DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
LABORATOIRE I

Directives : *Cette séance de laboratoire vous permettra de vous familiariser avec les commandes de base de* MATLAB*, la programmation et les fonctionnalités graphiques de ce logiciel. Nous vous invitons fortement à lire le guide d'introduction à* MATLAB*, disponible sur le site Internet du cours, avant de tenter de faire ces exercices. Vous devez faire les 8 exercices et remettre la version PDF de votre rapport sur Moodle avant le début de votre séance de TD du jeudi 25 janvier. Rédigez et présentez votre rapport en utilisant la fonction* `publish` *de* MATLAB*. Voir le fichier* `RapportLab1.m`*. Les directives pour la rédaction et la remise des rapports de laboratoires sont disponibles sur le site Moodle.*
Les étudiants et étudiantes qui ont suivi le cours INF1007D peuvent faire ce laboratoire en langage Python. Cette séance vous permettra de vous mettre à niveau. Vous trouverez sur le site Moodle, le lien pour télécharger le gabarit (notebook Jupyter) à utiliser pour rédiger et présenter vos rapports de laboratoires. Ce gabarit donne aussi les équivalences en langage Python des commandes et fonctions Matlab utilisées dans ce document.

1. Soit le vecteur donné par la commande MATLAB

   ```
   err =[0.5671; 0.4328; 0.4555e-01; 0.3305e-02; 0.2707e-04; 0.1660e-7];
   ```

   On désire calculer les valeurs des ratios

   $$\left|\frac{err_{n+1}}{err_n}\right|, \quad \left|\frac{err_{n+1}}{err_n^{\alpha}}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{err_{n+1}}{err_n^{2}}\right|,$$

   où err_n la nième composante du vecteur e et $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   Utiliser l'opérateur `:` pour extraire 2 sous vecteurs du vecteur err et calculer les valeurs des 3 ratios à l'aide des opérateurs `./` et `.^` . **Ne pas utiliser de boucle `for` ou `while`** .
   Présenter les résultats dans un tableau de trois colonnes à l'aide de la commande `fprintf`.
   Le rapport doit contenir : le programme et le tableau produit par ce programme.

2. Soit le développement de Taylor de la fonction $\arctan(x)$ autour de $x_0 = 0$:

   $$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \ldots$$

   (a) Après avoir identifié les polynômes de Taylor $P_n(x)$ de degré $n = 1$, $n = 3$ et $n = 5$, tracer sur un même graphique, sur l'intervalle $[-1\,,\,1]$, la fonction $\arctan(x)$ et ces trois polynômes de Taylor.

   (b) Tracer sur un autre graphique, sur l'intervalle $[-1\,,\,1]$, les fonctions erreur

   $$e_n(x) = |\arctan(x) - P_n(x)|, \qquad n = 1, 3, 5.$$

   Commenter et expliquer les résultats obtenus.
   Le rapport doit contenir : le programme, les graphes produits par ce programme et la discussion.

3. L'objectif de cette question est de mieux comprendre les notions d'erreurs absolue et relative. Il existe une approximation bien connue du factoriel,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n,$$

trouvée par Stirling :

$$S_n = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Écrire un programme qui permet de réaliser les instructions suivantes :

(a) Construire un vecteur, `factoriel`, contenant les nombres

$$1!,\, 2!,\, 3!, \ldots, 13!.$$

Indice : Utiliser les fonctions MATLAB `factorial` *ou* `prod`*.*

(b) Construire un vecteur, `stirling`, contenant les nombres

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{13}.$$

Indice : Utiliser les opérateurs `.*` *et* `.^`

(c) Pour $n = 1, 2, \ldots, 13$, construire deux vecteurs contenant respectivement les erreurs absolues $|n! - S_n|$ et relatives $|n! - S_n|/n!$.
Indice : Utiliser l'opérateur `./`

(d) Présenter à l'aide de la commande `fprintf` les résultats dans un tableau de trois colonnes comportant les valeurs de n et des erreurs absolue et relative.

Commenter sur la qualité de l'approximation (l'importance de l'erreur) en fonction de n.

Le rapport doit contenir : le programme, le tableau produit par ce programme et la discussion.

4. Nous parlerons du *nombre d'or*, qui est défini par $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}61803$, lorsque nous étudierons la méthode de la sécante. Il y a plusieurs algorithmes qui nous permettent de calculer ce nombre. Programmons-en un :

La suite de Fibonacci est définie par $F_1 = 0$ et $F_2 = 1$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{pour } n = 3, 4, 5, \ldots$$

On peut montrer que le rapport $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ lorsque $n \to \infty$. Écrire un programme qui vous permettra de déterminer la valeur de n à partir de laquelle le rapport $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ donne une approximation du nombre d'or avec **au moins** 6 chiffres significatifs.

Le rapport doit contenir : le programme et la la valeur de n obtenue par ce programme.

5. Le coefficient de trainée d'une particule sphérique est donné par

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{Re} & \text{si} \quad Re < 0{,}1 \\[2ex] \frac{24}{Re}\left(1 + 0{,}15 Re^{0{,}687}\right) & \text{si} \quad 0{,}1 \le Re < 800 \\[2ex] 0{,}44 & \text{si} \quad Re \ge 800, \end{cases}$$

où Re est le nombre de Reynolds.

(a) Écrire une fonction qui permet de calculer le coefficient de trainée C_D pour un nombre de Reynolds Re donné. Assurez-vous que votre fonction puisse prendre des vecteurs comme argument d'entrée.
La fonction `find` de MATLAB *pourrait être utile.*

(b) En vous servant de la fonction développée en (i), tracer le graphe du coefficient de trainée en fonction du nombre de Reynolds sur l'intervalle $[10\,,\,1000]$.

Le rapport doit contenir : le fichier de la fonction développée à la question (a) ; le programme et le graphe produit par ce programme à la question (b).

6. Soit la fonction
$$f(x) = \frac{1}{((1-x^2)^2 + \lambda x^2)^{\frac{1}{2}}},$$
où λ est un paramètre réel.

(a) Pour λ donné, écrire une fonction dont le seul argument d'entrée sera x et qui calculera $f(x)$. Assurez-vous que votre fonction puisse prendre des vecteurs comme argument d'entrée.
Utiliser la commande `global` de MATLAB *pour transférer la valeur du paramètre λ à votre fonction.*

(b) En vous servant de la fonction développée en (a), tracer pour les valeurs du paramètre $\lambda = 0{,}015625$; $\lambda = 0{,}1$; $\lambda = 0{,}5$, les graphes de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[\frac{1}{10}\,,\,2]$. Identifier clairement les 3 courbes.

Le rapport doit contenir : le fichier de la fonction développée à la question (a), le programme et le graphe produit par ce programme à la question (b).

7. Nous cherchons un algorithme pour estimer la valeur de π. Une méthode est basée sur le fait que le périmètre d'un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ est π. Pour estimer la valeur de π, il suffit alors d'estimer le périmètre d'un cercle de rayon $\frac{1}{2}$. L'idée est donc d'inscrire des polygones réguliers dans le cercle et de calculer le périmètre du polygone.

En augmentant le nombre de côtés du polygone, on s'approche de plus en plus du périmètre du cercle et donc de π. Nous noterons p_n le périmètre du polygone ayant 2^n côtés (par exemple, $p_2 = 2\sqrt{2}$) et on assumera que la formule de récurrence suivante est vraie :

$$p_{n+1} = 2^n \sqrt{2\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{p_n}{2^n}\right)^2}\right)}, \quad \text{pour} \quad n = 2,\ 3,\ \ldots \tag{1}$$

(a) Écrire un programme qui calculera p_n pour $n = 3,\ 4,\ \ldots,\ 30$ en utilisant l'algorithme (1). Le programme devra présenter à l'aide de la commande `fprintf` les résultats dans un tableau de trois colonnes comportant les valeurs de n, p_n ainsi que l'erreur absolue commise.

(b) En utilisant les résultats obtenus en (a), donner le nombre de chiffres significatifs de p_{15} et p_{24}. Justifier vos réponses.

(c) Commenter les résultats obtenus et expliquer toute anomalie.

Le rapport doit contenir : le programme, le tableau, le nombre de chiffres significatifs de p_{15} et p_{24} produits par ce programme et la discussion.

8. On peut aussi utiliser une méthode aléatoire pour estimer la valeur de π. En effet, en utilisant cette fois un cercle de rayon 1, on constate que ce cercle est lui-même inscrit dans un carré de côté 2. L'aire de ce cercle est π. Si on lance au hasard une fléchette dans le carré, la probabilité p de toucher le cercle est simplement

$$p = \frac{\text{aire du cercle}}{\text{aire du carré}} = \frac{\text{aire du cercle}}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Cette probabilité peut aussi s'exprimer par une expérience aléatoire. Si on lance n fléchettes dans le carré, on aura :

$$p \simeq \frac{\text{nombre de fléchettes dans le cercle}}{n}$$

de sorte que

$$\pi \simeq 4p \simeq 4 \times \frac{\text{nombre de fléchettes dans le cercle}}{n}. \tag{2}$$

(a) Écrire un programme MATLAB qui réalisera cette expérience. Utiliser la fonction MATLAB `rand` qui génère un nombre aléatoire entre 0 et 1. La commande MATLAB « `2*rand(1,1)-1` » donne un nombre aléatoire dans l'intervalle $[-1\ ,\ 1]$. En appelant la fonction deux fois, vous générez les coordonnées $(x_i\ ,\ y_i)$ d'un lancer de fléchette. Estimer ainsi la valeur de π à l'aide de l'équation (2) pour $n = 50, 500, 5000, 50000$ et 500000. Le programme devra présenter à l'aide de la commande `fprintf` les résultats dans un tableau de trois colonnes comportant les valeurs de n, des approximations de π ainsi que les erreurs absolues commises.
Note : Comme la fonction MATLAB `rand` génère un nombre aléatoire, les données devraient changer si vous répétez l'exercice.

(b) Est-ce que cet algorithme est satisfaisant ? Justifier votre réponse.

Le rapport doit contenir : le programme, le tableau à la question (a); la discussion à la question (b).

Donatien N'Dri & Steven Dufour