la partie congestionnée de la fonction  $q(k)$ . Dans cet aspect, le modèle est le même que celui de Daganzo et Smulders.

$$\left. \begin{aligned} s_{nett} &= uh_{nett}^c \quad \text{with } u = \text{mean speed} \\ s_{gross} &= 1/k_j + uh_{nett}^c \\ k &= \frac{1}{s_{gross}} = \frac{1}{1/k_j + uh_{nett}^c} \end{aligned} \right\} u = \frac{1}{h_{nett}^c} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k_j} \right) \quad \text{and apply } q = ku \rightarrow q = \frac{1}{h_{nett}^c} \left( 1 - \frac{k}{k_j} \right)$$

- Paramètre  $k_2$  : Ce paramètre peut être déterminé en supposant que la vitesse maximale de l'état congestionné est au maximum égale à la vitesse qui correspond à une condition de circulation avec 100% de pelletons:

$$k_2 = \frac{1}{1/k_j + u_p h_{nett}^c} = \left( u_p h_{nett}^c + \frac{1}{k_j} \right)^{-1}$$

# Diagramme fondamental de Wu avec baisse de capacité

- Exemple: les valeurs typiques pour une chaussée à deux voies avec 100% de voitures sont:
  - $u_0$  = vitesse d'écoulement libre = 110 km/h;
  - $u_p$  = vitesse du peloton = 80 km/h;
  - $k_j$  = densité de congestion = 150 veh/km;
  - $h_{nett}^f$  = temps inter véhiculaire net dans l'écoulement libre = 1.2 s;
  - and,  $h_{nett}^c$  = temps inter véhiculaire net dans la congestion = 1.6 s.
- Du fait que le temps inter véhiculaire en écoulement libre est plus petit qu'en congestion, les deux branches du diagramme fondamental  $u - k$  ne coïncident pas. Dans l'exemple, la capacité d'écoulement libre est de 2400 veh/h et la capacité de décharge est de 1895 veh/h (21 % de moins).
- Les baisses de capacité constatées dans le monde réel sont généralement plus faibles.

**Remarque:** La baisse de capacité offre un avantage substantiel possible pour le contrôle d'accès sur les bretelles d'autoroutes. Si on contrôle les flux d'entrée de façon que le débit sur l'autoroute reste en dessous, de 2200 veh / h per lane (par exemple), alors la plupart du temps, la capacité de décharge (plus petite) n'est pas pertinente.

# State-of-the-Art

- Des recherches plus poussées mettent l'accent sur les modèles à régime unique, qui sont principalement associés au développement de modèles microscopiques de poursuite.
- Les détails de ces modèles de poursuite et du modèle d'équilibre associé à chacun seront discutés plus tard dans ce cours.

## Modèle non linéaire de Newell

- Le modèle non linéaire de Newell implique trois paramètres et prend la forme suivante:

$$v = v_f \left( 1 - e^{-\frac{\lambda}{v_f} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k_j} \right)} \right)$$

- $v_f$  est la vitesse d'écoulement libre,
- $k_j$  est la densité de congestion,
- $\lambda$  est la pente de la courbe vitesse-espacement.

# State-of-the-Art

## Modèle de Del Castillo et Benítez

- Impliquant également trois paramètres, le modèle de del Castillo et Benítez prend la forme suivante:

$$v = v_f \left( 1 - e^{1 - e^{\frac{|C_j|}{v_f} \left( \frac{k_j}{k} - 1 \right)}} \right)$$

- $v_f$  est la vitesse d'écoulement libre,
- $k_j$  est la densité de congestion,
- $C_j$  est la vitesse de l'onde cinématique à la densité de congestion.

# State-of-the-Art

## Van Aerde Model

➤ Le modèle de Van Aerde implique quatre paramètres et prend la forme suivante:

- $v_f$  est la vitesse d'écoulement libre,
- $v_m$  est la vitesse optimale (critique),
- $q_m$  est la capacité,
- $k_j$  est la densité de congestion.

$$k = \frac{1}{c_1 + c_3 v + c_2 / (v_f - v)}$$

$$c_1 = \frac{v_f}{k_j v_m^2} (2v_m - v_f)$$

$$c_2 = \frac{v_f}{k_j v_m^2} (v_f - v_m)^2$$

$$c_3 = \frac{1}{q_m} - \frac{v_f}{k_j v_m^2}$$

# State-of-the-Art

## Modèle du conducteur intelligent (Intelligent Driver Model)

- Le modèle du conducteur intelligent implique quatre paramètres et prend la forme suivante:

$$k = \frac{1}{(s_0 + vT) \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_f} \right)^\delta \right]^{-1/2}}$$

- $v_f$  est la vitesse d'écoulement libre,
- $s_0$  est la distance inter véhiculaire en congestion,
- $T$  est le temps inter véhiculaire de sécurité,
- $\delta$  est l'exposant d'accélération.

# State-of-the-Art

## Modèle de contrôle longitudinal

- Le modèle de contrôle longitudinal comporte quatre paramètres et prend la forme suivante:

$$k = \frac{1}{(\gamma v^2 + \tau v + l)[1 - \ln(1 - \frac{v}{v_f})]}$$

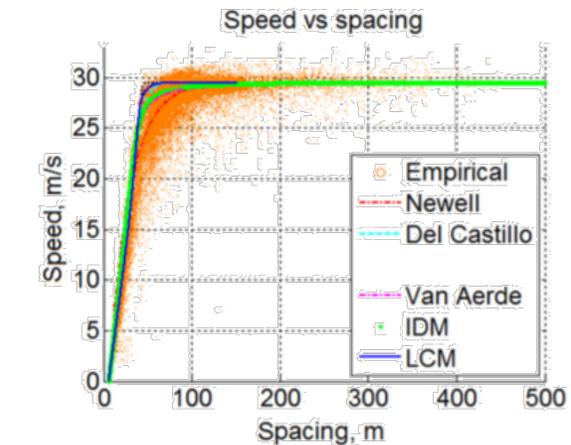
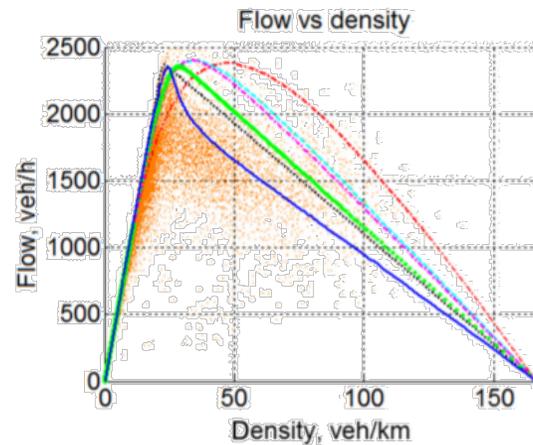
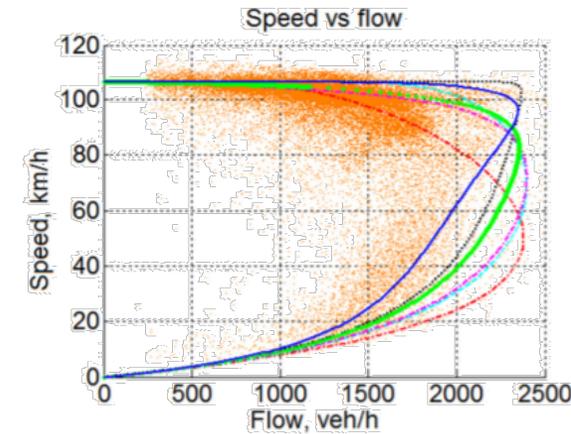
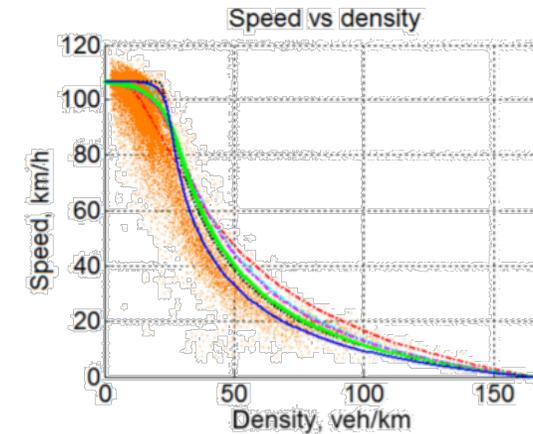
- $v_f$  est la vitesse d'écoulement libre,
- $l = \frac{1}{k_j}$  est la longueur nominale du véhicule, qui est l'inverse de la densité de congestion
- $\tau$  est le temps de perception-réaction,
- $\gamma$  est l'agressivité.

# State-of-the-Art

- Pour illustrer leurs caractéristiques, les modèles ci-dessus sont ajustés à des données empiriques.
- Les principes généraux suivants s'appliquent lorsque l'on ajuste les modèles:
  1. Fixer la vitesse d'écoulement libre  $v_f$  de tous les modèles à la même valeur observée dans les données,
  2. Fixer la densité de congestion  $k_j$  de tous les modèles à la même valeur observée dans les données,
  3. Fixez la capacité à environ la même valeur observée dans les données en modifiant les paramètres restants.

## Paramètres du modèle

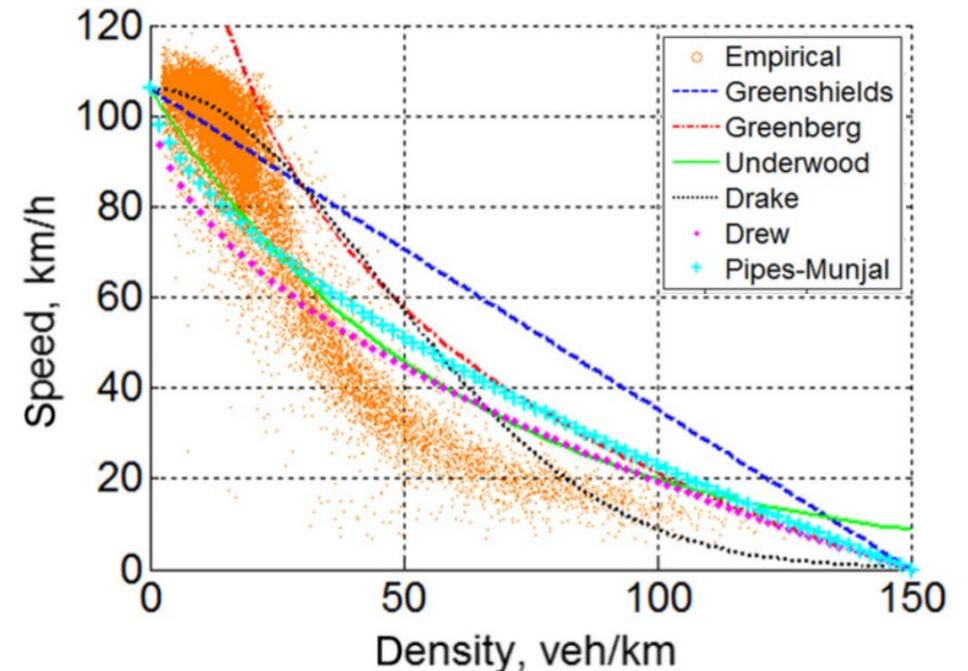
Models	Parameters
Newell model	$v_f = 106 \text{ km/h}$ ; $k_j = 167 \text{ vehicles/km}$ ; $\lambda = 1.25 \text{ 1/s}$
Del Castillo and Benítez model	$v_f = 106 \text{ km/h}$ ; $k_j = 167 \text{ vehicles/km}$ ; $C_j = 20 \text{ km/h}$
Van Aerde model	$v_f = 106 \text{ km/h}$ ; $k_j = 167 \text{ vehicles/km}$ ; $v_m = 20 \text{ km/h}$ ; $q_m = 2400 \text{ veh/h}$
Intelligent driver model	$v_f = 106 \text{ km/h}$ ; $s_0 = 6 \text{ m}$ ; $T = 1.25 \text{ s}$ ; $\delta = 15$
Longitudinal control model	$v_f = 106 \text{ km/h}$ ; $l = 6 \text{ m}$ ; $\tau = 1.3 \text{ s}$ ; $\gamma = -0.04 \text{ s}^2/\text{m}$



Modèles à la fine pointe adaptés aux données empiriques

# Modèles stochastiques

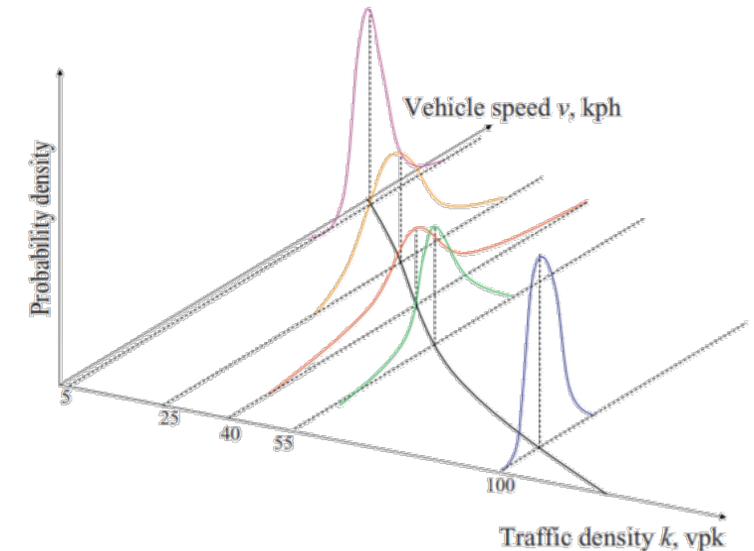
- Bien que toutes les relations présentées avant prennent des formes déterministes, les relations réelles sont essentiellement assez stochastiques.
- Par exemple, une relation vitesse-densité peut prédire que lorsque la densité  $k$  est de  $12 \text{ veh/km}$ , la vitesse  $v$  sera de  $96 \text{ km/h}$ .
- Cependant, en réalité, la vitesse observée peut varier sur une certaine plage, formant une distribution.
- La figure illustre l'effet de dispersion des observations empiriques et comment les modèles déterministes ne parviennent pas à saisir un tel effet.



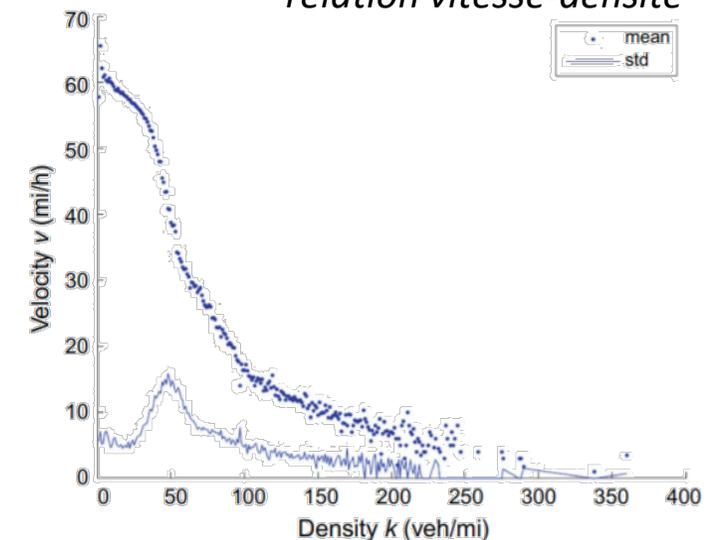
Relation déterministe vitesse-densité

# Modèles stochastiques

- Une amélioration dans la modélisation de la relation vitesse-densité est de considérer l'effet de la dispersion en représentant la vitesse comme une distribution à chaque niveau de densité.
- Des observations empiriques semblent soutenir et confirmer une telle approche.
- La moyenne et l'écart type observés de la relation vitesse-densité sont représentés sur la figure ci-dessous.
- Ainsi, la relation vitesse-densité déterministe sous la forme  $v = f(k)$  peut être remplacée par la relation suivante sous forme générique:  $v = f(k, \omega(k))$ ,
  - où  $\omega$  est un paramètre de distribution dépendant (au moins) de la densité  $k$ .
- Dans ce modèle, puisque la vitesse est une distribution à chaque niveau de densité, le modèle est essentiellement stochastique.



Représentation tridimensionnelle de la relation vitesse-densité

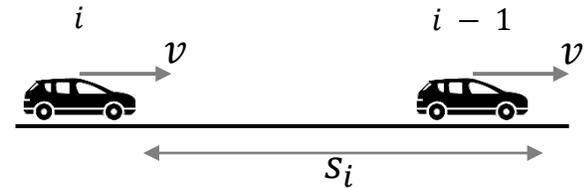


Moyenne et variance de la relation vitesse-densité

# Diagramme fondamental basé sur un modèle de poursuite

- Considérons une situation dans laquelle le véhicule  $i$  conduit derrière le véhicule  $i - 1$ . Le véhicule  $i$  considère une distance inter véhiculaire brute de  $s_i$ . Les deux véhicules ont la même vitesse  $v$ . Le conducteur  $i$  considère les éléments suivants dans la détermination de la distance inter véhiculaire brute :

1. Le véhicule  $i - 1$  peut brusquement freiner et s'arrêter complètement,
2. Le conducteur  $i$  a un temps de réaction de  $T_r$  secondes,
3. Le freinage est possible avec une décélération de  $a$  (avec  $a > 0$ ),
4. Lors de l'arrêt complet derrière le véhicule précédent, la distance inter véhiculaire nette entre les véhicules  $i - 1$  et  $i$  est au moins  $d_0$ ,
5. La décélération du véhicule  $i - 1$  est égale à  $\alpha$  fois la décélération du véhicule  $i$ .



- Il doit être clair que le paramètre  $\alpha$  est en quelque sorte une mesure de l'agressivité du conducteur: des valeurs plus élevées de  $\alpha$  impliquent que le véhicule  $i$  assume une décélération plus brusque du véhicule  $i - 1$ , ce qui entraînera des distances inter véhiculaire plus grandes.

# Diagramme fondamental basé sur un modèle de poursuite

- Pour calculer la distance minimale au véhicule  $i - 1$ ,  $s_i$ :

$$s_i + v_i^2 - \frac{1}{2\alpha a_i} = L + d_0 + v_i T_r + \frac{v_i^2}{2a_i}$$

La distance inter véhiculaire brute+ la distance de freinage du véhicule  $i - 1$

=

Longueur du véhicule suiveur  $i$  + marge de sécurité + distance de réaction + distance de freinage du véhicule suiveur  $i$

- Si nous supposons que  $s_0 = L + d_0$  (distance inter véhiculaire brute en arrêt = Longueur du véhicule suiveur  $i$  + marge de sécurité ), nous avons donc :

$$s_i = s_0 + v_i T_r + \frac{v_i^2}{2a_i} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right)$$

# Diagramme fondamental basé sur un modèle de poursuite

- Pour transformer cette relation microscopique en une description macroscopique de la circulation, nous devons effectuer les substitutions suivantes:
  - Remplacer la distance inter véhiculaire brute  $s_i$  par l'inverse de la densité  $1/k$ ,
  - Remplacer la vitesse individuelle  $v_i$  par la vitesse du flux  $u$ ,
  - Remplacer la distance inter véhiculaire brute en arrêt  $s_0$  par l'inverse de la densité de congestion  $1/k_j$ .

- Il en résulte

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_j} + uT_r + \frac{u^2}{2a} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

- Étant donné que  $q = ku$ , nous obtenons l'expression suivante pour la relation entre le débit et la vitesse:

$$q(u) = \frac{u}{\frac{1}{k}} = \frac{u}{\frac{1}{k_j} + uT_r + \frac{u^2}{2a} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}$$

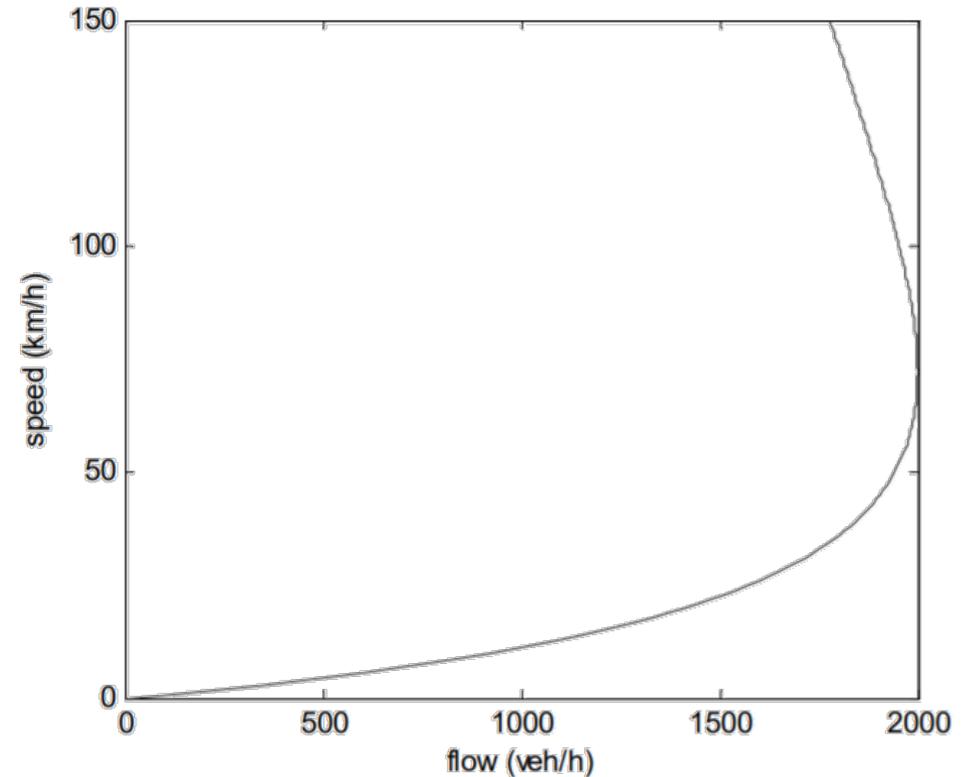
# Diagramme fondamental basé sur un modèle de poursuite

- La relation  $u - q$  est représentée dans la figure.
- Notez que la vitesse n'est pas bornée dans ce modèle.
- On peut déterminer la vitesse  $u_c$  pour laquelle on obtient la capacité en prenant la dérivée de  $q$  par rapport à  $u$  et en la mettant égale à zéro:

$$u_c = \sqrt{\frac{2}{k_j} \frac{a}{(1 - 1/\alpha)}}$$

$$q_c = \frac{u_c k_j}{2 + T_r u_c k_j}$$

$$k_c = \frac{k_j}{2 + T_r u_c k_j}$$



*Courbe de débit - vitesse dérivée d'un modèle simple de poursuite*

# Diagramme fondamental basé sur un modèle de poursuite

- On peut aussi exprimer  $q_c$  en fonction de  $\alpha, T_r, k_j$  et déterminer l'effet des changements des paramètres sur la capacité:

$$q_c = \frac{1}{T_r + \sqrt{\frac{2}{k_j} \frac{1-1/\alpha}{a}}} < \frac{1}{T_r}$$

- Le temps de réaction  $T_r$  ↓
  - La densité de congestion  $k_j$  ↑
  - La décélération de freinage  $a$  ↑  
(système de freinage amélioré)
  - Le paramètre  $\alpha$  est plus proche de 1  
(les conducteurs sont moins prudents)
- } Capacité routière ↑

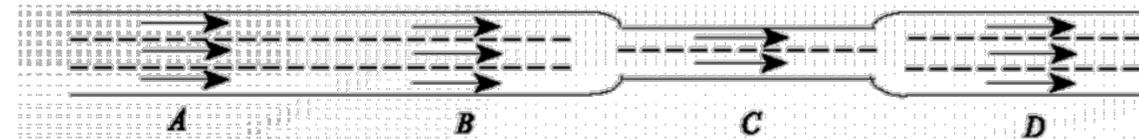
- Il s'avère qu'au fil du temps, la capacité routière augmente régulièrement.
- Par exemple, aux États-Unis, la capacité a augmenté de 2000 *véh/h* (en 1950) à 2400 *véh/h* (en 2000) dans des circonstances idéales de circulation.
- En utilisant le modèle dérivé, nous pouvons (en partie) expliquer cette augmentation de 20%.
- On peut ainsi expliquer l'augmentation de capacité par une diminution de  $\alpha$  (les conducteurs sont plus audacieux et sont plus expérimentés), un temps de réaction plus court  $T_r$  et une capacité de décélération plus élevée  $a$ .

# Points généraux

- Si l'on veut déterminer le diagramme fondamental d'un tronçon de route, les points suivants sont pertinents à considérer:
- A-t-on besoin du diagramme complet ou seulement d'une partie de celui-ci? Par exemple, uniquement la partie de circulation en écoulement libre ( $k < kc$ ) ou uniquement la branche congestionnée. Un point plus fondamental est de savoir s'il est possible de déterminer le diagramme complet à une section transversale.
- Le tronçon routier est-il homogène? Si tel est le cas, on peut faire des observations sur une seule section transversale. Sinon, les caractéristiques de la route sont variables sur la section et une méthode telle que l'observateur mobile pourrait mieux convenir.
- Période d'analyse: si elle est choisie trop courte, les fluctuations aléatoires (variances) auront trop d'influence; si elle est choisie trop longue, on peut se demander si l'état du flux est stationnaire sur la période. Dans la pratique, l'équilibre entre les fluctuations et la stationnarité a conduit à des périodes de 5 à 15 minutes.
- Enfin, il faut estimer les paramètres du modèle choisi. Cela se fait principalement en utilisant une technique de régression. Un ensemble de données peut souvent être utilisé pour s'adapter à plusieurs modèles différents. En général, les modèles sans trop de paramètres sont préférés.

# Points de collecte de données

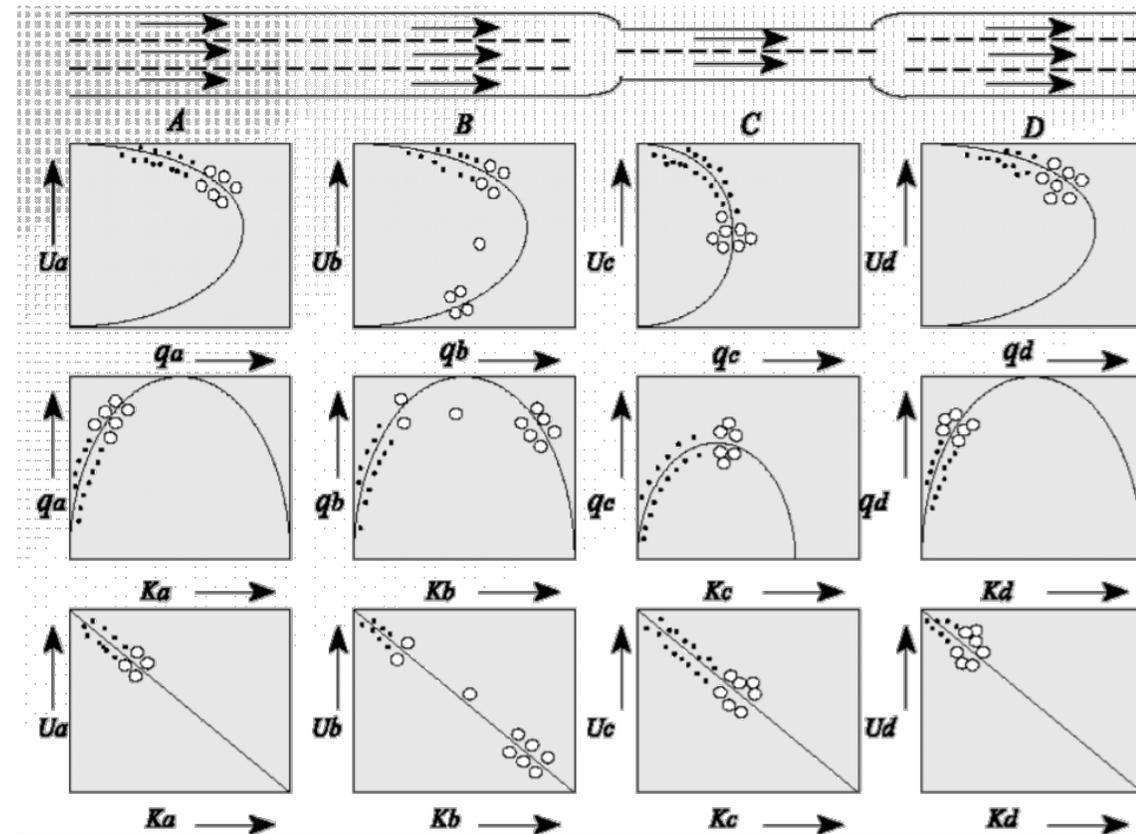
- Pour obtenir un diagramme fondamental représentatif, il faut effectuer des mesures sur différents sites de collecte et à différentes périodes.
- Ceci sera illustré par les données que l'on peut obtenir autour d'un goulot d'étranglement surchargé.
- Ce phénomène est représenté pour une route à 3 voies avec une section à 2 voies (le goulot d'étranglement).
- Les mesures seront effectuées sur 4 sections transversales:
  - A. Cette section est tellement en amont que la congestion due à une surcharge du goulot (b-n) ne l'atteindra pas.
  - B. Cette section est plus proche du b-n et la congestion l'atteindra.
  - C. Une section transversale à l'intérieur du b-n.
  - D. Une section transversale en aval du b-n.



*Conditions d'écoulement du trafic à différentes sections pour un goulot d'étranglement sous et sursaturé*

# Points de collecte de données

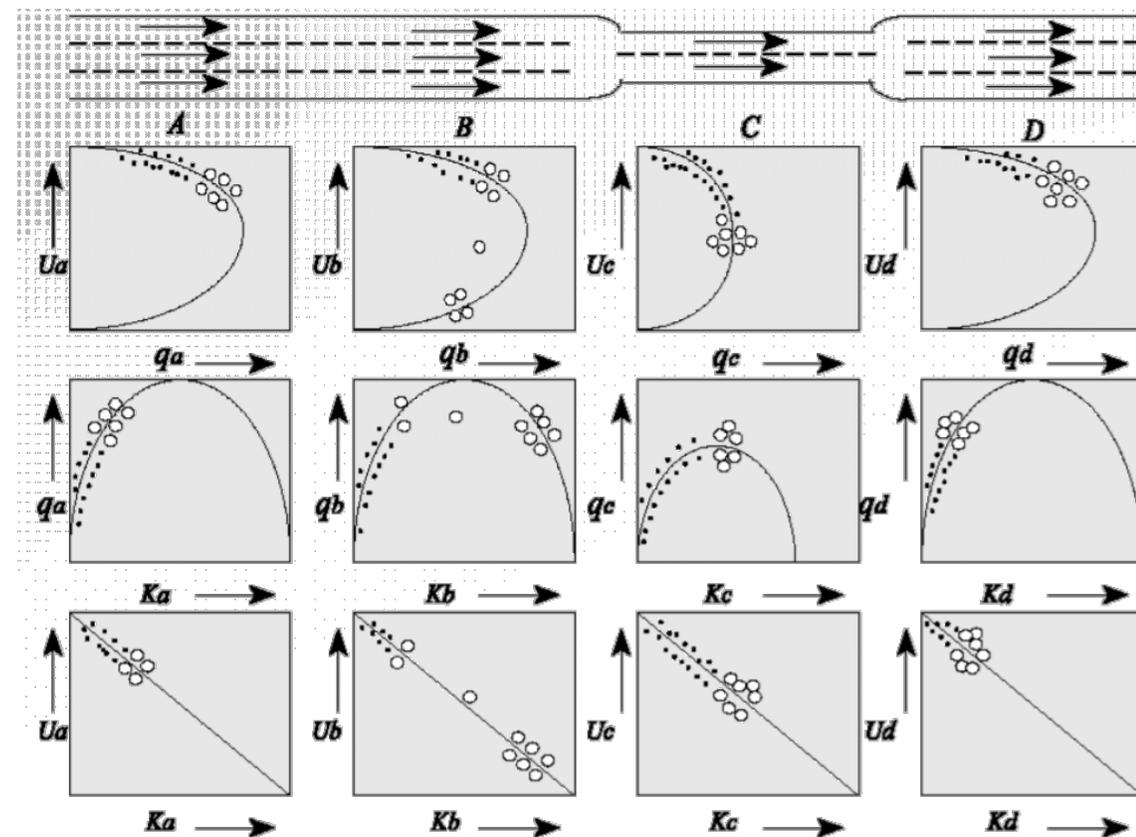
- Les diagrammes fondamentaux de Greenshields ont été supposés être valables pour toutes les sections transversales.
- Ils sont les mêmes pour les sections *A*, *B* et *D*. Pour la section *C*, la forme est similaire, mais la capacité et la densité de congestion sont  $2/3$  des valeurs observés à *A*.
- Nous supposons que le débit augmente progressivement d'une valeur faible à une valeur qui est juste un peu plus petite que la capacité du b-n; cette capacité est  $2C_0$  avec  $C_0 =$  *capacité d'une voie*. Les données de cette situation sont représentées par des \* dans les diagrammes.
- À la section *A*, *B* et *D*, le débit est d'environ  $2/3$  de la capacité. Cela signifie des conditions d'écoulement libre avec des vitesses élevées.
- À la section *C*, la capacité est presque atteinte.
- Maintenant, nous supposons que la demande augmente jusqu'à une valeur égale à  $2.5$  fois  $C_0$  et discutons des données que nous obtiendrons sur les 4 sections transversales.



Conditions d'écoulement du trafic à différentes sections pour un goulot d'étranglement sous et sursaturé

# Points de collecte de données

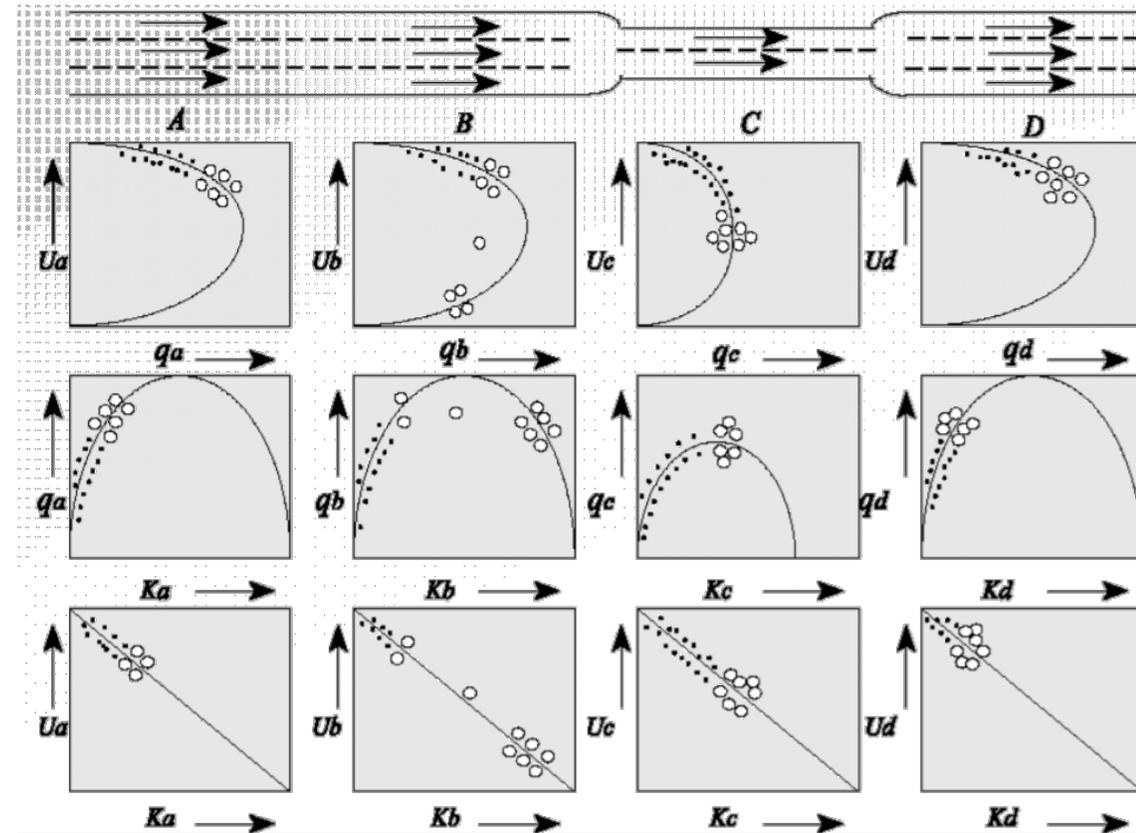
- **A:** On a supposé que la congestion n'atteindrait pas cette section, donc l'état de l'écoulement reste libre. Les points de données, représentés par des cercles, restent entre 4000 et 5000 véhicules par heure et les vitesses restent élevées.
- **B:** Lorsque la demande  $2.5C_0$  atteint le b-n, la congestion commence, se déplace vers l'amont et atteint la section B après un certain temps. Avant ce moment, les points de données sont toujours sur la partie flux libre du diagramme et ensuite sur la partie congestionnée. Le débit est alors égal (en moyenne) à la capacité du b-n et la vitesse moyenne est égale à la vitesse correspondant à ce débit selon la partie congestionnée du diagramme.
- **C:** Dans le b-n, le débit est limité à la capacité du b-n.
- **D:** Ici le débit n'est pas supérieur à  $2C_0$  car le b-n ne laisse pas passer plus de véhicules que sa capacité et le trafic reste en écoulement libre.



Conditions d'écoulement du trafic à différentes sections pour un goulot d'étranglement sous et sursaturé

# Points de collecte de données

- Lorsque la demande est réduite à de faibles valeurs, le processus se développe dans l'ordre inverse.
- Les résultats montrent que sur les sections transversales A et D, seule une circulation libre peut être observée.
- Dans le b-n, un écoulement libre est observé.
- La plupart des informations sur le diagramme se trouvent dans la section transversale B.
- Il faut noter que même dans le cas présenté, les informations sur la partie congestionnée du diagramme sont plutôt limitées. Pour collecter des données sur la partie congestionnée en entier, il faut un b-n avec une capacité variant de zéro à, dans ce cas,  $3C_0$ .
- L'endroit de la collecte de données détermine les états de flux de trafic que l'on peut observer.
- Ce n'est que dans un goulot que l'on peut observer un état de capacité de longue durée. Si l'on veut estimer la capacité et que des observations sont effectuées sur des sites qui ne sont pas des goulots d'étranglement, une forme d'extrapolation est nécessaire.



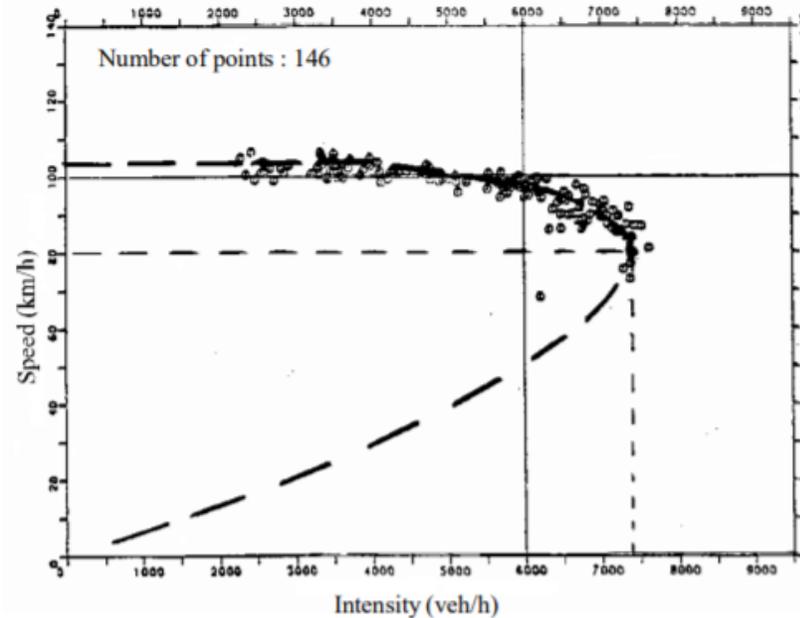
Conditions d'écoulement du trafic à différentes sections pour un goulot d'étranglement sous et sursaturé

# Capacité et effet de la pluie

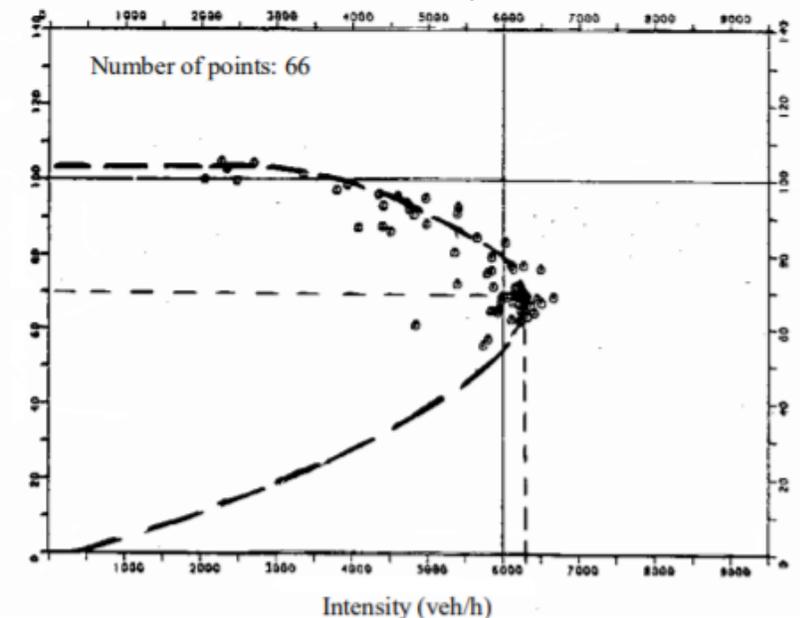
➤ Route (d'une longueur de 4 km) à trois voies près de Rotterdam sous deux conditions:

- Temps sec et beau,
- Conditions pluvieuses.

*Vitesse – débit en conditions de beau temps*



*Vitesse – débit en conditions pluvieuses*

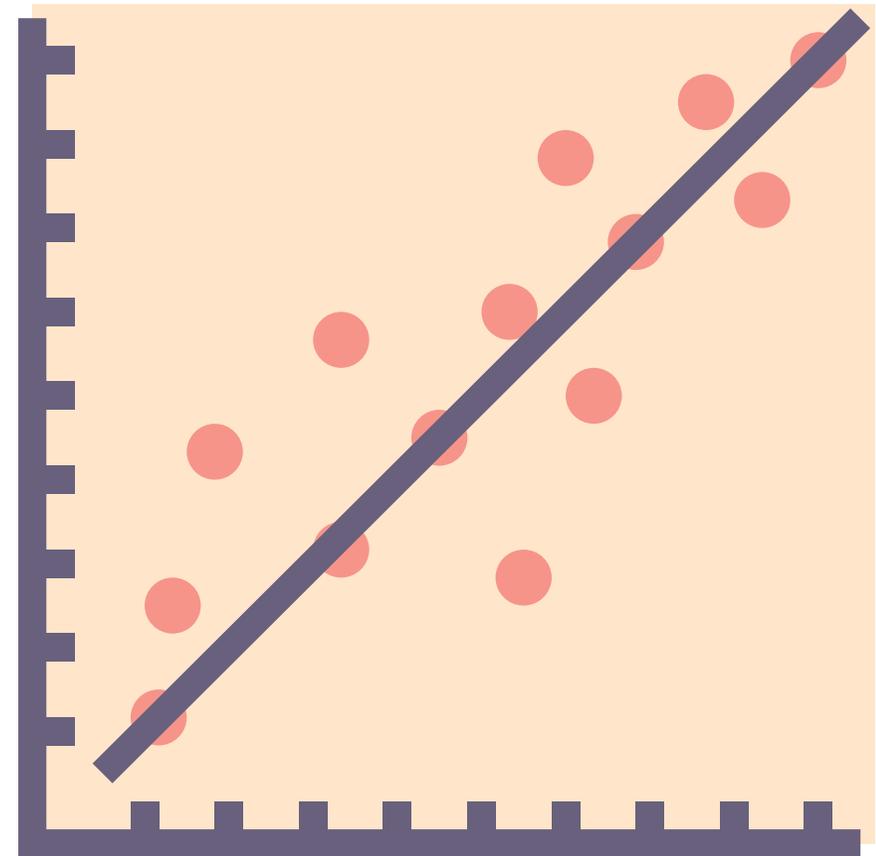


*L'état de la capacité*

MO-team	Roadway (3 lanes)			Average per lane			
	$q_c$	$u_c$	$k_c$	$q_c$	$k_c$	$\bar{s}$	$h$
	veh/h	km/h	veh/km	veh/h	veh/km	m	s
Dry	7400	80	92.5	2460	30.8	32.4	1.46
Rain	6300	70	92.7	2100	30.9	30.9	1.71

# Calibration des modèles macroscopiques

- Les modèles de trafic discutés jusqu'à présent peuvent être utilisés pour déterminer des caractéristiques spécifiques, telles que la vitesse et la densité auxquelles le débit maximal se produit, et la densité de congestion d'une section autoroutière.
- Cela implique généralement la collecte de données appropriées sur les sections d'intérêt et l'ajustement d'un modèle approprié aux données obtenues.
- L'approche la plus courante est l'analyse de régression. Cela se fait en minimisant les carrés des différences entre les valeurs observées et attendues d'une variable dépendante.
- Lorsque la variable dépendante est liée linéairement à la variable indépendante, le processus est appelé analyse de régression linéaire.
- Lorsque la relation est avec deux variables indépendantes ou plus, le processus est appelé analyse de régression multiple.



# Calibration des modèles macroscopiques

- Si une variable dépendante  $y$  et une variable indépendante  $x$  sont liées par une fonction de régression, alors:

$$y = a + bx$$

- Les constantes  $a$  et  $b$  peuvent être déterminées à partir de:

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

- Où:

- $n$  nombre d'observations
- $x_i$   $i^{\text{ème}}$  observation pour  $x$
- $y_i$   $i^{\text{ème}}$  observation pour  $y$

- Une mesure couramment utilisée pour déterminer l'adéquation d'une fonction de régression estimée est le coefficient de détermination:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

- Où  $Y_i$  est la valeur de la variable dépendante calculée à partir des équations de régression. Plus  $R^2$  est proche de 1, meilleure est l'ajustement de la régression.

# Calibration des modèles macroscopiques

Ajustement des données de vitesse et de densité au modèle Greenshields

- Utilisons maintenant les données présentées dans le tableau (colonnes 1 et 2) pour démontrer l'utilisation de la méthode d'analyse de régression pour ajuster les données de vitesse et de densité au modèle Greenshields:

$$\bar{u}_s = u_f - \frac{u_f}{k_j} k$$

- En comparant cette expression avec la fonction de régression présentée précédemment, nous voyons que la vitesse  $\bar{u}_s$  dans l'expression Greenshields est représentée par  $y$  dans la fonction de régression estimée, la vitesse moyenne d'écoulement libre  $u_f$  est représentée par  $a$ , et la valeur  $u_f$  divisé par la densité de congestion  $k_j$  est représenté par  $b$ . On obtient donc:

$$\begin{aligned} \sum y_i &= 404.8 & \sum x_i &= 892 & \bar{y} &= 28.91 \\ \sum x_i y_i &= 20619.8 & \sum x_i^2 &= 66,628 & \bar{x} &= 63.71 \end{aligned}$$

*Observations de vitesse et de densité sur une route rurale*

Speed, $u_s$ (mi/h) $y_i$	Density, $k$ (veh/mi) $x_i$	$x_i y_i$	$x_i^2$
53.2	20	1064.0	400
48.1	27	1298.7	729
44.8	35	1568.0	1,225
40.1	44	1764.4	1,936
37.3	52	1939.6	2,704
35.2	58	2041.6	3,364
34.1	60	2046.0	3,600
27.2	64	1740.8	4,096
20.4	70	1428.0	4,900
17.5	75	1312.5	5,625
14.6	82	1197.2	6,724
13.1	90	1179.0	8,100
11.2	100	1120.0	10,000
8.0	115	920.0	13,225
$\Sigma = 404.8$ $\bar{y} = 28.91$	$\Sigma = 892$ $\bar{x} = 63.71$	$\Sigma = 20,619.8$	$\Sigma = 66,628.0$

# Calibration des modèles macroscopiques

Ajustement des données de vitesse et de densité au modèle Greenshields

➤ On obtient donc :

$$a = 28.91 - 63.71b, \text{ et } b = \frac{20,619.8 - \frac{(892)(4048)}{14}}{66,628 - \frac{(892)^2}{14}} = -0.53 \quad \rightarrow \quad a = 28.91 - 63.71(-0.53) = 62.68$$

➤ Puisque  $a = u_f = 62.68 \text{ mi/h}$ , et  $\frac{u_f}{k_j} = 0.53 \quad \rightarrow \quad k_j = 118 \text{ veh/mi}$

➤ Pour  $R^2$  on obtient:  $R^2 = 0.95 \quad \rightarrow \quad \bar{u}_s = 62.68 - 0.53k$

➤ Le débit maximum:  $q_m = \frac{u_f k_j}{4} = \frac{118 \times 62.68}{4} = 1849 \text{ veh/h}$

➤ La vitesse à laquelle le débit est maximal:  $\frac{62.68}{2} = 31.3 \text{ mi/h}$

➤ La densité à laquelle le débit est maximal:  $\frac{118}{2} = 59 \text{ veh/mi}$

# Calibration des modèles macroscopiques

Ajustement des données de vitesse et de densité au modèle de Greenberg

➤ le modèle de Greenberg peut être exprimé comme suit:

$$\bar{u}_s = c \ln \frac{k_j}{k} \quad \rightarrow \quad \bar{u}_s = c \ln k_j - c \ln k$$

➤  $\bar{u}_s$  dans l'expression de Greenberg est représenté par  $y$  dans la fonction de régression estimée,  $c \ln k_j$  est représenté par  $a$ ,  $c$  ( $c = u_m$ , la vitesse du débit maximal) est représenté par  $-b$ , et  $\ln k$  est représenté par  $x$ .

$$\begin{aligned} \sum y_i &= 404.8 & \sum x_i &= 56.72 & \bar{y} &= 28.91 \\ \sum x_i y_i &= 1547.02 & \sum x_i^2 &= 233.04 & \bar{x} &= 4.05 \end{aligned}$$

Observations de vitesse et de densité sur une route rurale

Speed, $u_s$ (mi/h) $y_i$	Density, $k$ (veh/mi)	$\ln k_i x_i$	$x_i y_i$	$x_i^2$
53.2	20	2.995732	159.3730	8.974412
48.1	27	3.295837	158.5298	10.86254
44.8	35	3.555348	159.2796	12.64050
40.1	44	3.784190	151.746	14.32009
37.3	52	3.951244	147.3814	15.61233
35.2	58	4.060443	142.9276	16.48720
34.1	60	4.094344	139.6171	16.76365
27.2	64	4.158883	113.1216	17.29631
20.4	70	4.248495	86.66929	18.04971
17.5	75	4.317488	75.55605	18.64071
14.6	82	4.406719	64.33811	19.41917
13.1	90	4.499810	58.94750	20.24828
11.2	100	4.605170	51.57791	21.20759
8.0	115	4.744932	37.95946	22.51438
$\Sigma = 404.8$ $\bar{y} = 28.91$		$\Sigma = 56.71864$ $\bar{x} = 4.05$	$\Sigma = 1547.024$	$\Sigma = 233.0369$

# Calibration des modèles macroscopiques

Ajustement des données de vitesse et de densité au modèle de Greenberg

➤ On obtient donc :

$$a = 28.91 - 4.05b, \text{ et } b = \frac{1547.02 - \frac{(56.72)(404.8)}{14}}{233.04 - \frac{56.72^2}{14}} = -28.68 \rightarrow a = 28.91 - 4.05(-28.68) = 145.06$$

➤ Puisque  $a = 145.06$ , et  $b = -28.68 \rightarrow u_m = 28.68 \text{ mi/h}$

➤ Therefore:  $c \ln k_j = 145.06$

$$\ln k_j = \frac{145.06}{28.68} = 5.06 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R^2 = 0.95 \\ \bar{u}_s = 28.68 \ln \frac{157}{k} \end{array} \right.$$

➤ Pour obtenir le débit max:

$$\bar{u}_s k = q = ck \ln \frac{k_j}{k} \rightarrow \frac{dq}{dk} = c \ln \frac{k_j}{k} - c \stackrel{\text{Pour le débit maximal}}{\frac{dq}{dk} = 0} \rightarrow \ln \frac{k_j}{k_o} = 1 \rightarrow$$

*Pour calculer  $k_o$ , la densité pour le débit maximal:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln k_j = 1 + \ln k_o \\ \ln 157 = 1 + \ln k_o \\ 5.06 = 1 + \ln k_o \\ 58.0 = k_o \\ q_{\max} = 58.0 \times 28.68 \text{ veh/h} \\ q_{\max} = 1663 \text{ veh/h} \end{array} \right.$$

# Références

- May, A. D. (1990). *Traffic flow fundamentals*.
- Gartner, N. H., Messer, C. J., & Rathi, A. (2002). Traffic flow theory-A state-of-the-art report: revised monograph on traffic flow theory.
- Ni, D. (2015). *Traffic flow theory: Characteristics, experimental methods, and numerical techniques*. Butterworth-Heinemann.
- Kessels, F., Kessels, R., & Rauscher. (2019). *Traffic flow modelling*. Springer International Publishing.
- Treiber, M., & Kesting, A. (2013). Traffic flow dynamics. *Traffic Flow Dynamics: Data, Models and Simulation, Springer-Verlag Berlin Heidelberg*.
- Garber, N. J., & Hoel, L. A. (2014). *Traffic and highway engineering*. Cengage Learning.
- Elefteriadou, L. (2014). *An introduction to traffic flow theory* (Vol. 84). New York: Springer.
- Victor L. Knoop (2017), Introduction to Traffic Flow Theory, Second edition
- Serge P. Hoogendoorn, Traffic Flow Theory and Simulation
- Nicolas Saunier, Course notes for “Traffic Flow Theory – CIV6705”
- Mannering, F., Kilareski, W., & Washburn, S. (2007). *Principles of highway engineering and traffic analysis*. John Wiley & Sons.
- Haight, F. A. (1963). *Mathematical theories of traffic flow* (No. 519.1 h3).



Thank  
You