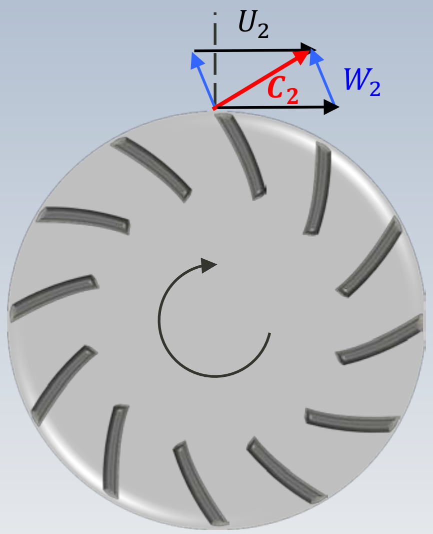
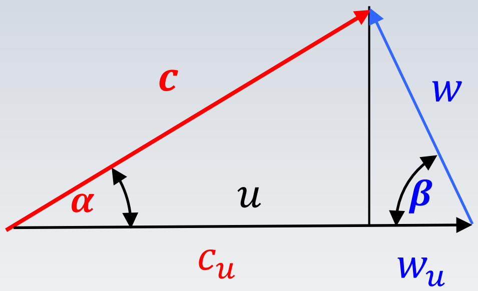

Turbomachines
Radiales II

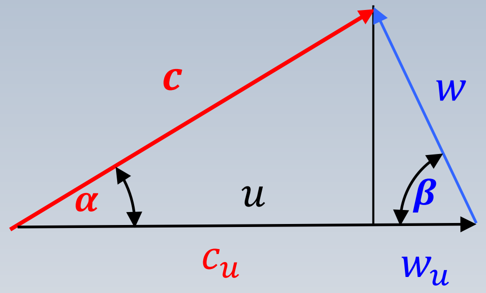
Euler en module de vitesses



L'équation d'Euler peut être regardé sous un angle différent à l'aide de la loi trigonométrique des cosinus



Euler en module de vitesses



L'application de la loi des cosinus, permet d'obtenir

$$w^2 = c^2 + u^2 - 2u\boxed{c\cos\alpha}$$

$$= c^2 + u^2 - 2uc_u$$

$$c_u = (c^2 + u^2 - w^2)/2$$

Euler en module de vitesses

$$c_u u = (c^2 + u^2 - w^2)/2$$

Alors, l'équation d'Euler $\boldsymbol{W_e = (c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1)}$, peut être exprimée sous la forme

$$\boxed{\boldsymbol{W_e = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} - \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}}}$$

Machine thermique

$$W_e = \underbrace{\frac{c_2^2 - c_1^2}{2}}_{❶} + \underbrace{\frac{u_2^2 - u_1^2}{2}}_{❷} - \underbrace{\frac{w_2^2 - w_1^2}{2}}_{❸}$$

Chacun des termes mathématiques a une interprétation physique spécifique

Les termes

❶ $\frac{c_2^2-c_1^2}{2}$ la portion reçue par le fluide sous la forme d'énergie cinétique (c_2^2devra être transformée en pression dans le diffuseur)

❷ $\frac{u_2^2-u_1^2}{2}$ l'effet centrifuge, fonction de vitesses tangentielles $\boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_1}$

❸- $\frac{w_2^2-w_1^2}{2}$ la diffusion (ralentissement) de l'écoulement dans le repère relatif du rotor

Remarques

Pour les machines thermiques $W_e = \Delta h_0$:

$$W_e = \Delta h_0 = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} - \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}$$

Pour les machines hydrauliques $H = W_e/g$

$$H = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} - \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}$$

Rothalpie

Dans une turbomachine, pour un écoulement permanent, sans transfert de chaleur, on considère que **la rothalpie est conservée**, soit:

$$R_{th} = h_1 + \frac{1}{2}w_1^2 - \frac{1}{2}u_1^2 = h_2 + \frac{1}{2}w_2^2 - \frac{1}{2}u_2^2$$

Alors

$$h_2 - h_1 = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} - \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}$$

Degré de réaction R

$$R = \frac{h_2 - h_1}{h_{02} - h_{01}}$$

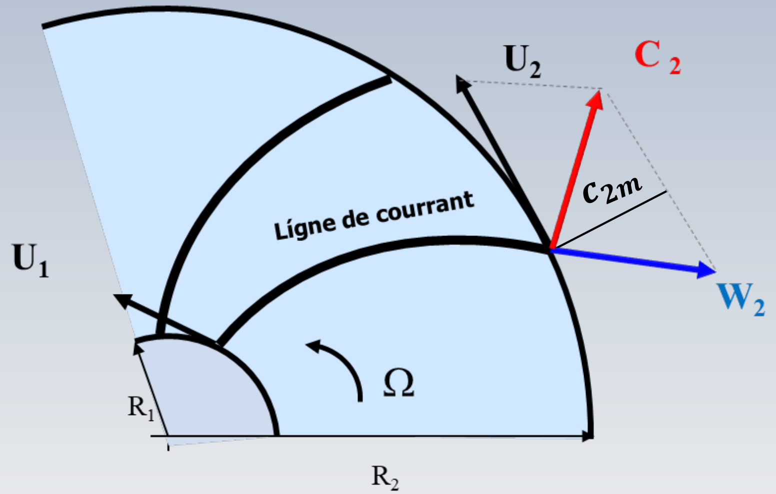
Cette expression combinée avec

$$W_e = h_{02} - h_{01} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} - \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}$$

permet de trouver une forme du **degré de réaction**, en fonction de quantités cinématiques, adapté aux machines radiales

$$R = \frac{(u_2^2 - u_1^2) - (w_2^2 - w_1^2)}{(c_2^2 - c_1^2) + (u_2^2 - u_1^2) - (w_2^2 - w_1^2)}$$

Un choix de coefficients

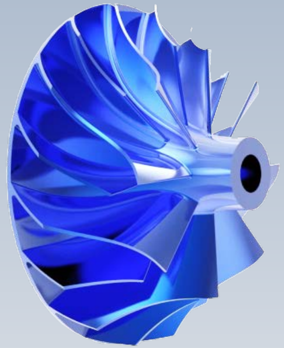


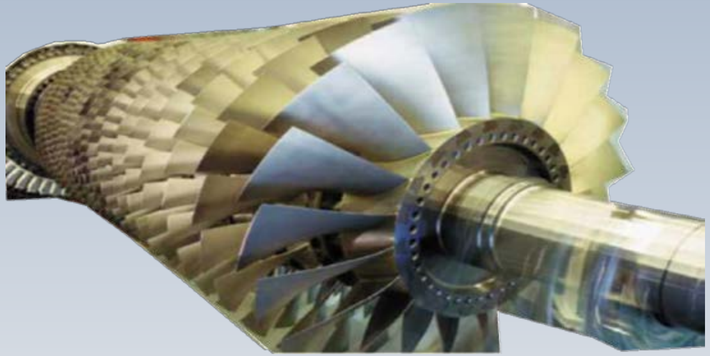
Pour les machines radiales, les coefficients de charge **Ψ**, et de débit **Φ**, sont référés à la vitesse périphérique U_2. Alors,

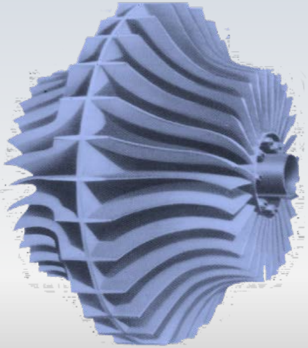
$$\Psi = \frac{W_e}{U_2^2}$$

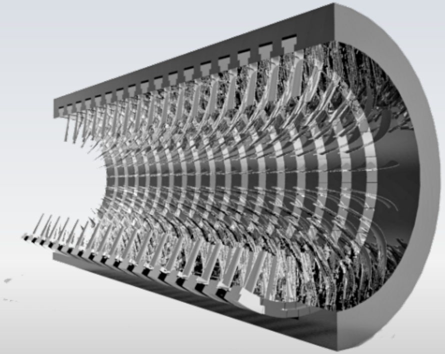
$$\Phi = \frac{c_{2m}}{U_2}$$

Radial vs. axial





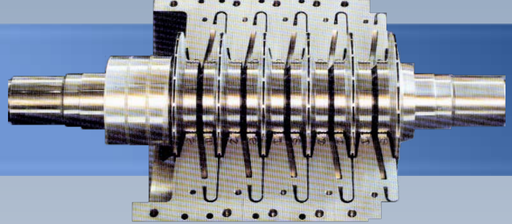




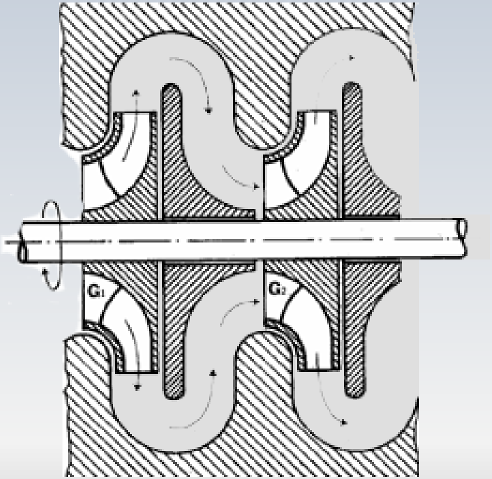
Avantages

- Taux de compression élevée (10:1)
- Bon rendement pour une plage relativement grande de vitesses de rotation.
- Simple à fabriquer ($$$) par rapport au compresseur axial.
- Plus léger
- Moins de puissance requise pour le démarrage

Désavantages



- Aire frontale grande
- Pertes importantes entre les étages
- Le débit est plus faible



La variation de pression

Pour obtenir une formule pour la variation de pression produite dans un rotor, nous regardons cette équation récemment trouvée

$$h_2 - h_1 = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} - \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}$$

Dont la forme différentielle correspondante est

$$dh = d\left(\frac{u^2}{2}\right) - d\left(\frac{w^2}{2}\right)$$

La variation de pression dans le rotor

Pour introduire la pression, nous faisons appel à l'équation Tds

$$Tds = dh - \frac{dp}{\rho} \Rightarrow dh = d\left(\frac{u^2}{2}\right) - d\left(\frac{w^2}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dp}{\rho} = d\left(\frac{u^2}{2}\right) - d\left(\frac{w^2}{2}\right) - \cancel{Tds}$$

Pour un écoulement isentropique

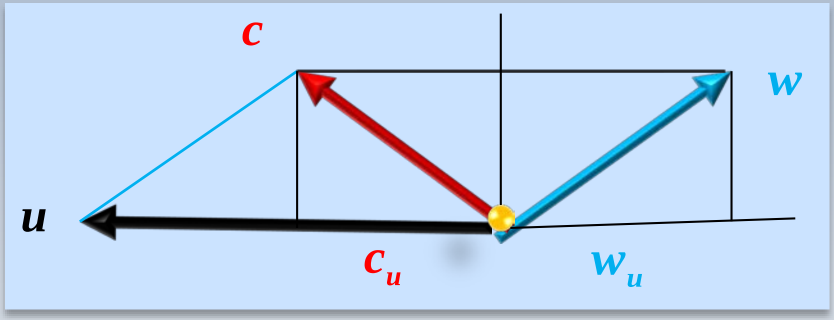
La variation de pression dans le rotor

$$\frac{dp}{\rho} = d\left(\frac{u^2}{2}\right) - d\left(\frac{w^2}{2}\right)$$

Sachant que dans une **machine radiale** $\boldsymbol{u_2 > u_1}$, cette relation indique clairement qu'il est possible **d'augmenter la pression sans même modifier la vitesse relative** $\boldsymbol{w}$ **de l'écoulement**

Dans une **machine axiale** $\boldsymbol{u_2 = u_1}$, de sorte que **pour augmenter la pression l'écoulement doit être décéléré** (ceci favorise le décollement de la couche limite)

Le travail échangé



Une manière complémentaire pour l'analyse d'une configuration centrifuge, apparait si l'on exprime $\boldsymbol{c_u}$en fonction $\boldsymbol{w_u}$ et $\boldsymbol{u}$

$$c_u = w_u + u \quad (addition\ vectorielle)$$

$$W_e = (c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1)$$

$$W_e = (u_2 w_{2u} - u_1 w_{1u}) + (u_2^2 - u_1^2)$$

La variation de pression dans le rotor

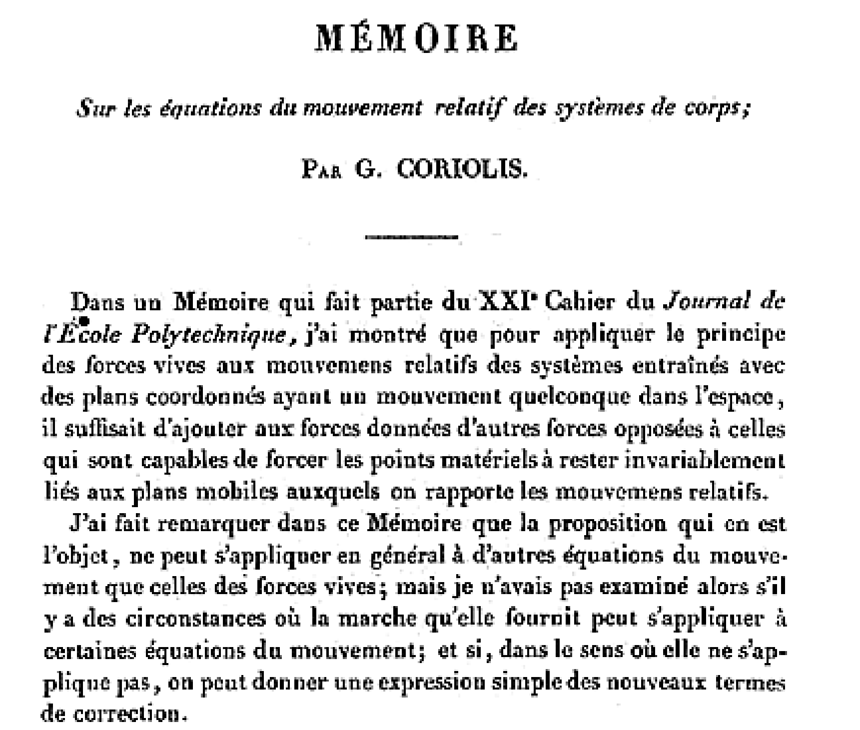
Cette formule, permet d'identifier la nature de l'augmentation du travail spécifique

$$W_e = (u_2 w_{2u} - u_1 w_{1u}) + (u_2^2 - u_1^2)$$

Dans un étage **centrifuge**, le travail échangé résulte principalement des forces dites de **Coriolis**$\boldsymbol{(u_2^2 - u_1^2)}$

Dans un étage **axial** avec $u_2 = u_1 = u = csnte$, le travail échangé provient de la déviation de l'écoulement : grandeur et/ou direction

Gaspar-Gustave de Coriolis



MÉMOIRE

Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps;

PAR G. CORIOLIS.

Dans un Mémoire qui fait partie du XXIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, j'ai montré que pour appliquer le principe des forces vives aux mouvemens relatifs des systèmes entraînés avec des plans coordonnés ayant un mouvement quelconque dans l'espace, il suffisait d'ajouter aux forces données d'autres forces opposées à celles qui sont capables de forcer les points matériels à rester invariablement liés aux plans mobiles auxquels on rapporte les mouvemens relatifs.

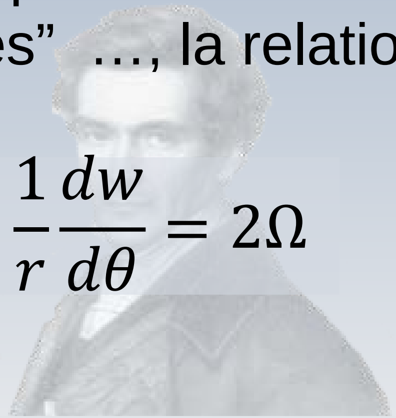
J'ai fait remarquer dans ce Mémoire que la proposition qui en est l'objet, ne peut s'appliquer en général à d'autres équations du mouvement que celles des forces vives; mais je n'avais pas examiné alors s'il y a des circonstances où la marche qu'elle fournit peut s'appliquer à certaines équations du mouvement; et si, dans le sens où elle ne s'applique pas, on peut donner une expression simple des nouveaux termes de correction.

La compréhension de l'effet produit par écoulement radial dans un repère en rotation, connu comme *accélération de Coriolis*, est l'ouvre œuvre de Gaspar-Gustave de Coriolis

1792 –1843

L’effet Coriolis

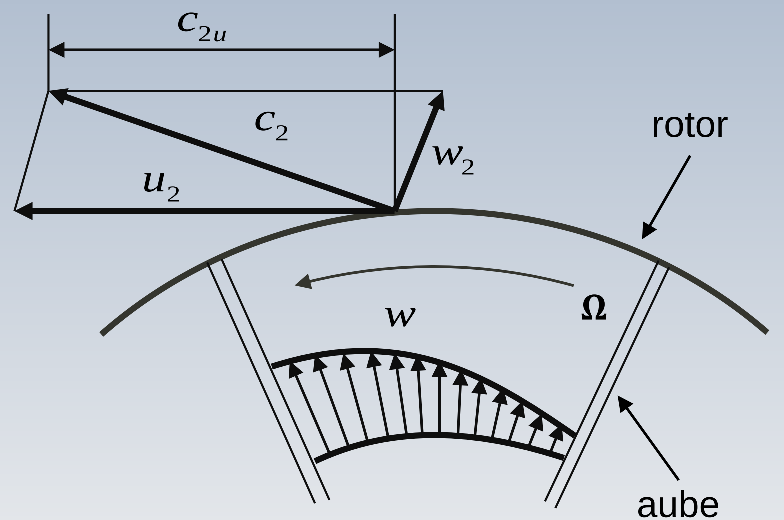
Dans un repère cylindrique, la prise en compte de l’accélération de Coriolis dans les équations du mouvement permet de trouver, après “quelques étapes” …, la relation:



$$\frac{1}{r}\frac{dw}{d\theta} = 2\Omega$$

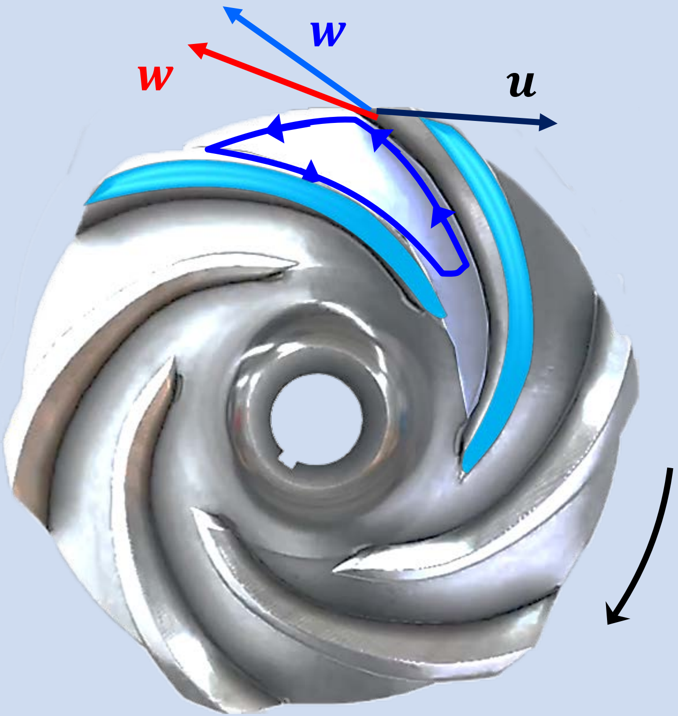
Cette équation indique qu’il y a **une variation de la vitesse relative $\boldsymbol{w}$ dans la direction tangentielle** $(\boldsymbol{\theta})$

L'effet Coriolis



Le gradient circonférentiel de la composante $\boldsymbol{w}$ entre deux aubes, génère un écoulement tourbillonnaire dans le cnal contraire au sens de rotation de l'impulseur

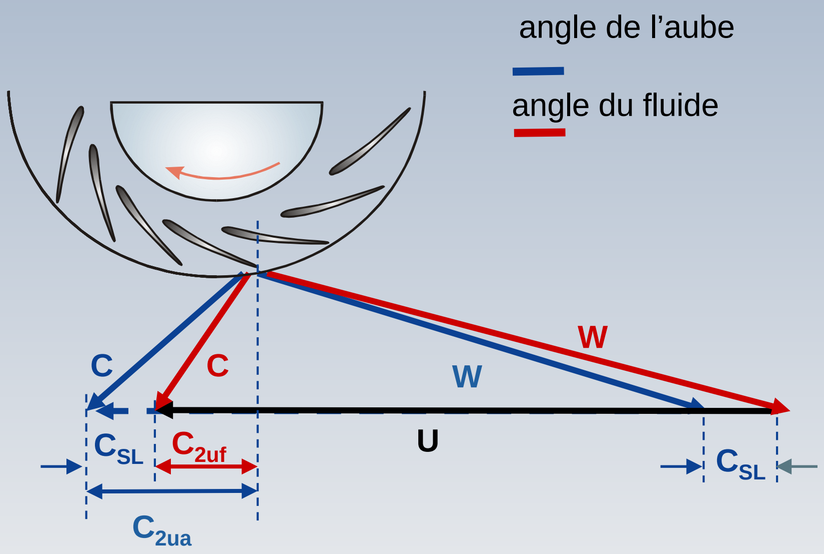
$$\frac{1}{r}\frac{dw}{d\theta} = 2\Omega$$



Ce tourbillon contrarotatif, entraîne une déviation de l’angle moyen de l’écoulement à la sortie (en rouge), par rapport à celui défini par l’aube

L’effet de cette déviation, est imbibé dans une notion connue comme **le glissement**

L'écart de vitesses: le glissement



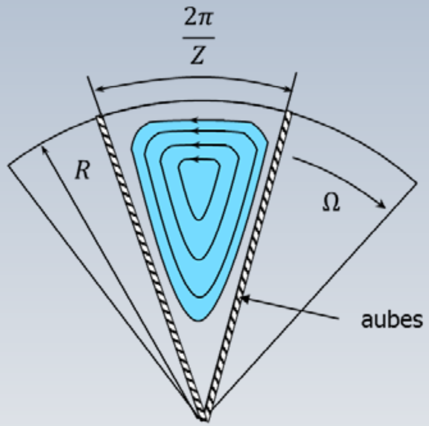
La déviation de l'écoulement à la sortie du rotor, comparée à la direction voulue, si l'écoulement était parfaitement aligné avec l'aube, implique que $c_{2uf} < c_{2ua}$

La différence $c_{SL} = c_{2ua} - c_{2uf}$ est appelée **glissement**

La conséquence est une diminution du travail spécifique

$$W_e = (c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1)$$

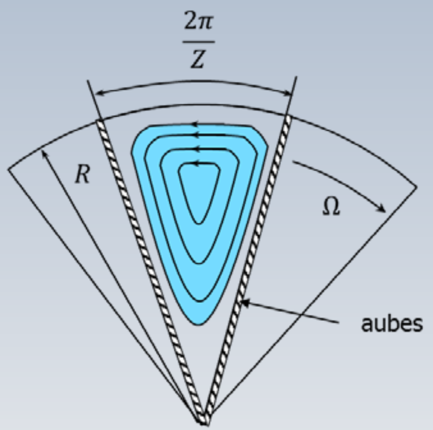
Le facteur glissement



Afin de quantifier la réduction du travail spécifique fournie au fluide, on utilise un coefficient que l'on appelle **facteur de glissement**

Ce coefficient est fonction du nombre de pales *Z*, qui détermine l'espacement du canal interaube

L'équation pour le glissement



Le facteur de glissement est défini comme le rapport entre la composante de la vitesse déviée c_{2uf}, et la composante aligné avec les pales c_{2ua}

$$\sigma_s = \frac{c_{2uf}}{c_{2ua}}$$

Commentaire

Cette formule repose sur le rapport entre le *travail effectif et le travail théorique* $\sigma_s = W_{ef}/W_{ea}$*

$W_{ea} = (\boldsymbol{c_{2ua}} U_2 - c_{1u} U_1)$ est obtenu lorsque la vitesse est guidée par les aubes avec l'angle des pales $\boldsymbol{\beta_2}$

$W_{ef} = (\boldsymbol{c_{2uf}} U_2 - c_{1u} U_1)$, est calculé avec une vitesse déviée, avec un angle $\boldsymbol{\beta_2} \neq \boldsymbol{\beta_2}$

* Pour simplifier, l'écoulement à l'entrée est supposée, avec $\boldsymbol{c_{1u} = 0}$ (sans prérotation)

Remarques

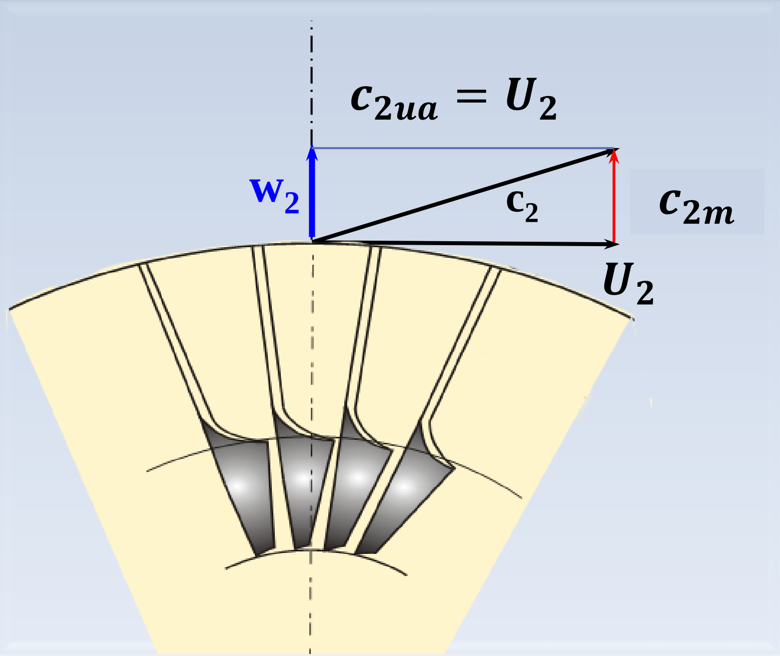
- Encore sous l'hypothèse $\boldsymbol{c_{1u} = 0}$, le travail effectif

$$W_{ef} = (\boldsymbol{c_{2uf}} U_2 - \cancel{c_{1u}} U_1)$$

Peut s'exprimer en fonction de $\boldsymbol{c_{2ua}}$, qui depend d'une géométrie connue (β_2)

$$\boxed{\boldsymbol{W_e = \sigma_s c_{2ua} U_2}}$$

Pales radiales



Si les pales sont radiales,

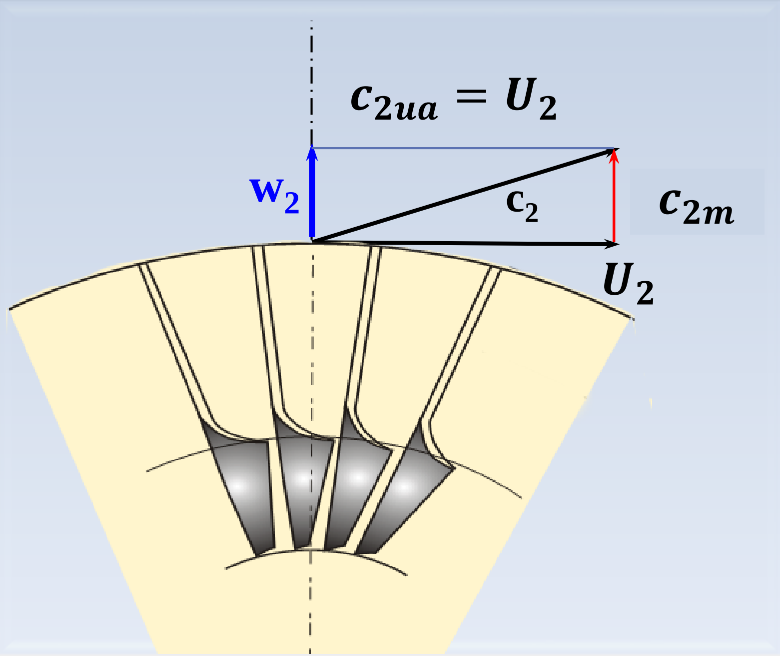
$$c_2^2 = U_2^2 + w_2^2$$

$$c_2^2 = c_{2u}^2 + c_{2m}^2$$

- $c_{2m} = w_2$
- $c_{2u} = U_2$

Puisque la description est basée sur la géométrie de l'aube, la composante tangentielle de la vitesse est notée comme c_{2ua}

Pales radiales



À cause du glissement, la vitesse c_{2ua} sera modifiée pour devenir $c_{2uf} = \sigma_s\, c_{2u\alpha}$

Pour le cas particulier de **pales radiales** $c_{2ua} = U_2$, alors

$$c_{2uf} = \sigma_s\, U_2$$

Ainsi, le travail effectif devient

$$\boxed{W_e = \sigma_s U_2^2}$$

Facteur de glissement σ_s

Divers auteurs ont proposé des formules pour calculer $\boldsymbol{\sigma_s}$ en fonction du nombre et de l’angle des pales à la sortie du rotor

Voici les plus utilisées

Formules pour σ_s

$$\sigma_s = 1 - \frac{\pi}{Z}\left(\frac{\cos\beta_{2a}}{1-(c_{2ma}/U_2)\cot\beta_{2a}}\right)$$

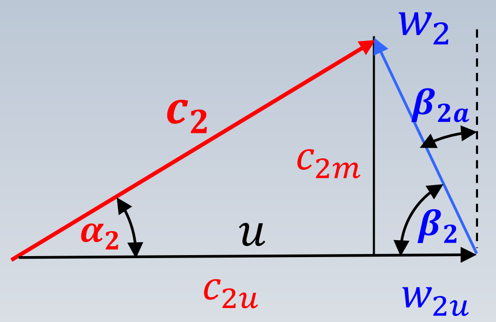
Stodola 1927

$$\sigma_s = 1 - \frac{0.63\,\pi/Z}{1-(c_{2ma}/U_2)\tan\beta_{2a}}$$

Stanitz 1952

$$\sigma_s = 1 - \frac{\sqrt{\cos\beta_{2a}}}{Z^{0.7}}$$

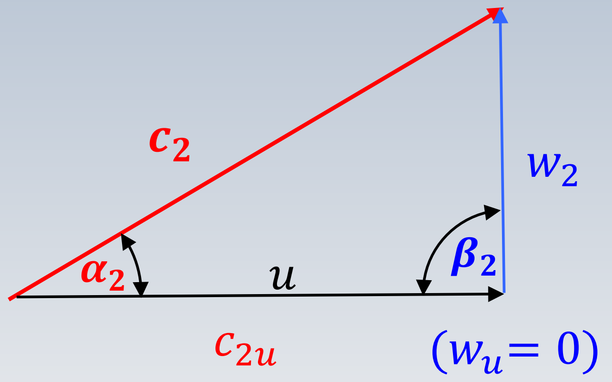
Wiesner 1967



$\boldsymbol{\beta_{2a}}$:l’angle de l’aube referé à la **direction radiale**

Z :le nombre de pales

Pales radiales



$$\beta_{2a} = 90 - \beta_2$$

Pour des pales radiales

$$\sigma_s = 1 - \frac{\pi}{Z}$$

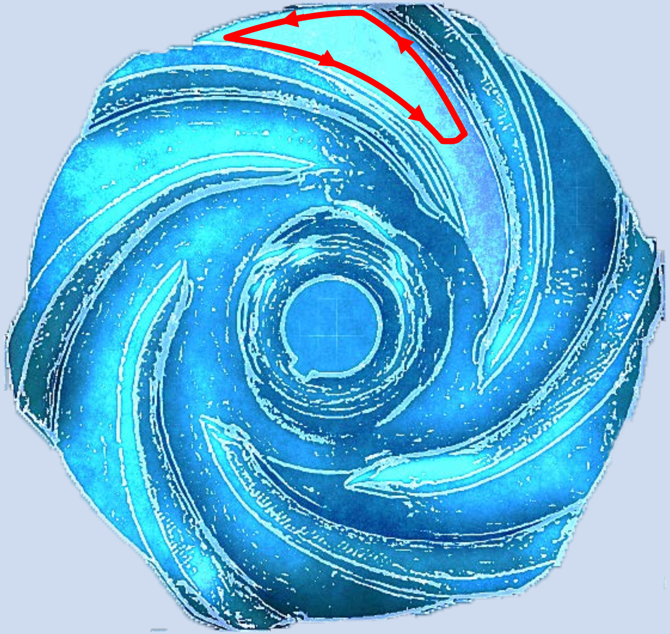
Stodola 1927

$$\sigma_s = 1 - \frac{0.63\pi}{Z}$$

Stanitz 1952

$$\sigma_s = 1 - \frac{1}{Z^{0.7}}$$

Wiesner 1967



Définition de ψ avec σ

Le coefficient de charge $\boldsymbol{\Psi}$ est défini par la relation

$$\Psi = \frac{W_e}{U^2} = \frac{c_p \Delta T_0}{U^2} = \frac{c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1}{U_2^2}$$

Dans cette formule, il faut établir si nous utilisons le travail effectif ou bien le travail théorique

Il donc nécessaire de connaitre ce choix ($\boldsymbol{c_{2ua}}$ ou $\boldsymbol{c_{2uf}}$) puisque chaque option conduit à un résultat différent

Compresseur: ψ et σ

1) Si le coefficient de charge $\boldsymbol{\Psi}$ est défini en fonction du travail théorique $\boldsymbol{W_{ea}}$, on a:

$$\Psi = \frac{W_{ea}}{U^2}$$

et avec la définition du coefficient de glissement $\sigma_s = W_{ef}/W_{ea}$, on trouve

$$\Psi = \frac{W_{ea}}{U^2} = \frac{W_{ef}}{\sigma_s U^2}$$

Compresseur: ψ et σ

2) Si le travail spécifique effectif $\boldsymbol{W_{ef}}$ est considéré dans la définition du coefficient de charge $\boldsymbol{\Psi}$, alors:

$$\Psi = \frac{W_{ef}}{U^2}$$

Cette fois-ci, l'introduction du coefficient de glissement $\sigma_s = W_{ef}/W_{ea}$, conduit à:

$$\Psi = \frac{W_{ef}}{U^2} = \frac{\sigma_s W_{ea}}{U^2}$$

Remarque

Il faut donc **connaitre précisément** l'option privilégiée pour inclure le travail spécifique dans la définition du coefficient de charge $\boldsymbol{\Psi}$, afin d'utiliser la formule adéquate incluant le coefficient de glissement σ_s

Rapport de pression I

Fomule compacte avec σ,ψ et η

(1ère convention)

$$\Psi = \frac{c_p \Delta T_0}{\sigma U^2} \rightarrow \frac{p_{03}}{p_{01}} = \left(\frac{T_{03s}}{T_{01}}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} = \left(1 + \frac{\eta_c (T_{03} - T_{01})}{T_{01}}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\boxed{\frac{p_{03}}{p_{01}} = \left(1 + \frac{\eta_c \Psi \sigma U^2}{c_p T_{01}}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}}$$

Cette formule est liée à la convention adoptée pour inclure le coefficient de glissement σ_s dans le coefficient Ψ

$\mathbf{p_{03}}$ indique la pression (de stagnation) <u>à la sortie du compresseur</u>

$\mathbf{p_{02}}$ est utilisée pour noter la pression <u>entre le rotor et le diffusseur</u>

$\mathbf{p_{01}}$ est utilisée pour noter la pression <u>à l'entreé du rotor</u>

Rapport de pression II

$$\frac{T_{02s}}{T_{01}} = \left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{\gamma-1/\gamma}$$

Fomule compacte avec σ, et η

$$\eta_c = \frac{T_{02s} - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} = \frac{T_{01}(T_{02s}/T_{01} - 1)}{T_{02} - T_{01}} = \frac{T_{01}((p_{02}/p_{01})^{\gamma-1/\gamma} - 1)}{T_{02} - T_{01}}$$

$$(p_{02}/p_{01}) = \left(\frac{\eta_c c_p(T_{02} - T_{01})}{c_p T_{01}} + 1\right)^{\gamma/(\gamma-1} \longleftarrow c_p(T_{02} - T_{01}) = (\sigma c_{2ua} U_2 - c_{1u} U_1)$$

$$\boxed{\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(1 + \frac{\eta_c(\sigma c_{2ua} U_2 - c_{1u} U_1)}{c_p T_{01}}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}}$$

Formule non ambigüe

$\mathbf{p_{02}}$ indique la pression (de stagnation) <u>à la sortie du rotor</u>

$\mathbf{p_{01}}$ dénote la pression <u>à l'entreé du rotor</u>

Le point de design

La méthodologie simplifiée présentée dans cette section est dédiée au point de meilleur rendement. Plusieurs hypothèses simplificatrices ont été appliquées: l'écoulement est supposé permanent, non visqueux, unidimensionnel, et parfaitement guidé par les pales du rotor

Lorsqu'une machine opère hors des cette condition (hors design), le champ de vitesses ,et les pertes, sont fortement affectés.

Afin de donner un aperçu, en images, des conséquences d'une opération hors design, voici quelques résultats obtenus par simulation numérique pour une pompe centrifuge

Description

D’abord , a gauche, on voit l’écoulement obtenu aux conditions de design, et à droite, lorsque le débit est diminué à 25% du débit optimal

La figure à droite montre que le champ des vitesses n’est a trop perturbé

Hors design

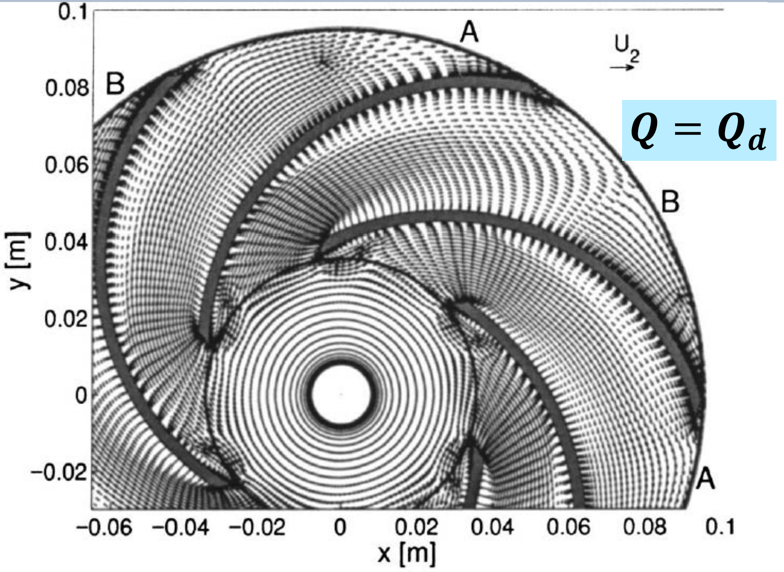


Fig. 7 Time-averaged velocity field $\langle \tilde{W} \rangle$ in the impeller mid-height, $z/b_2 = 0.5$. ($Q/Q_d = 1.0$)

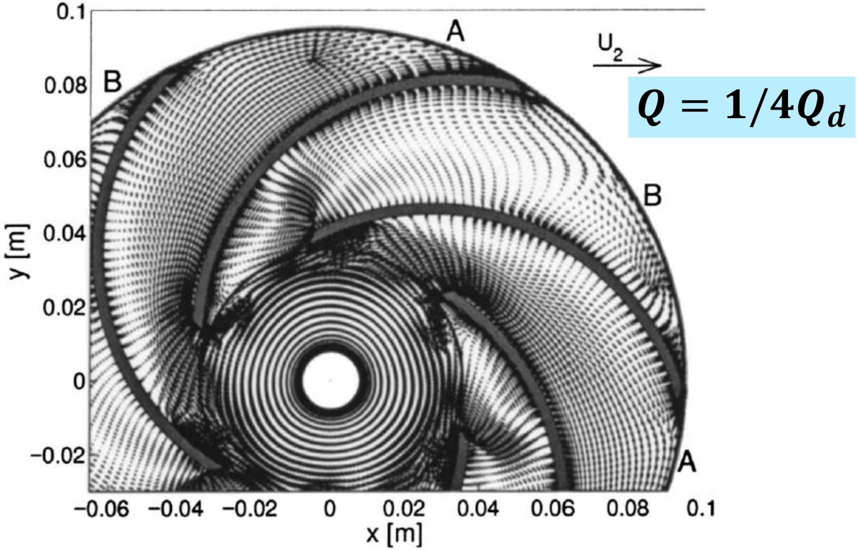


Fig. 9 Time-averaged velocity field $\langle \tilde{W} \rangle$ in the impeller mid-height, $z/b_2 = 0.5$. ($Q/Q_d = 0.25$)

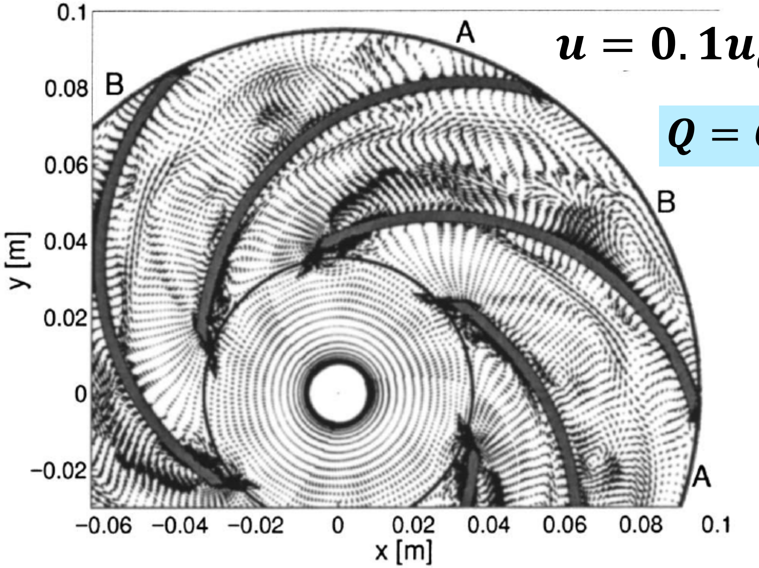
Description

Maintenant, la figure à gauche montre le champ de vitesses lorsque la vitesse de rotation est réduite à 10% de la vitesse idéale

On peut remarquer que ce changement a modifié le champ de vitesses et l'apparition de zones de recirculation

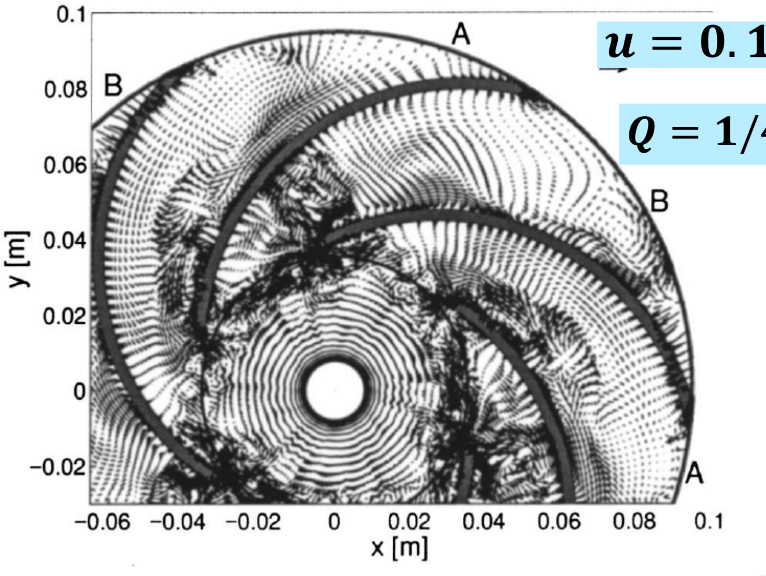
Si de plus, le débit est diminué à 10%, tel qu'illustré à droite, le champ de vitesses est catastrophique et les pertes sont insoutenables

Hors design



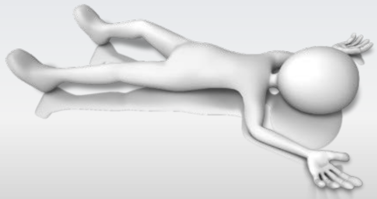
$u = 0.1u_d$

$Q = Q_d$



$u = 0.1u_d$

$Q = 1/4Q_d$



Limites dans un compresseur

Avant de quitter les machines centrifuges, notons que les compresseurs sont soumis à deux limitations liées à des phénomènes particuliers des écoulements compressibles (l’analyse est aussi valable pour les axiaux)

- **Le blocage aérodynamique**. Il s’agit d’un phénomène qui se produit **à de forts débits.** Celui-ci limite la valeur du **débit maximal** pouvant traverser le compresseur

Cette valeur du débit est imposée par l'apparition d'une vitesse sonique au col du rotor ou du diffuseur

Limites dans un compresseur

- **Le pompage**. Contrairement au blocage sonique, il s'agit d'un phénomène qui se produit **à de faibles débits**

Le pompage survient lorsque le compresseur perd sa capacité à maintenir la pression requise. L'écoulement décolle des aubes et un refoulement se produit

À cause de la séparation, le compresseur arrive cependant à réorienter l'écoulement, mais il tombe dans un cycle qui se répète "perpétuellement"

Les fortes vibrations induites par ce cycle sont très nuisibles au compresseur (usure prématurée des paliers, destruction des aubes, etc.)

Rappel

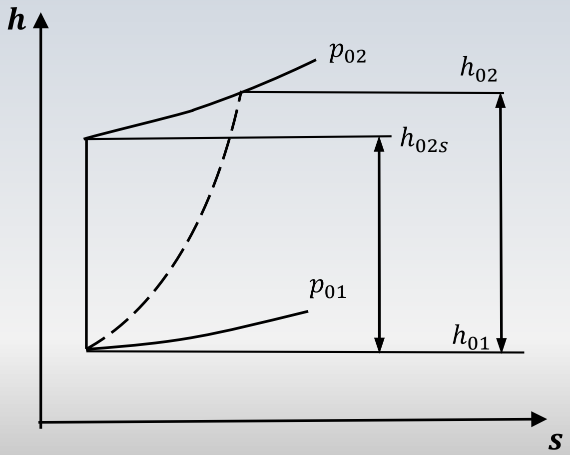
Avant de terminer, un court rappel de formules est utile

Le **rendement total-à-total** (isentropique) compare le processus de référence idéal et le processus réel. Pour un compresseur on a:

$$\eta_{tt} = \frac{h_{02s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}}$$

$$\boldsymbol{\eta_{tt}} = \frac{\left(p_{02}/p_{01}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{\left(T_{02}/T_{01} - 1\right)}$$

$c_p = cnste.$



Rendement polytropique

Compresseur

Le rendement polytropique mesure l'écart de l'exposant $\boldsymbol{n}$ par rapport à l'exposant isentropique $\boldsymbol{\gamma}$. Pour un compresseur on a:

$$\boldsymbol{\eta_p} = \frac{(\gamma - 1)/\gamma}{(n - 1)/n}$$

$$\eta_{tt} = \frac{\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma\boldsymbol{\eta_p}} - 1}$$

Relation entre les rendements isentropique et polytropique

$$\boldsymbol{\eta_{tt}} < \boldsymbol{\eta_p}$$

Synthèse de formules

Rend. compresseur

$$\eta_{tt} = \frac{h_{02s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}}$$

Débit massique

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0 A} = Ma\sqrt{\gamma}\left[1 + \frac{\gamma - 1}{2}Ma^2\right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Processus polytropique

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma\eta_p}}$$

Écoulement isentropique

$$\left[1 + \frac{\gamma - 1}{2}Ma^2\right] = \frac{T_0}{T} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\gamma-1/\gamma}$$

Température Totale

$$T_0 = \mathrm{T} + \frac{V^2}{2c_p}$$

Processus isentropique

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{s=const.} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Gaz parfait

$$p = \rho RT$$

Synthèse de formules

Coeff. de charge

$$\Psi = \frac{W_e}{U_2^2}$$

Gliss. définition

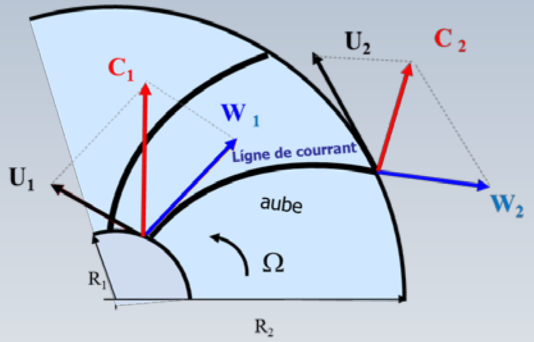
$$\sigma_s = \frac{c_{2uf}}{c_{2ua}}$$

Coeff. de débit

$$\Phi = \frac{c_{m2}}{U_2}$$

Pales radiales

$$\sigma_s = 1 - \frac{2}{Z}$$



Degré de réaction

$$R = \frac{(u_2^2 - u_1^2) - (w_2^2 - w_1^2)}{(c_2^2 - c_1^2) + (u_2^2 - u_1^2) - (w_2^2 - w_1^2)}$$

$$\Psi = \frac{W_{ea}}{U^2} = \frac{c_p \Delta T_0}{\sigma_s U^2}$$

Les cartes

Dernier commentaire:

L’évaluation de la performance d’un compresseur, pompe ou turbine, ne se limite pas à un seul point de fonctionnement, mais à plusieurs

Pour ce faire, on construit de cartes pour différents points d’opération, sur la base du rendement et des coefficients de charge et de débit

Ce sujet sera traité de manière générale dans une section ultérieure

Exemple

Les données pour une pompe centrifuge utilisant de l'eau sont résumées dans le tableau ci-dessous

$Z = 6$	$r_2 = 23cm$	$r_1 = 9cm$
$Q = 0.102\, m^3/s$	$e_1 = 0.1$	$n = 1000\, rpm$
$\beta_{2a} = 65^0$	$e_2 = 0.05$	$\Phi_2 = 0.1$
$c_{1m} = c_{2m}$	e: *épaisseur du metal*	$\rho = 1000\, kg/m^3$

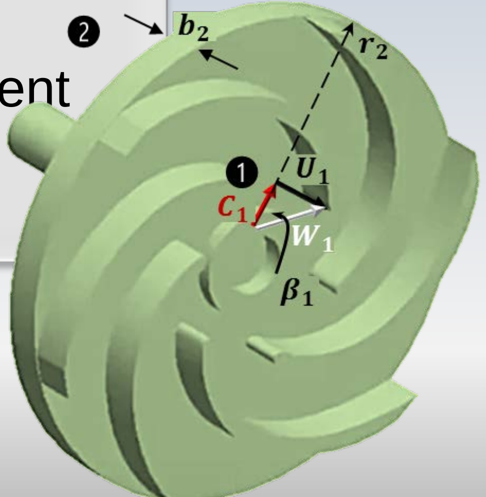
Z indique le nombre de pales et e la portion de la périphérie (entrée 1, sortie 2) occupé par les aubes

L'hypothèse $c_{1m} = c_{2m}$ est appliquée

Exemple

$\boldsymbol{\beta_{2a}}$ est l'angle (du métal) d'inclinaison de l'aube en sortie. La vitesse d'entrée $\boldsymbol{c_1}$ est purement radiale($\boldsymbol{c_{1m}} = \boldsymbol{c_1}$) et $\boldsymbol{\Phi_2}$ est défini en fonction des conditions à la sortie du rotor. On demande:

a) Calculer l'épaisseur $\boldsymbol{b}$ du rotor à l'entrée 1 et à la sortie 2
b) Calculer l'angle $\boldsymbol{\beta_1}$
c) Calculer la tête théorique adimensionnelle (le coefficient Ψ) incluant le glissement (forme définie avec $\boldsymbol{W_{ef}}$)
d) Calculer la puissance théorique



$Z = 6$ $r_2 = 23cm$ $r_1 = 9cm$

$Q = 0.102\, m^3/s$ $e_1 = 0.1$ $n = 1000\, rpm$

$\beta_{2a} = 65^0$ $e_2 = 0.05$ $\Phi_2 = 0.1$

$c_{1m} = c_{2m}$ e: *épaisseur du metal* $\rho = 1000\, kg/m^3$

Pompe centrifuge

a) Calcul des épaisseurs b_2 et b_1

Partie occupée par les aubes

$$A_2 = 2\pi r_2(1 - e_2)\boldsymbol{b_2}$$

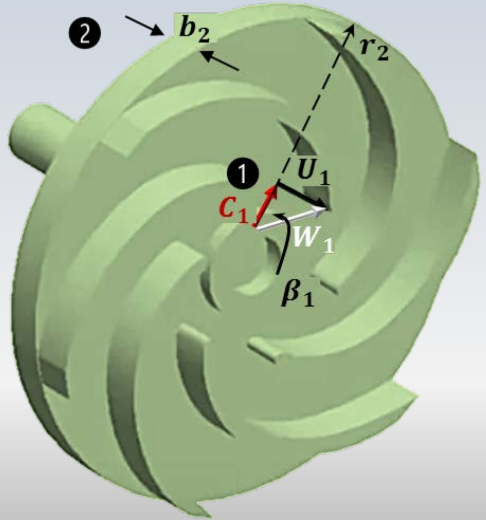
$$Q = c_{2m}A_2$$

$$\boldsymbol{b_2} = \frac{Q}{2\pi r_2(1 - e_2)c_{2m}}$$

?

$$\phi_2 = \frac{c_{2m}}{U_2} \Rightarrow c_{2m} = \phi_2 U_2$$

$c_{1m} = c_1$
entrée radiale



$\boldsymbol{Z = 6}$ $\boldsymbol{r_2 = 23cm}$ $\boldsymbol{r_1 = 9cm}$

Pompe centrifuge

$\boldsymbol{Q = 0.102\, m^3/s}$ $\boldsymbol{e_1 = 0.1}$ $\boldsymbol{n = 1000\, rpm}$

$\boldsymbol{\beta_{2a} = 65^0}$ $\boldsymbol{e_2 = 0.05}$ $\boldsymbol{\Phi_2 = 0.1}$

$\boldsymbol{c_{1m} = c_{2m}}$ $\boldsymbol{e}$: *épaisseur du metal* $\boldsymbol{\rho = 1000\, kg/m^3}$

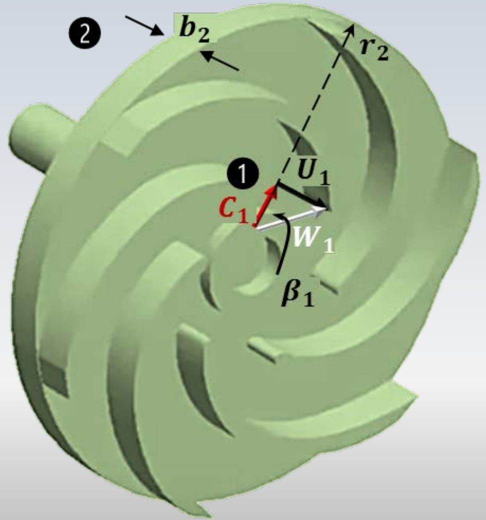
b) Calculer les épaisseurs b_2 et b_1

$$\boldsymbol{U_2} = \frac{2\pi r_2 n}{60} = 24.09 m/s$$

$$\boldsymbol{c_{2m}} = \phi_2 U_2 = 2.4 m/s$$

$$\boldsymbol{b_2} = \frac{\mathrm{Q}}{2\pi r_2 (1 - e_2) c_{2m}} = 0.031 m$$

$c_{1m} = c_1$
entrée radiale



$\boldsymbol{Z = 6}$ $\boldsymbol{r_2 = 23cm}$ $\boldsymbol{r_1 = 9cm}$

Pompe centrifuge

$\boldsymbol{Q = 0.102\, m^3/s}$ $\boldsymbol{e_1 = 0.1}$ $\boldsymbol{n = 1000\, rpm}$

$\boldsymbol{\beta_{2a} = 65^0}$ $\boldsymbol{e_2 = 0.05}$ $\boldsymbol{\Phi_2 = 0.1}$

$\boldsymbol{c_{1m} = c_{2m}}$ $\boldsymbol{e}$: *épaisseur du metal* $\boldsymbol{\rho = 1000\, kg/m^3}$

a) Calculer les épaisseurs b_2 et b_1

$c_{2m} = 2.4m/s$ $U_2 = 24.09m/s$

$$\boldsymbol{c_{1m} = c_{2m}}$$

$$Q = cnste$$

$$\boldsymbol{b_1} = \frac{\mathrm{Q}}{2\pi r_1(1 - e_1)c_{1m}} = 0.079m$$

$\boldsymbol{Z = 6}$ $\boldsymbol{r_2 = 23cm}$ $\boldsymbol{r_1 = 9cm}$

Pompe centrifuge

$\boldsymbol{Q = 0.102\, m^3/s}$ $\boldsymbol{e_1 = 0.1}$ $\boldsymbol{n = 1000\, rpm}$

$\boldsymbol{\beta_{2a} = 65^0}$ $\boldsymbol{e_2 = 0.05}$ $\boldsymbol{\Phi_2 = 0.1}$

$\boldsymbol{c_{1m} = c_{2m}}$ $\boldsymbol{e}$: *épaisseur du metal* $\boldsymbol{\rho = 1000\, kg/m^3}$

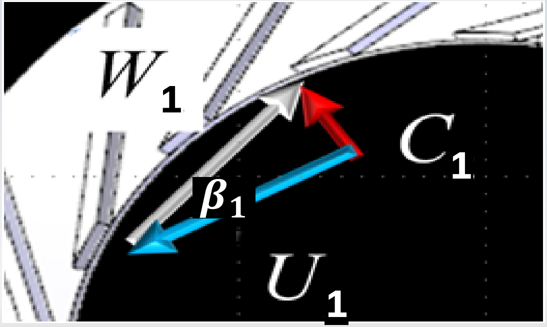
b) Calculer l'angle β_1

$$c_{1m} = 2.4m/s \qquad U_2 = 24.09m/s$$

$$\boldsymbol{U_1} = U_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = 9.43m/s$$

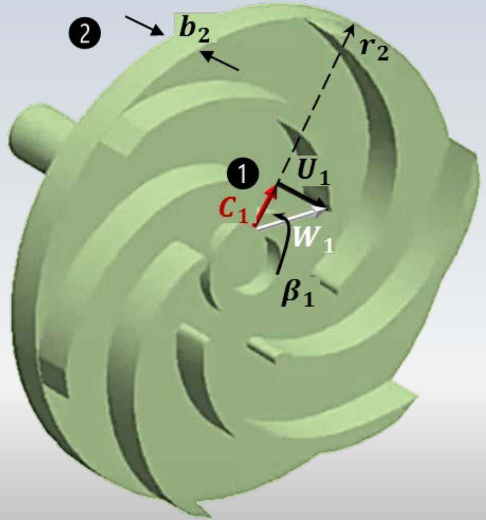
$$\tan\beta_1 = \frac{c_{1m}}{U_1} = 0.254$$

$$\beta_1 = 14.28^0$$



$\boldsymbol{c_{1m} = c_1}$

entrée radiale



$Z = 6$ $r_2 = 23cm$ $r_1 = 9cm$

$Q = 0.102\, m^3/s$ $e_1 = 0.1$ $n = 1000\, rpm$

$\beta_{2a} = 65^0$ $e_2 = 0.05$ $\Phi_2 = 0.1$

$c_{1m} = c_{2m}$ e: *épaisseur du metal* $\rho = 1000\, kg/m^3$

Pompe centrifuge

c) , d) Calcul de la tête théorique adim. et de la puissance

$U_2 = 24.09 m/s$

$$\Psi = \frac{W_{ef}}{U^2} = \frac{\sigma_s W_{ea}}{U^2} \longrightarrow \Psi = \sigma_s(1 - \phi_2 tan\beta_{2a})$$

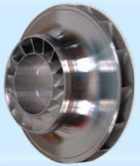
$$\boldsymbol{\sigma_s} = 1 - \frac{\sqrt{\cos\beta_{2a}}}{Z^{0.7}} = 0.8145 \qquad (Wiesner)$$

$$\psi = \sigma_s(1 - \phi_2 tan\beta_{2a}) = 0.6398$$

$$W_e = \psi U_2^2 = 371.32\, m^2/s^2 \longrightarrow \dot{W} = \rho Q W_e = 37.87 kW$$

Exemple

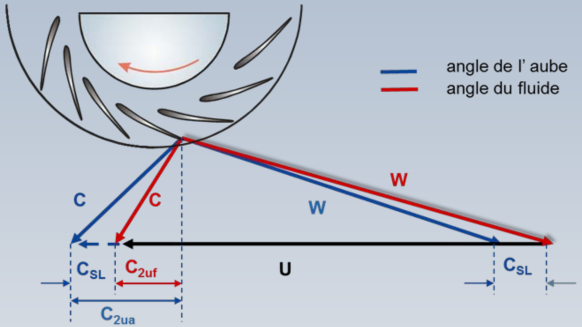
Un compresseur centrifuge tourne à $\boldsymbol{n = 16000 rpm}$. Le rapport de pression totale dans le rotor est $\boldsymbol{p_{02}/p_{01} = 4.2}$ et les conditions d'arrêt à l'entrée du compresseur sont $\boldsymbol{T_{01} = 200\ ^0\mathrm{C}}$ et $\boldsymbol{p_{01} = 1\ bar}$. Les pales à la sortie sont **radiales** et la composante radiale de la vitesse absolue en ce point est $\boldsymbol{c_{2m} = 136\, m/s}$. **Calculez le coefficient de glissement $\boldsymbol{\sigma_s}$** sachant que le rendement total-à-total du compresseur est $\boldsymbol{\eta_{tt} = 0.82}$ et que le diamètre du rotor est de $\boldsymbol{D_2 = 58\, cm}$. On peut considérer que la vitesse à l'entrée est purement axiale ($\boldsymbol{c_{1u} = 0}$), $\boldsymbol{c_p = 1005 J/kg\ ^0\mathrm{C}}$ et $\boldsymbol{\gamma = 1.4}$

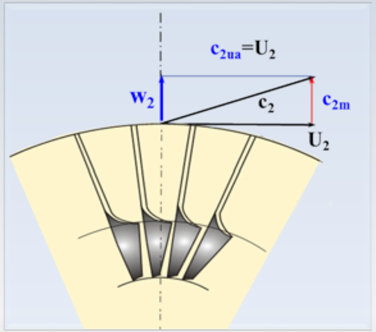
$c_{2m} = 136\, m/s$ $D_2 = 58cm$ $\eta_{tt} = 0.82$ 

$p_{02}/p_{01} = 4.2$ $n = 1600rpm$ $\gamma = 1.4$

$c_p = 1005\, J/kg \cdot K$ $p_{01} = 100kPa$ $T_{01} = 20^0C$ $c_{1u} = 0$

Les pales sont radiales





Calcul de $\boldsymbol{\sigma_s}$

$$\sigma_s = \frac{c_{2uf}}{c_{2ua}} = \frac{c_{2uf}}{U_2}$$

$$c_{2ua} = U_2$$ (pales radiales)

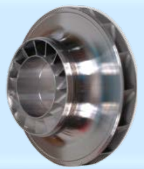
$$U_2 = \frac{\pi D_2 n}{60} = \frac{\pi(0.58)(16000)}{60}$$

$$c_{2ua} = U_2 = 486m/s$$

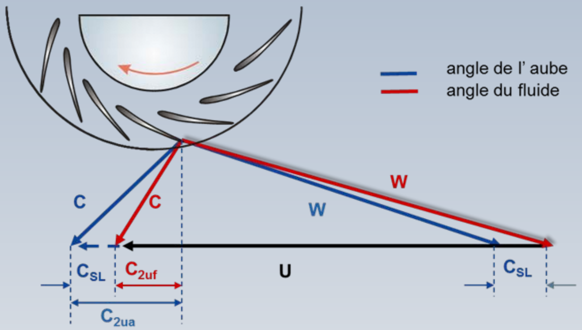
$c_{2m} = 136\, m/s$ $\quad D_2 = 58cm$ $\quad \eta_{tt} = 0.82$

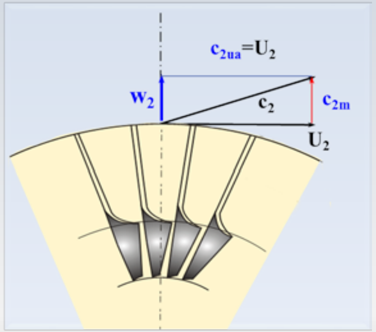
$p_{02}/p_{01} = 4.2$ $\quad n = 1600rpm$ $\quad \gamma = 1.4$

$c_p = 1005\, J/kg\cdot K$ $\quad p_{01} = 100kPa$ $\quad T_{01} = 20^0 C$ $\quad c_{1u} = 0$



Les pales sont radiales





Pour trouver la composante $\boldsymbol{c_{2uf}}$, nous confrontons les équations d'Euler et de l'énergie

$$\left.\begin{aligned} W_e &= c_p(T_{02} - T_{01}) \\ W_e &= \boldsymbol{c_{2uf}} U_2 \end{aligned}\right\}$$

la vitesse à l'entrée est **axiale** $\boldsymbol{c_{1u} = 0}$

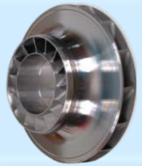
?

$$c_{2uf} = \frac{c_p(T_{02} - T_{01})}{U_2}$$

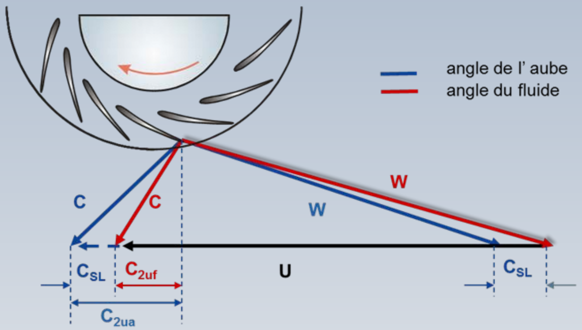
$c_{2m} = 136\, m/s$ $\quad D_2 = 58cm$ $\quad \eta_{tt} = 0.82$

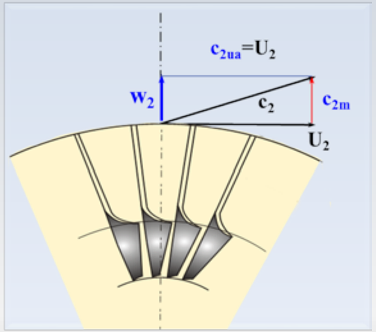
$p_{02}/p_{01} = 4.2$ $\quad n = 1600rpm$ $\quad \gamma = 1.4$

$c_p = 1005\, J/kg \cdot K$ $\quad p_{01} = 100kPa$ $\quad T_{01} = 20^0C$ $\quad c_{1u} = 0$



Les pales sont radiales





$$\eta_{tt} = \frac{(T_{02s} - T_{01})}{(T_{02} - T_{01})}$$

$$T_{02} - T_{01} = \frac{T_{01}\left(\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{\gamma-1/\gamma} - 1\right)}{\eta_{tt}}$$

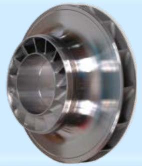
$$T_{02} - T_{01} = \frac{293\left((4.2)^{0.4/1.4} - 1\right)}{0.82}$$

$$T_{02} - T_{01} = 181.3K$$

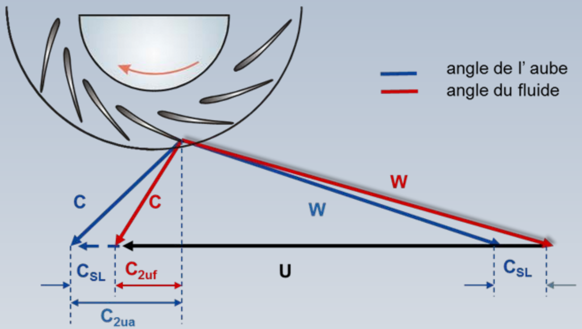
$c_{2m} = 136\, m/s$ $D_2 = 58cm$ $\eta_{tt} = 0.82$

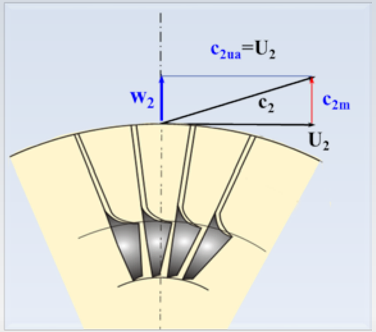
$p_{02}/p_{01} = 4.2$ $n = 1600rpm$ $\gamma = 1.4$

$c_p = 1005\, J/kg \cdot K$ $p_{01} = 100kPa$ $T_{01} = 20^0 C$ $c_{1u} = 0$



Les pales sont radiales





$$c_{2uf} = \frac{c_p(T_{02} - T_{01})}{U_2}$$

$$c_{2uf} = \frac{1005(181.3)}{486} = 375\, m/s$$

$$\boxed{\sigma_s = \frac{c_{2uf}}{c_{2ua}} = \frac{375}{486} = 0.772}$$

Exemple

Pour un compresseur centrifuge on a les données montrées dans le tableau ci-dessous

$\sigma_s = 0.92$	$M_2 = 1$	$\eta_{s(1-3)} = 0.82$
$\Psi = 1.04(\text{sur}U_2)$	$p_{03}/p_{01} = 3.8$	$n = 7200\,rpm$
$\dot{m} = 40\,kg/s$	$R_g = 287\,J/kg\cdot K$	$\gamma = 1.4$
$c_p = 1005\,J/kg\cdot K$	$p_{01} = 101.3\,kPa$	$T_{01} = 288K$
$\eta_{sr(1-2)} = 9.81(rotor)$		

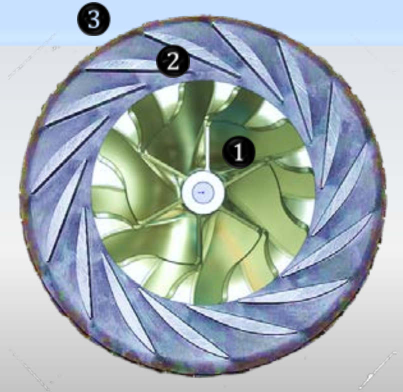
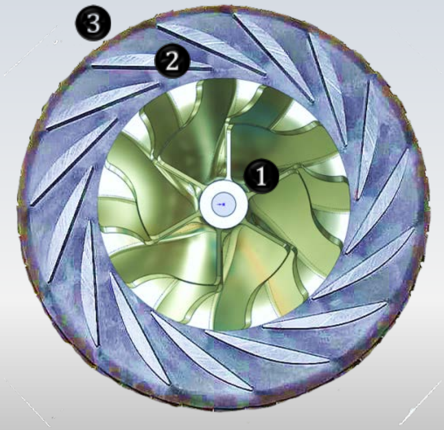


Schéma à fins de guide seulement

Remarques

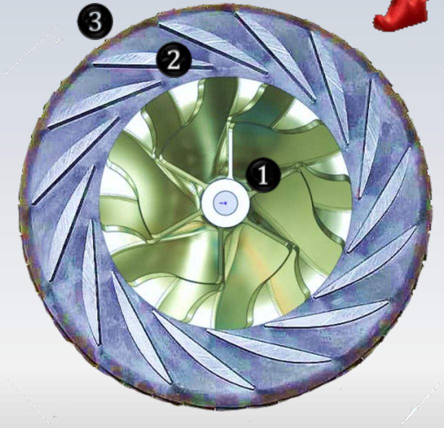
- La vitesse d’entrée est axiale (normale à l’écran)
- Les aubes à la sortie du rotor sont **radiales!**
- La forme $\boldsymbol{\Psi} = \dfrac{c_p \Delta T_0}{\boldsymbol{\sigma_s} U_2^2}$ a été utilisée
- Considérez $T_{03} = T_{02}$



Exemple

On vous demande de calculer

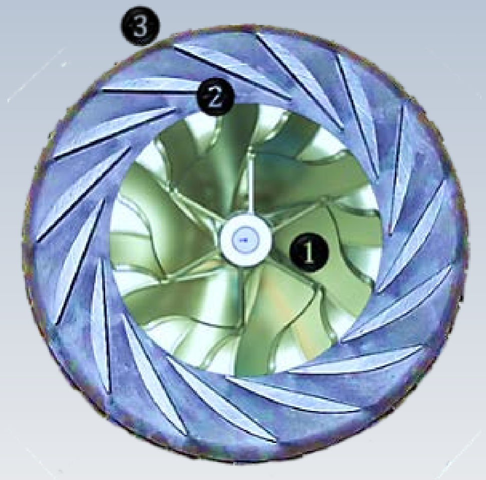
- $T_{03} - T_{01}$
- la vitesse U_2 et le diamètre D_2
- p_2, T_2, ρ_2
- l'épaisseur b_2 du rotor



$\sigma_s = 0.92$ $M_2 = 1$ $\eta_{s(1-3)} = 0.82$ $\Psi = 1.04(\text{sur}U_2)$

$p_{03}/p_{01} = 3.8$ $n = 7200\ rpm$ $\dot{m} = 40\ kg/s$ $R_g = 287\ J/kg\cdot K$

$\gamma = 1.4$ $c_p = 1005\ J/kg\cdot K$ $p_{01} = 101.3\ kPa$ $T_{01} = 288K$ $\eta_{sr(1-2)} = 0.91(rotor)$



$T_{03} - T_{01}$?

$$\eta_s = \frac{T_{03s} - T_{01}}{T_{03} - T_{01}} = \frac{T_{01}(T_{03s}/T_{01} - 1)}{T_{03} - T_{01}}$$

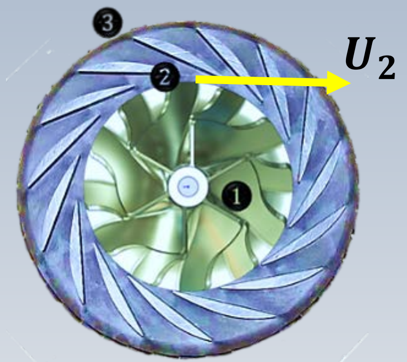
$$(T_{03} - T_{01}) = \frac{T_{01}}{\eta_s}\left(\left(\frac{p_{03}}{p_{01}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)$$

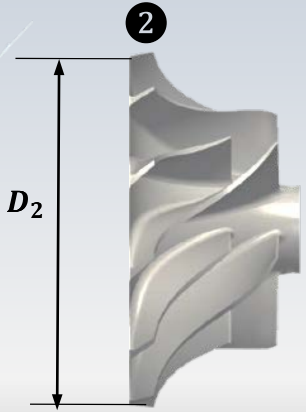
$$(T_{03} - T_{01}) = 163.1K$$

$\sigma_s = 0.92$ | $M_2 = 1$ | $\eta_{s(1-3)} = 0.82$ | $\Psi = 1.04(\text{sur}U_2)$

$p_{03}/p_{01} = 3.8$ | $n = 7200\ rpm$ | $\dot{m} = 40\ kg/s$ | $R_g = 287\ J/kg \cdot K$

$\gamma = 1.4$ | $c_p = 1005\ J/kg \cdot K$ | $p_{01} = 101.3\ kPa$ | $T_{01} = 288K$ | $\eta_{sr(1-2)} = 0.91(rotor)$





U_2 ,D_2 ?

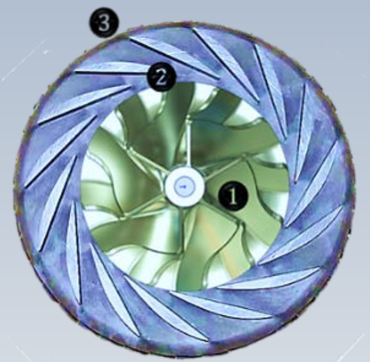
$$\Psi = \frac{c_p \Delta T_0}{\sigma_s U_2^2} = \frac{c_p (T_{03} - T_{01})}{\sigma_s U_2^2}$$ (Option 1)

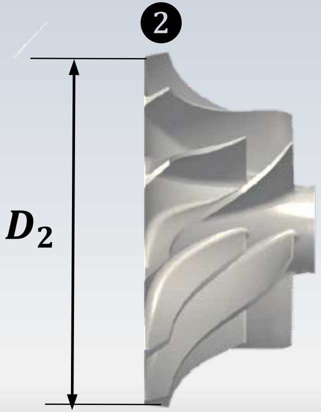
$$U_2 = \sqrt{\frac{(T_{03} - T_{01}) \times c_p}{\Psi \times \sigma_s}}$$

$$= \sqrt{\frac{163.3\, K \times 1005\, J/kg \cdot K}{1.04 \times 0.92}}$$

$$U_2 = 413.9\ m/s$$

$\sigma_s = 0.92$	$M_2 = 1$	$\eta_{s(1-3)} = 0.82$	$\Psi = 1.04(\text{sur}U_2)$	
$p_{03}/p_{01} = 3.8$	$n = 7200\ rpm$	$\dot{m} = 40\ kg/s$	$R_g = 287\ J/kg\cdot K$	
$\gamma = 1.4$	$c_p = 1005\ J/kg\cdot K$	$p_{01} = 101.3\ kPa$	$T_{01} = 288K$	$\eta_{sr(1-2)} = 0.91(rotor)$





U_2 ,D_2

$$U_2 = 413.9\ m/s$$

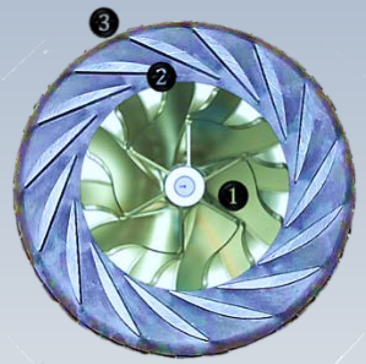
$$U_2 = \frac{\pi D_2 n}{60}$$

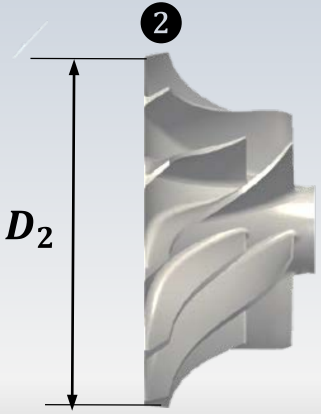
$$D_2 = 1.09\ m$$

$\sigma_s = 0.92$ | $M_2 = 1$ | $\eta_{s(1-3)} = 0.82$ | $\Psi = 1.04(\text{sur}U_2)$

$p_{03}/p_{01} = 3.8$ | $n = 7200\ rpm$ | $\dot{m} = 40\ kg/s$ | $R_g = 287\ J/kg\cdot K$

$\gamma = 1.4$ | $c_p = 1005\ J/kg\cdot K$ | $p_{01} = 101.3\ kPa$ | $T_{01} = 288K$ | $\eta_{sr(1-2)} = 0.91(rotor)$





$p_2, T_2, \rho_2?$ $\quad (T_{03} - T_{01}) = 163.1K$

$$T_{02} - T_{01} = T_{03} - T_{01} \qquad (T_{02} = T_{03})$$

$$T_{02} = T_{01} + (T_{03} - T_{01}) = 451.1K$$

$$\frac{T_{02}}{T_2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2$$

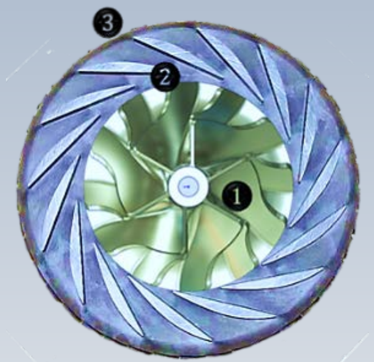
$$T_2 = 375.91K$$

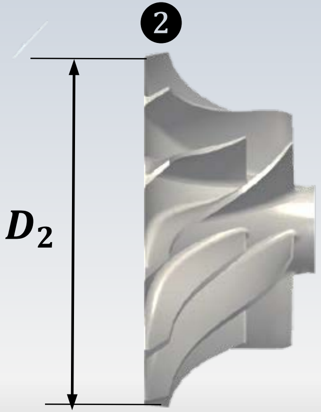
$$c_2 = a_2 = \sqrt{\gamma R T_2} = 388.64\ m/s$$

$\sigma_s = 0.92$ $\quad M_2 = 1$ $\quad \eta_{s(1-3)} = 0.82$ $\quad \Psi = 1.04(\text{sur}U_2)$

$p_{03}/p_{01} = 3.8$ $\quad n = 7200\ rpm$ $\quad \dot{m} = 40\ kg/s$ $\quad R_g = 287\ J/kg\cdot K$

$\gamma = 1.4$ $\quad c_p = 1005\ J/kg\cdot K$ $\quad p_{01} = 101.3\ kPa$ $\quad T_{01} = 288K$ $\quad \eta_{sr(1-2)} = 0.91(rotor)$





$\boldsymbol{p_2, T_2, \rho_2}$

$$\frac{p_2}{p_{01}} = \left(\frac{p_2}{p_{02}}\right)\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)$$

$$\left(\frac{p_2}{p_{02}}\right) = \left(\frac{T_2}{T_{02}}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} = 0.528$$

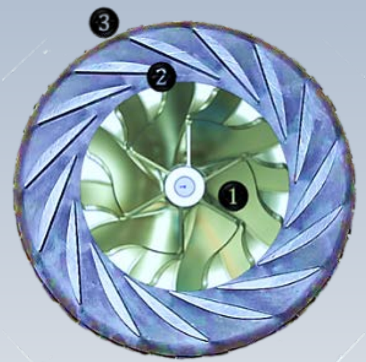
?

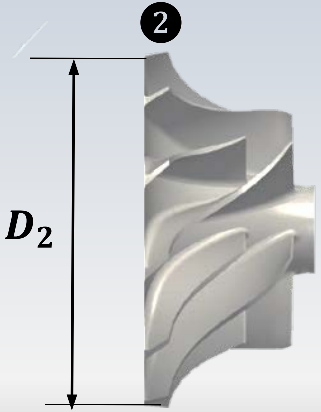
$$\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right) = \left(\frac{T_{02s}}{T_{01}}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$\sigma_s = 0.92$ | $M_2 = 1$ | $\eta_{s(1-3)} = 0.82$ | $\Psi = 1.04(\text{sur}U_2)$

$p_{03}/p_{01} = 3.8$ | $n = 7200\ rpm$ | $\dot{m} = 40\ kg/s$ | $R_g = 287\ J/kg\cdot K$

$\gamma = 1.4$ | $c_p = 1005\ J/kg\cdot K$ | $p_{01} = 101.3\ kPa$ | $T_{01} = 288K$ | $\eta_{sr(1-2)} = 0.91(rotor)$





p_2, T_2, ρ_2

$$\eta_{sr} = \frac{T_{02s} - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} \qquad (T_{02} - T_{01}) = 163.3K$$

$$T_{02s} = 436.4K$$

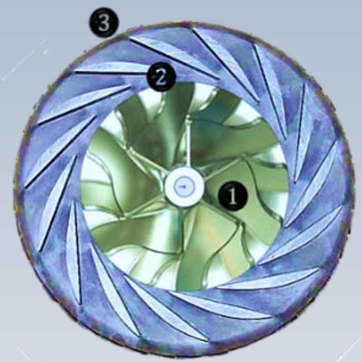
$$\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right) = \left(\frac{T_{02s}}{T_{01}}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

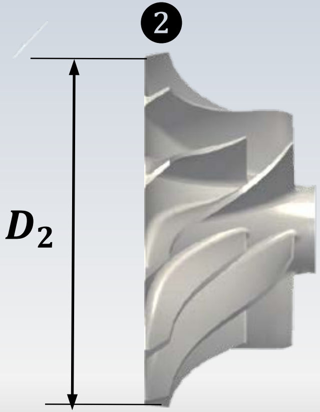
$$= \left(\frac{436.6}{288}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} = 4.2839$$

$\sigma_s = 0.92$ $\quad M_2 = 1$ $\quad \eta_{s(1-3)} = 0.82$ $\quad \Psi = 1.04(\text{sur}U_2)$

$p_{03}/p_{01} = 3.8$ $\quad n = 7200\ rpm$ $\quad \dot{m} = 40\ kg/s$ $\quad R_g = 287\ J/kg\cdot K$

$\gamma = 1.4$ $\quad c_p = 1005\ J/kg\cdot K$ $\quad p_{01} = 101.3\ kPa$ $\quad T_{01} = 288K$ $\quad \eta_{sr(1-2)} = 0.91(rotor)$





$$\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right) = 4.2839$$

$$\left(\frac{p_2}{p_{02}}\right) = 0.528$$

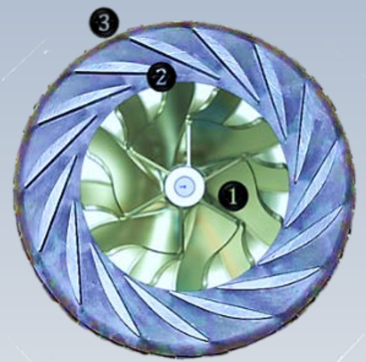
$$\frac{p_2}{p_{01}} = \left(\frac{p_2}{p_{02}}\right)\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)$$

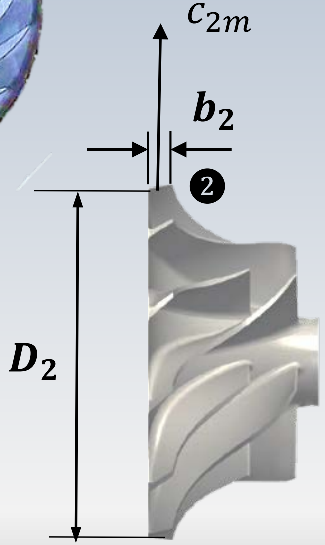
$$\frac{p_2}{p_{01}} = (0.528)(4.283) = 2.262$$

$\sigma_s = 0.92$ | $M_2 = 1$ | $\eta_{s(1-3)} = 0.82$ | $\Psi = 1.04(\text{sur}\,U_2)$

$p_{03}/p_{01} = 3.8$ | $n = 7200\ rpm$ | $\dot{m} = 40\ kg/s$ | $R_g = 287\ J/kg\cdot K$

$\gamma = 1.4$ | $c_p = 1005\ J/kg\cdot K$ | $p_{01} = 101.3\ kPa$ | $T_{01} = 288K$ | $\eta_{sr(1-2)} = 0.91(rotor)$

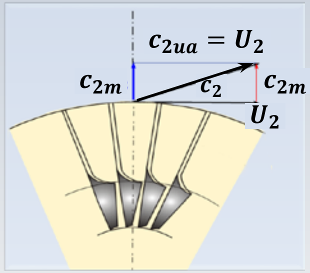




$$p_2 = 229.08kPa$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = 2.12kg/m^3$$

$$A_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 c_{2m}} \longleftarrow$$



$$U_2 = 413.19\ m/s$$

Les aubes à la sortie sont **radiales!**

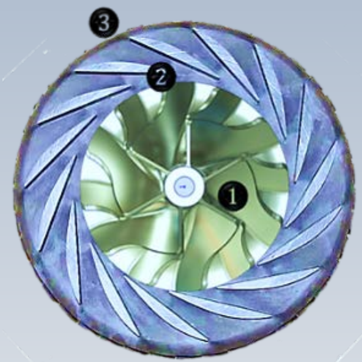
$$c_{2uf} = \sigma_s c_{2ua} = \sigma_s U_2$$

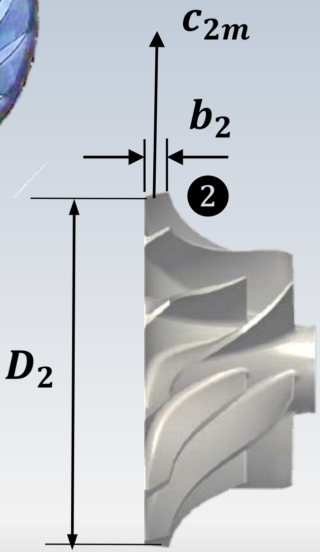
$$= 380.78\ m/s$$

$\sigma_s = 0.92$ $\quad M_2 = 1$ $\quad \eta_{s(1-3)} = 0.82$ $\quad \Psi = 1.04(\text{sur}U_2)$

$p_{03}/p_{01} = 3.8$ $\quad n = 7200\ rpm$ $\quad \dot{m} = 40\ kg/s$ $\quad R_g = 287\ J/kg\cdot K$

$\gamma = 1.4$ $\quad c_p = 1005\ J/kg\cdot K$ $\quad p_{01} = 101.3\ kPa$ $\quad T_{01} = 288K$ $\quad \eta_{sr(1-2)} = 0.91(rotor)$





b_2?

$$c_2 = 388.64\ m/s \qquad c_{2uf} = 380.78\ m/s$$

$$c_2^2 = c_{2uf}^2 + \boldsymbol{c_{2m}^2}$$

$$c_{2m} = 77.73\ m/s$$

$$\boldsymbol{A_2} = \frac{\dot{m}}{\rho_2 c_{2m}} = 0.242m^2$$

$$D_2 = 1.09\ m$$

$$\boldsymbol{b_2} = \frac{A_2}{\pi D_2} = 0.0706m$$

Problème

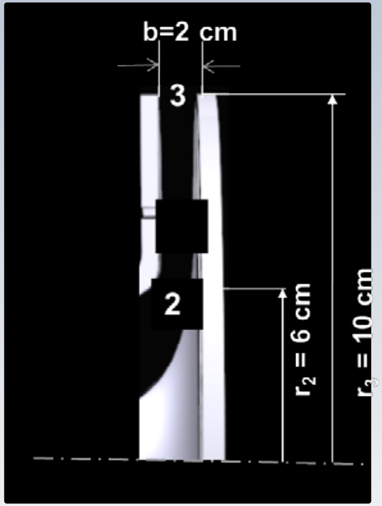
Pour un compresseur centrifuge on a les données suivantes:

$$p_{02} = 2.4\, bars, T_{02} = 378K, M_1 = 0.38, a_2 = 0^0$$

$$p_{03} = 6.1\, bars, T_{03} = 533K, M_3 = 0.88, R_g = 287\, J/kg$$

$$n = 42000\, rpm, \gamma = 1.4$$

c_2 *est dans la direction radiale* ($c_{2u} = 0$)

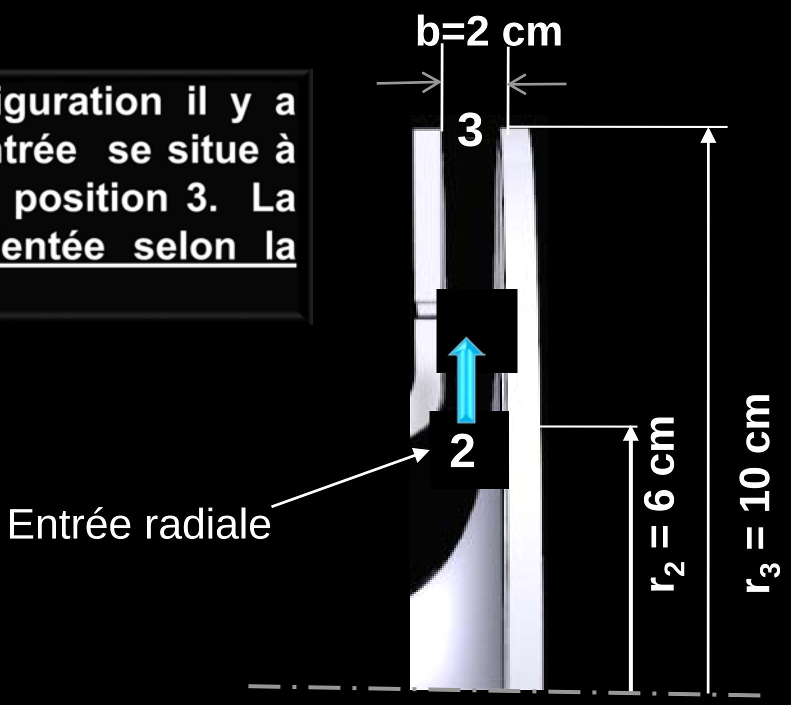


Problème

On doit calculer

- La température $\boldsymbol{T_2}$, la vitesse relative $\boldsymbol{W_2}$ et la température de stagnation relative $\boldsymbol{T_{02r}}$ à l'entrée du rotor
- Le débit massique $\dot{\boldsymbol{m}}$
- La température $\boldsymbol{T_3}$, la vitesse absolue $\boldsymbol{c_3}$ et l'angle $\boldsymbol{\alpha_3}$ entre la vitesse absolue et la direction radiale à la sortie du rotor
- La vitessse relative $\boldsymbol{W_3}$, l'angle $\boldsymbol{\beta_3}$ entre la vitesse relative et la direction radiale et la température de stagnation relative $\boldsymbol{T_{03r}}$

Remarque: Dans cette configuration il y a seulement un rotor, dont l'entrée se situe à la position 2 et la sortie à la position 3. La vitesse absolue C_2 est <u>orientée selon la direction radiale</u>



Rappel

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0 \mathrm{A}} = M\sqrt{\gamma}\left[1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

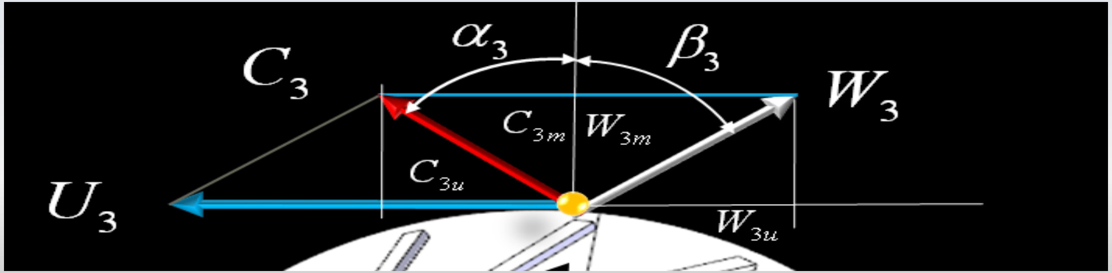
Cette équation 1D pour le débit massique adimensionnel, peut être reformulée en fonction de l'angle $\boldsymbol{\alpha}$ défini par la direction de la vitesse absolue de l'écoulement et la direction radiale

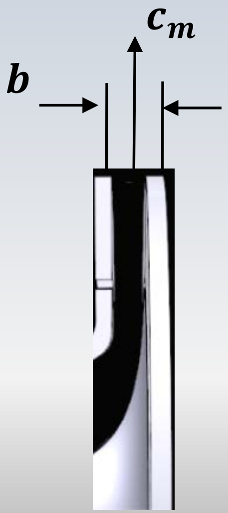
Écoulement sortant en périphérie

Par rapport à la figure, avec l'indice 3 supprimé, l'équation de conservation de la masse peut s'écrire:

$$\dot{m} = \rho c_m A = \rho c_m 2\pi r b \quad = \rho(c\cos)2\pi r b$$

$$\frac{\dot{m}}{2\pi r b\cos\alpha} = \rho c$$



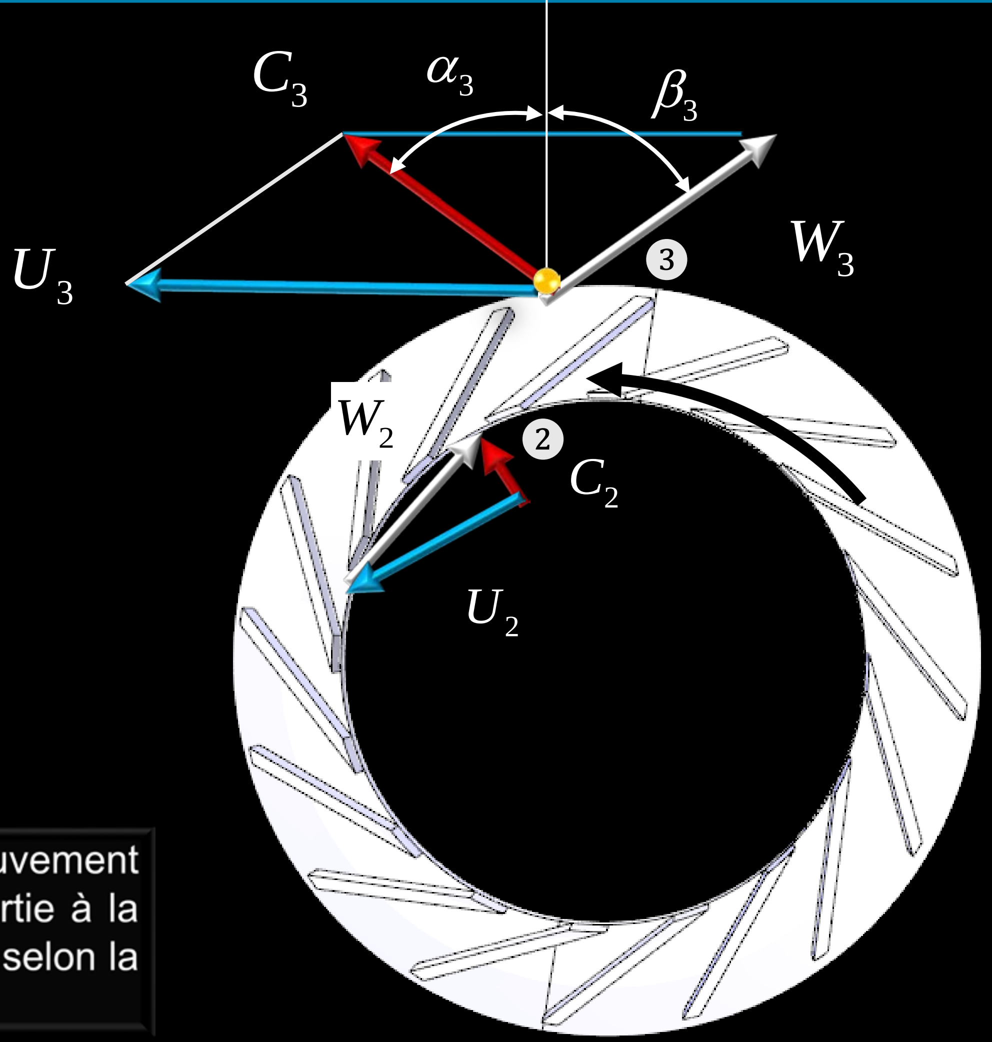


Écoulement sortant en périphérie

Tel que pour l'équation générale, après quelques manipulations on trouve

$$\boxed{\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0 2\pi r b \boldsymbol{\cos\alpha}} = M\sqrt{\gamma}\left[1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}$$

Dans cette équation, l'angle $\boldsymbol{\alpha}$ permet de tenir compte implicitement de la composante radiale de la vitesse absolue



Cette image veut illustrer un **rotor** en mouvement dont l'entréé se situe à la position 2 et la sortie à la position 3. La vitesse absolue C_2 est orientée selon la direction **radiale**

$p_{02} = 2.4\ bar$ $T_{02} = 378\ K$ $M_2 = 0.38$ $\alpha_2 = 0^0$

$p_{03} = 6.1\ bar$ $T_{03} = 533\ K$ $M_3 = 0.88$ $n = 42000 rpm$

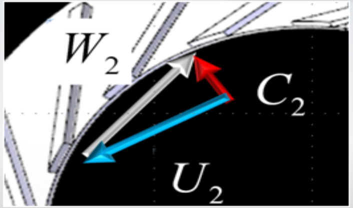
$T_2, W_2,\ T_{02r}?$

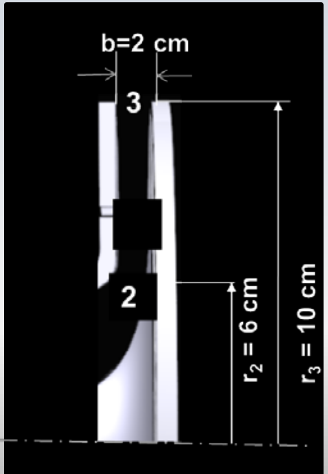
$$\frac{T_{02}}{T_2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \Longrightarrow T_2 = 367.39\ K$$

$$C_2 = M_2\sqrt{\gamma R T_2} \Longrightarrow C_2 = 145.99\ m/s$$

$$W_2 = \sqrt{U_2^2 + C_2^2} \Longrightarrow W_2 = 301.59\ m/s$$

$$U_2 = \frac{2\pi r_2 n}{60} = 263.9\ m/s$$





$p_{02} = 2.4\ bar$ $\quad T_{02} = 378\ K$ $\quad M_2 = 0.38$ $\quad \alpha_2 = 0^0$

$p_{03} = 6.1\ bar$ $\quad T_{03} = 533\ K$ $\quad M_3 = 0.88$ $\quad n = 42000 rpm$

$R = 287\ J/kg$ $\quad \gamma = 1.4$

Température de stagnation (d'arrêt) relative T_{02r} à l'entrée du rotor

$$T_{02r} = T_2 + \frac{W_2^2}{2c_p}$$

$$T_2 = T_{02} - \frac{C_2^2}{2c_p}$$

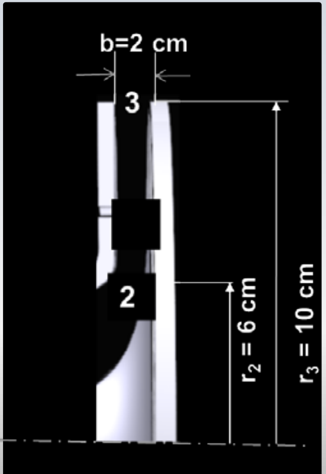
$$T_{02r} = T_{02} - \frac{C_2^2}{2c_p} + \frac{W_2^2}{2c_p} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{T_{02r} = 412.67K}$$

$p_{02} = 2.4\ bar$	$T_{02} = 378\ K$	$M_2 = 0.38$	$\alpha_2 = 0^0$
$p_{03} = 6.1\ bar$	$T_{03} = 533\ K$	$M_3 = 0.88$	$n = 42000 rpm$
		$R = 287\ J/kg$	$\gamma = 1.4$

Le débit massique $\dot{m}$ peut être calculé directement à l'aide de l'équation du débit adimensionnel écrite pour la position 2

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_{02}}}{p_{02} 2\pi r_2 b\cos\alpha_2} = M_2\sqrt{\gamma}\left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2\right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

$$\dot{m} = 2.268\ kg/s$$



$p_{02} = 2.4\ bar$ $\quad T_{02} = 378\ K$ $\quad M_2 = 0.38$ $\quad \alpha_2 = 0^0$

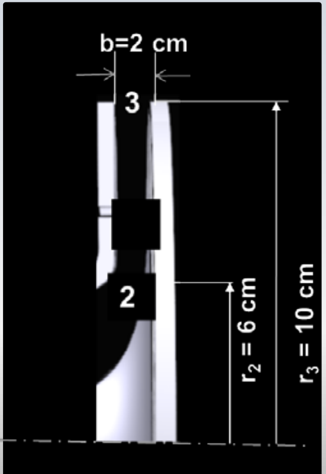
$p_{03} = 6.1\ bar$ $\quad T_{03} = 533\ K$ $\quad M_3 = 0.88$ $\quad n = 42000 rpm$

$R = 287\ J/kg$ $\quad \gamma = 1.4$

L'angle $\boldsymbol{\alpha_3}$ peut être trouvé avec la même équation écrite pour le la position 3

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_{03}}}{p_{03} 2\pi r_3 b \cos\boldsymbol{\alpha_3}} = M_3\sqrt{\gamma}\left[1 + \frac{\gamma-1}{2}M_3^2\right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

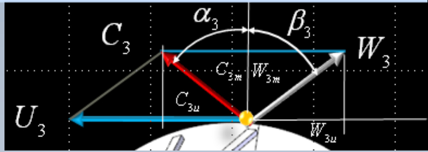
$$\boldsymbol{\alpha_3 = 80.14^0}$$



$p_{02} = 2.4\ bar$ $T_{02} = 378\ K$ $M_2 = 0.38$ $\alpha_2 = 0^0$

$p_{03} = 6.1\ bar$ $T_{03} = 533\ K$ $M_3 = 0.88$ $n = 42000 rpm$

$R = 287\ J/kg$ $\gamma = 1.4$



Calcul de T_3, C_3, W_3, β_3

$$\frac{T_{03}}{T_3} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2 \Rightarrow T_3 = 461.52K$$

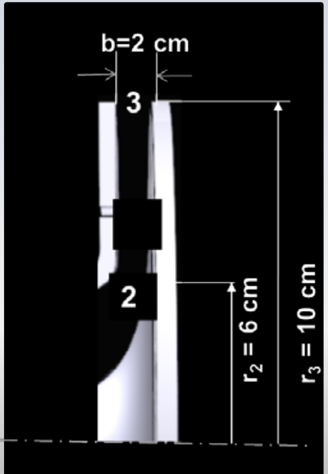
$$C_3 = M_3\sqrt{\gamma R T_3}$$

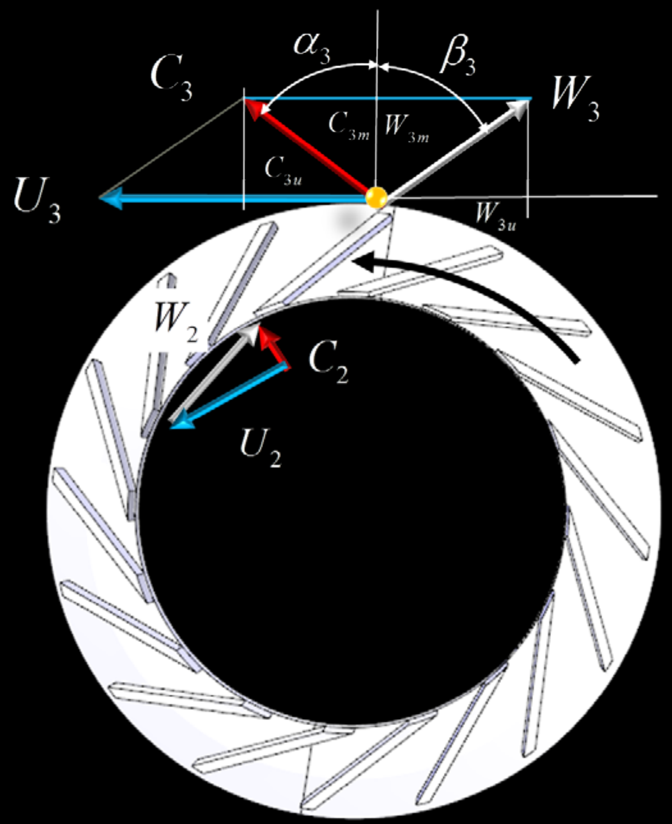
$$c_{3m} = C_3 \cos\alpha_3 \Rightarrow c_{3m} = 64.87\ m/s$$

$$w_{3m} = c_{3m} \Rightarrow w_{3m} = 64.87\ m/s$$

$$c_{3u} = C_3 \sin\alpha_3 \Rightarrow c_{3u} = 373.36\ m/s$$

$$w_{3u} = -(U_3 - c_{3u}) \Rightarrow w_{3u} = -66.47\ m/s$$



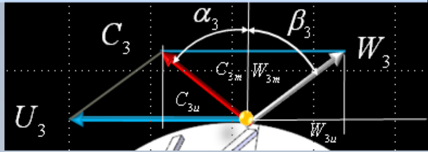


α_3
β_3
C_3
W_3
C_{3m}
W_{3m}
C_{3u}
U_3
W_{3u}
W_2
C_2
U_2

$p_{02} = 2.4\ bar$ $\quad T_{02} = 378\ K$ $\quad M_2 = 0.38$ $\quad \alpha_2 = 0^0$

$p_{03} = 6.1\ bar$ $\quad T_{03} = 533\ K$ $\quad M_3 = 0.88$ $\quad n = 42000 rpm$

$R = 287\ J/kg$ $\quad \gamma = 1.4$



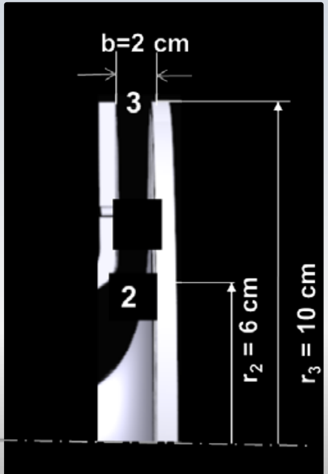
Calcul de W_3, β_3

$$W_3 = \sqrt{w_{3u}^2 + w_{3m}^2} \quad \Rightarrow \quad W_3 = 92.88\ m/s$$

$$\tan\beta_3 = \frac{W_{3u}}{W_{3m}} \quad \Rightarrow \quad \beta_3 = 45.69^0$$

$$T_{03r} = T_{03} + \frac{W_3^2}{2c_p} - \frac{C_3^2}{2c_p} \quad \Rightarrow \quad T_{03r} = 465.81\ \mathrm{K}$$

$$\Delta T_{0r} = T_{03r} - T_{02r} \quad \Rightarrow \quad \Delta T_{0r} = 53.14K$$



Exemple

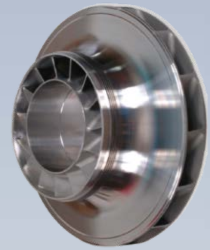
Un compresseur centrifuge tourne à $\boldsymbol{n = 17000 rpm}$. Le rapport de pression totale dans le rotor est $\boldsymbol{p_{02}/p_{01} = 4.5}$. Les conditions d'arrêt à l'entrée du compresseur sont $\boldsymbol{T_{01} = 20\,^0}$C et $\boldsymbol{p_{01} = 1\, bar}$. La composante périphérique de la vitesse absolue à l'entrée est nulle ($\boldsymbol{c_{1u} = 0}$). Le rotor a $\boldsymbol{Z = 19}$ **pales radiales**, le rendement total-à-total est $\boldsymbol{\eta_{tt} = 0.84}$ et $\boldsymbol{\Psi = 1.0}$ (pour le rotor) défini d'après la convention

$$\Psi = \frac{c_p \Delta T_0}{\sigma U^2}$$

Exemple

Calculez le coefficient de glissement $\boldsymbol{\sigma_s}$, le diamètre $\boldsymbol{D_2}$ du rotor et la puissance requise $\dot{\boldsymbol{W}}$ pour l'entrainer lorsque le débit massique est de $\dot{\boldsymbol{m}} = \mathbf{2.5}\boldsymbol{kg/s}$ $\boldsymbol{c_p} = \mathbf{1004}\boldsymbol{J/kg}$ ^{0}C et $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{1.4}$

Calcul du coefficient de glissement σ_s et du diamètre D_2



Pour des pales radiales (formule de Stanitz)

$$\boldsymbol{\sigma_s} = 1 - \frac{2}{Z} = 1 - \frac{2}{19} = 0.895$$

$$\boldsymbol{\sigma_s = 0.895}$$

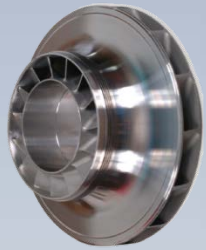
$$\boldsymbol{D_2} = \frac{60U_2}{\pi n}$$

Il faut trouver U_2

Après transformation, la formule précisant $\Psi = \frac{c_p \Delta T_0}{\sigma U^2}$ conduit à l'expression compacte

Z=19
p_{02}/p_{01}=4.5
$\boldsymbol{c_{1u} = 0}$
Ψ=1. (rotor)
η_{tt}=0.84
n=17000 rpm
γ=1.4
c_p=1004 J/kg K
p_{01}=100 kPa
T_{01}=20 ^{0} C
$\dot{m} = 2.5 kg/s$
pales radiales

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(1 + \frac{\eta_c \Psi \sigma \boldsymbol{U^2}}{c_p T_{01}}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$



$$4.5 = \left(1 + \frac{0.84 \times 1.0 \times 0.895 \times \boldsymbol{U^2}}{1004 \times 293}\right)^{1.4/(0.4)}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{U_2 = 449.9\, m/s} \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{D_2} = \frac{60U_2}{\pi n} = \frac{60(449.9)}{\pi(17000)} = 0.505m \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{D_2 = 0.505m}$$

Z=19
p_{02}/p_{01}=4.5
$c_{1u} = 0$
Ψ=1. (rotor)
η_{tt}=0.84
n=17000 rpm
γ=1.4
c_p=1004 J/kg K
p_{01}=100 kPa
T_{01}=20 ^{0} C
$\dot{m} = 2.5 kg/s$
pales radiales

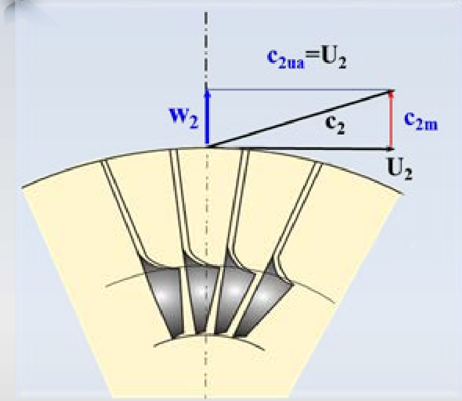
Calcul de la puissance

$\boldsymbol{\sigma_s = 0.895}$ $\boldsymbol{U_2 = 449.9\, m/s}$

Les pales sont radiales et $\boldsymbol{c_{1u} = 0}$, alors

$$W_e = \sigma_s U_2^2 \quad = 0.895 \times (449.9)^2 \; = 181157\ J/kg$$

$$\dot{W} = \dot{m} W_e \quad = 2.5 \times 181157/1000 \quad = 452.9 kW$$



Z=19
p_{02}/p_{01} =4.5
$\boldsymbol{c_{1u} = 0}$
Ψ=1. (rotor)
η_{tt}=0.84
n=17000 rpm
γ=1.4
c_p=1004 J/kg K
p_{01} =100 kPa
T_{01}=20 ^{0} C
$\boldsymbol{\dot{m} = 2.5 kg/s}$
pales radiales

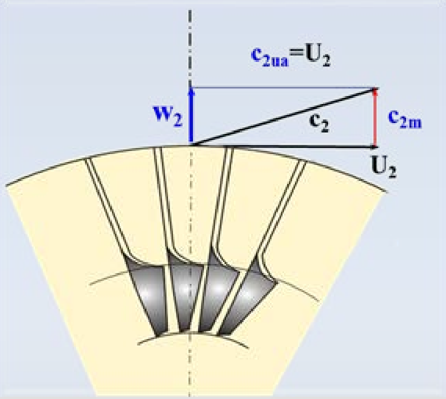
Calcul de la puissance requise

$\boldsymbol{\sigma_s = 0.895}$ $\boldsymbol{U_2 = 449.9\, m/s}$

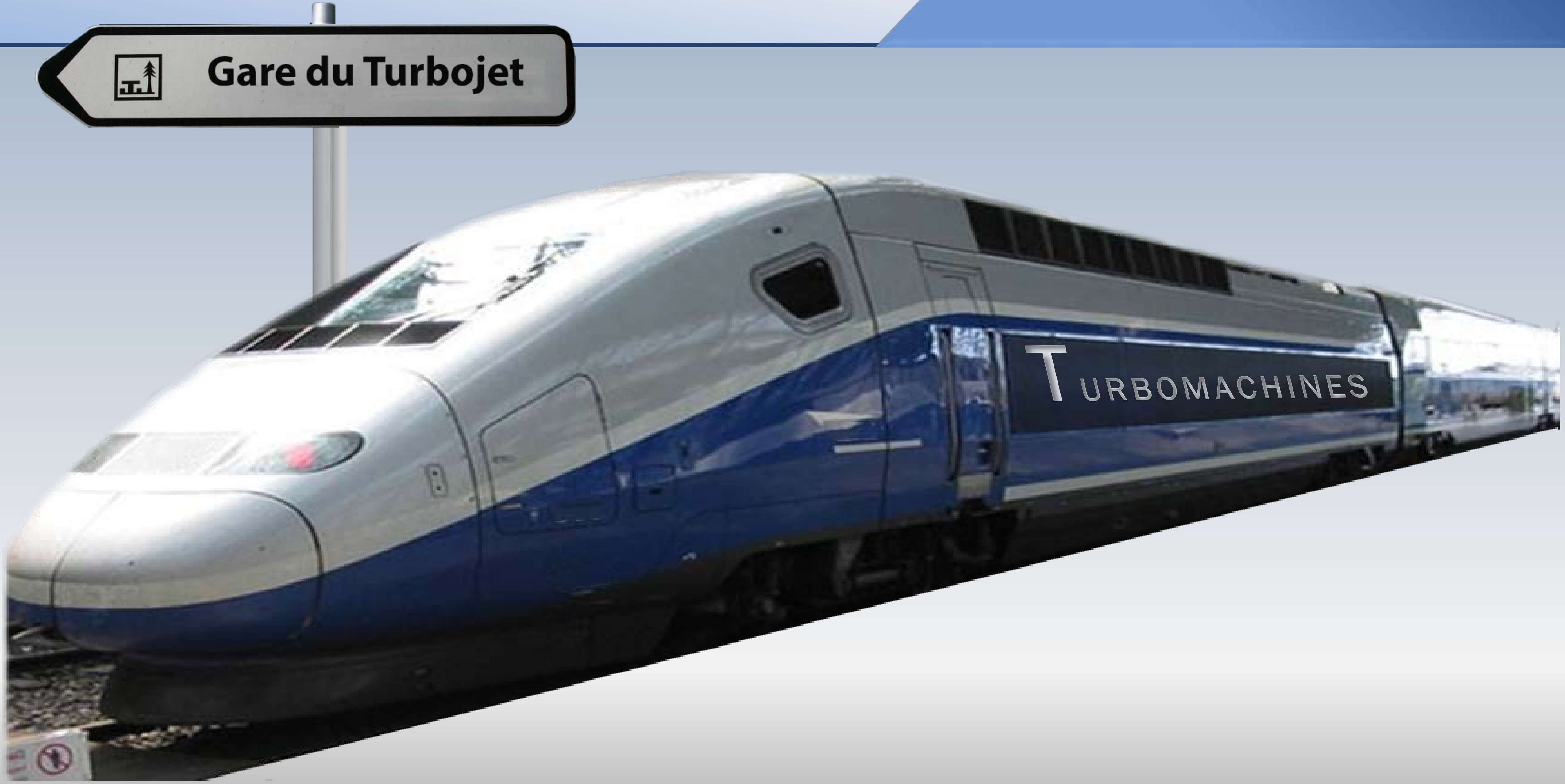
pales radiales $+ \boldsymbol{c_{1u} = 0}$

$$W_{ef} = \sigma_s U_2^2 = 0.895 \times (449.9)^2 = 181157\ J/kg$$

$$\dot{W} = \dot{m} W_e = 2.5 \times 181157/1000 = 452.9 kW$$



Z=19
p_{02}/p_{01}=4.5
$\boldsymbol{c_{1u} = 0}$
Ψ=1. (rotor)
η_{tt}=0.84
n=17000 rpm
γ=1.4
c_p=1004 J/kg K
p_{01}=100 kPa
T_{01}=20 ^{0} C
$\boldsymbol{\dot{m} = 2.5 kg/s}$
pales radiales


Gare du Turbojet
TURBOMACHINES