

Thermodynamique

Frederick Soddy



Les lois de la thermodynamique contrôlent la montée et la chute des systèmes politiques, la liberté ou la soumission des peuples, les mouvements de l'industrie et du commerce, les origines de la richesse et de la pauvreté, et le bien-être de la race humaine.

FREDERICK SODDY
(Prix Nobel 1921)

Premier et second principes

Le premier principe concerne le **caractère conservatif** de l'énergie

Le second principe regarde **la qualité** de l'énergie

La Mafia de la Thermo

- **Première loi:** On ne peut pas gagner (on ne peut pas obtenir plus de ce qu'on investit)
- **Deuxième loi:** On ne peut pas sortir kif-kif (on ne peut pas récupérer tout ce qu'on investit)
- **Troisième loi:** On ne peut pas quitter le jeu! (L'entropie augmente tout le temps!)



Question ?

Quel est le travail maximal que je peux produire?

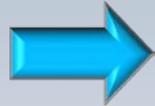


Cycle: premier principe $\Delta U = Q - W$

$$U_I = U_F$$

Puisque les états I et F sont identiques,
l'énergie interne U est la même

$$\Delta U = 0$$



$$\Delta U = Q - W$$

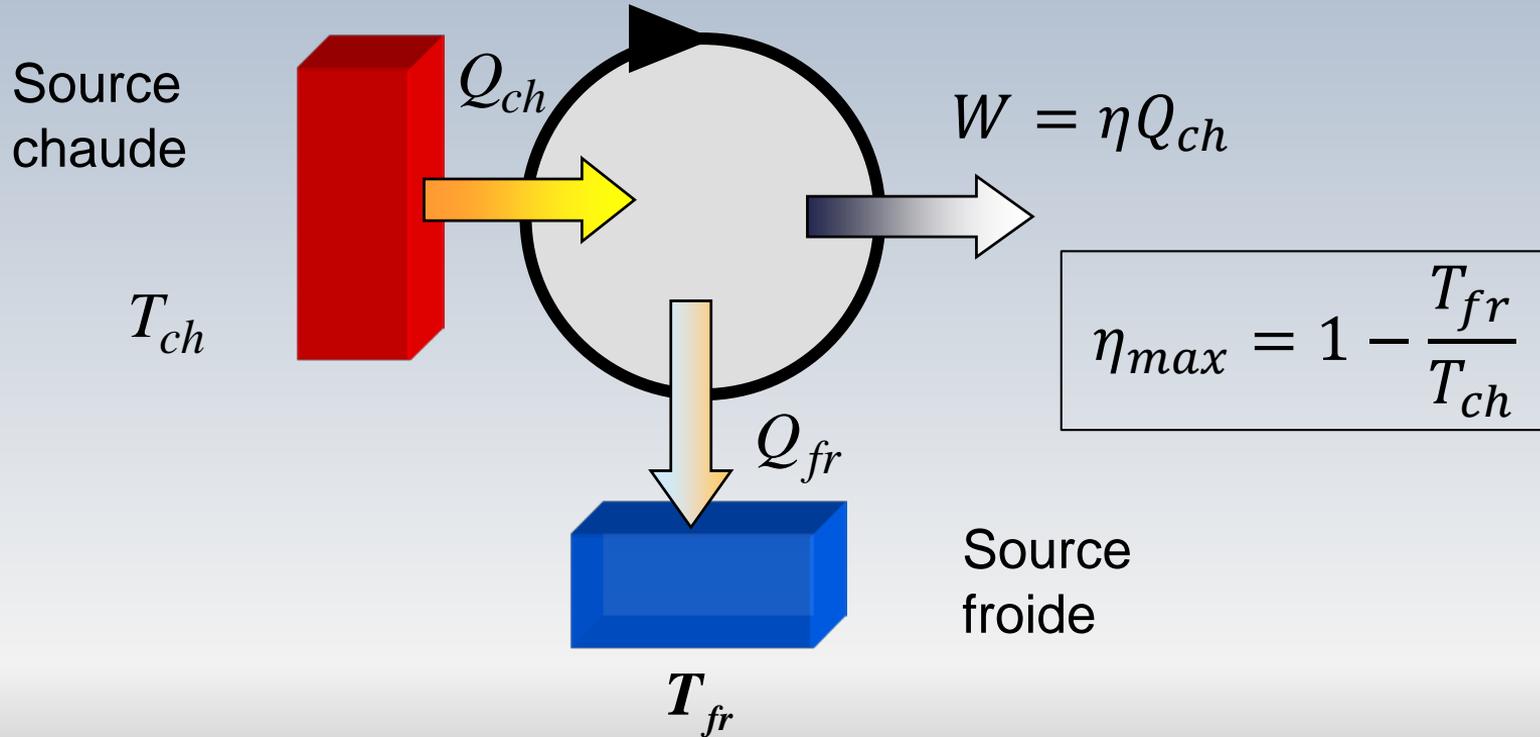


$$Q = W$$

On ne peut
pas gagner

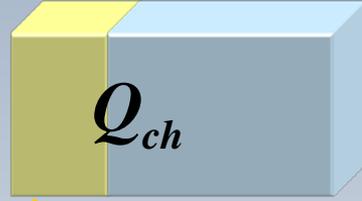


Cycle: second principe



Alors...

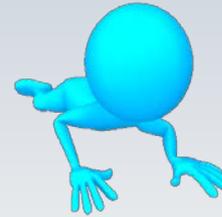
On ne peut pas récupérer tout ce qu'on a investi



Convertible

Non convertible

$$W \leq \left(1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}} \right) Q_{ch}$$



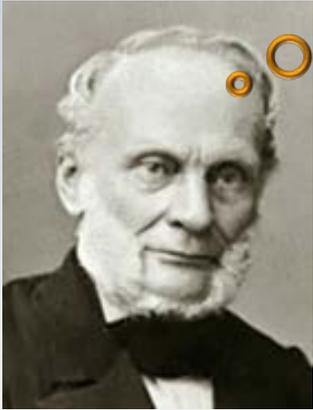
Énergie utile

Énergie dégradée



Rudolf Clausius: 1865

L'entropie mesure la dégradation de la qualité de l'énergie. Elle ne peut que croître au cours du temps



BIBLIOTHÈQUE DES PROFESSIONS INDUSTRIELLES ET AGRICOLES
SÉRIE B, N° 2.

THÉORIE MÉCANIQUE

DE

LA CHALEUR

PAR

R. CLAUDIUS

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE WURZBOURG
CORRESPONDANT DE L'INSTITUT

Traduite de l'allemand

PAR F. FOLIE

Docteur ès sciences, professeur à l'École industrielle et Répétiteur
à l'École des Mines de Liège.

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE, INDUSTRIELLE ET AGRICOLE

EUGÈNE LACROIX, ÉDITEUR

LIBRAIRE DE LA SOCIÉTÉ DES INGÉNIEURS CIVILS

QUAI MALAQUAIS

1868

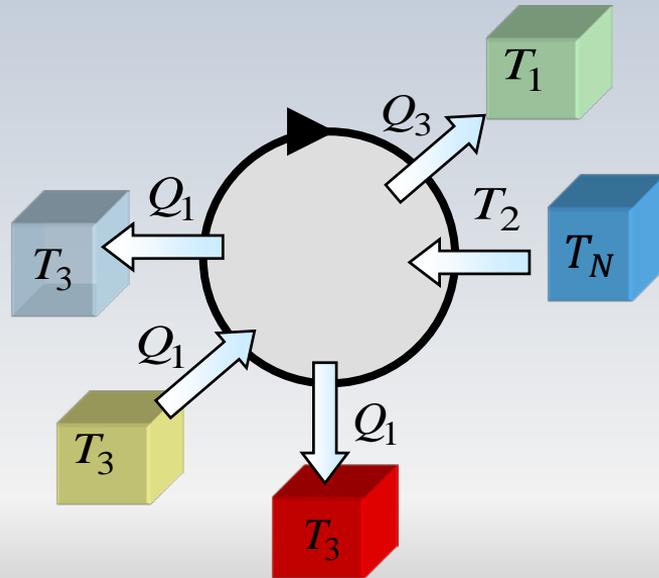


L'inégalité de Clausius

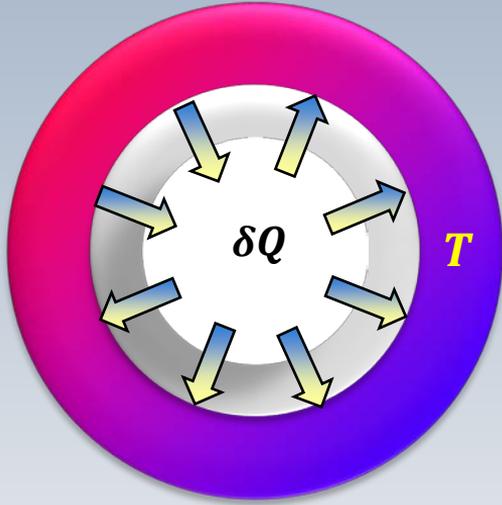
Rudolf Clausius a trouvé qu'un système fermé étant mis en contact avec des sources de chaleur de température T_i avec des échanges de chaleur Q_i vérifie

$$\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

Inégalité de Clausius



Systeme continu



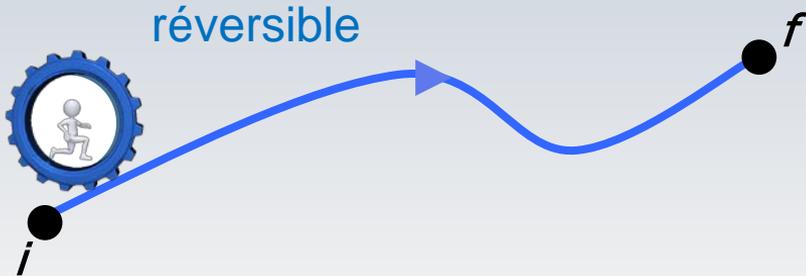
Pour un système continu l'inégalité de Clausius devient

$$\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} \rightarrow \oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$



La notion d'entropie

L'intégrale $\int_i^f \frac{\delta Q_{\text{rév}}}{T}$ entre un état initial i et un état final f est indépendante du chemin suivi. Cette quantité correspond à la variation d'entropie, notée par le symbole Δs .



$$\Delta S = S_f - S_i = \int_i^f \frac{\delta Q_{\text{rév}}}{T}$$

Remarque

Pour un processus irréversible, (réel) l'expression suivante **ne correspond pas à la variation d'entropie**

$$\Delta S = S(f) - S(i) \neq \int_i^f \frac{\delta Q_{irr}}{T}$$



Croissance de l'entropie

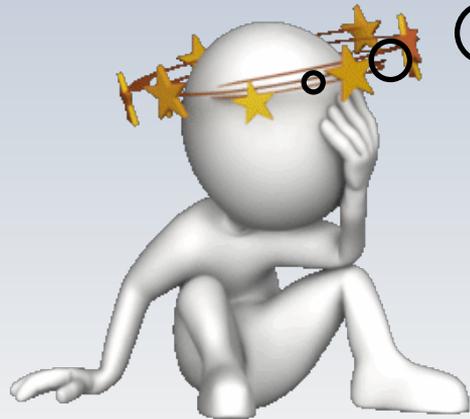
L'inégalité fondamentale de Clausius $\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$ permet d'établir que l'entropie est une quantité qui augmente tout le temps.

$$S_2 \geq S_1$$

L'entropie augmente tout le temps!

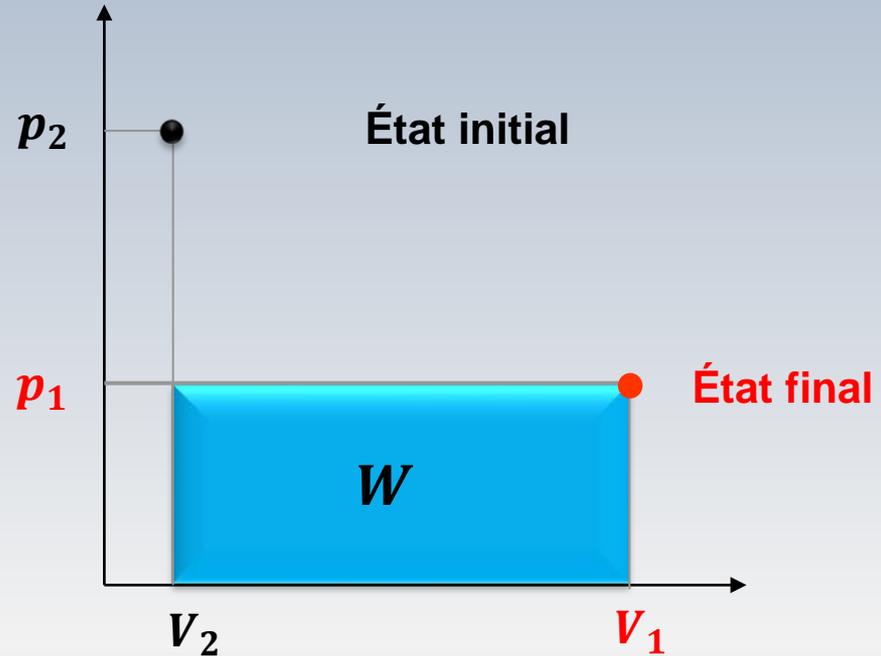
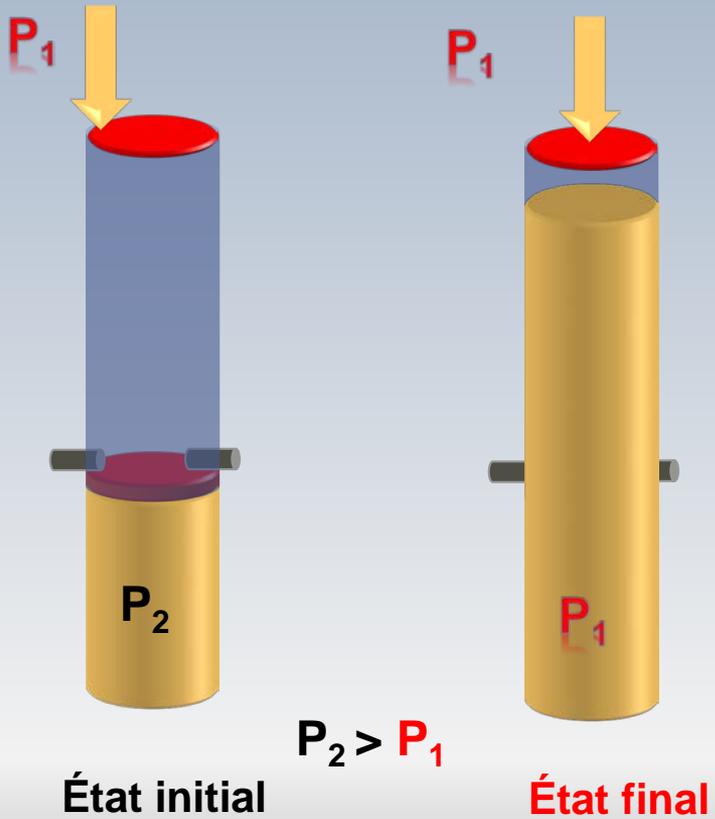


Notions abstraites?

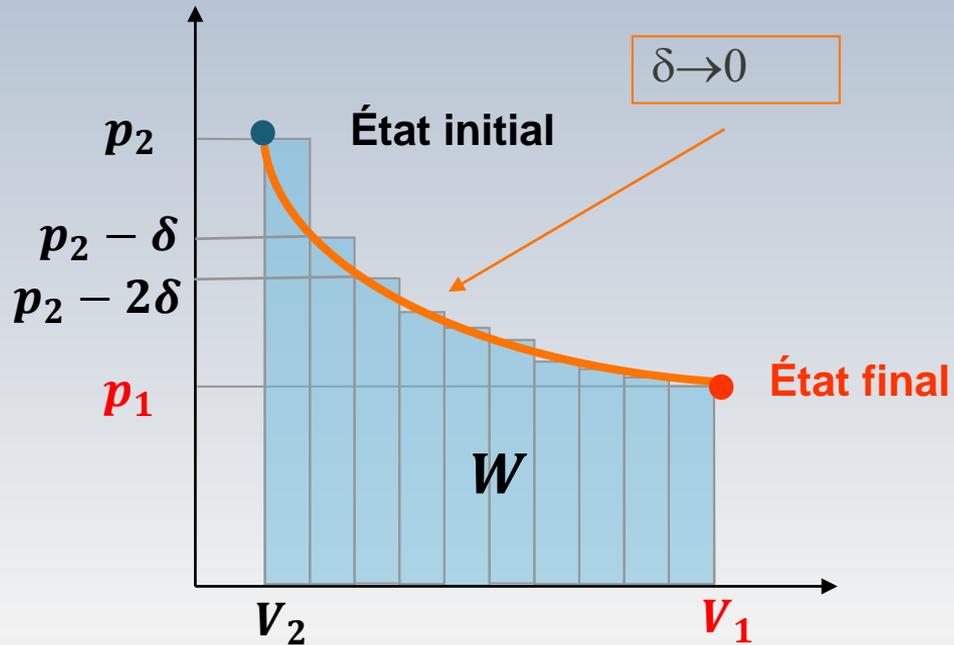
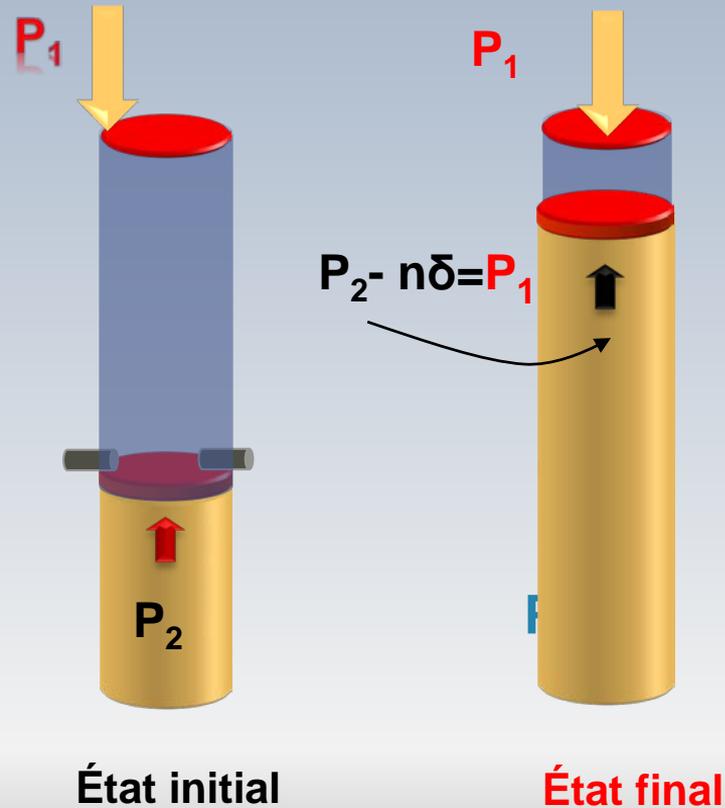


Réversible,
Irréversible
Entropie ?

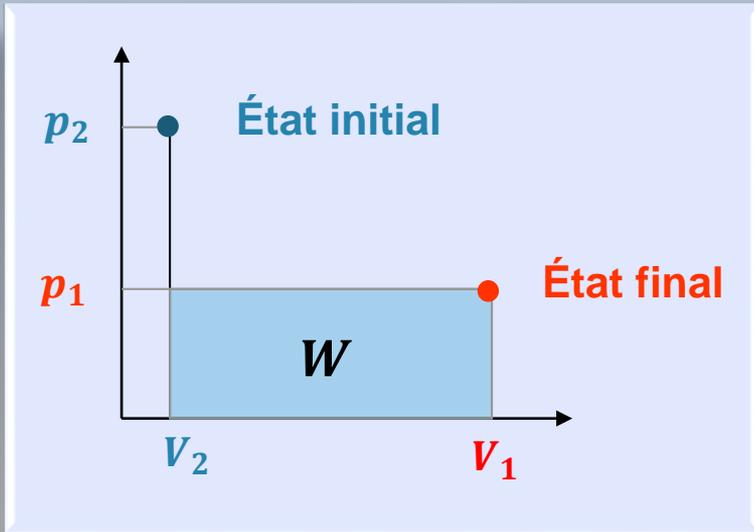
Transformation irréversible



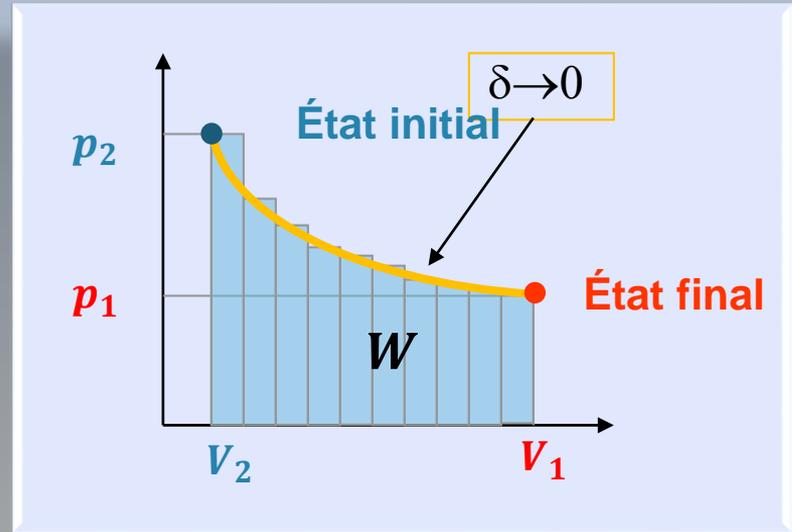
Transformation réversible



Réelle et idéale



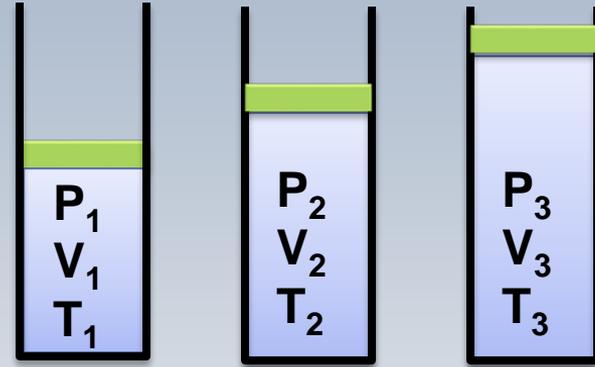
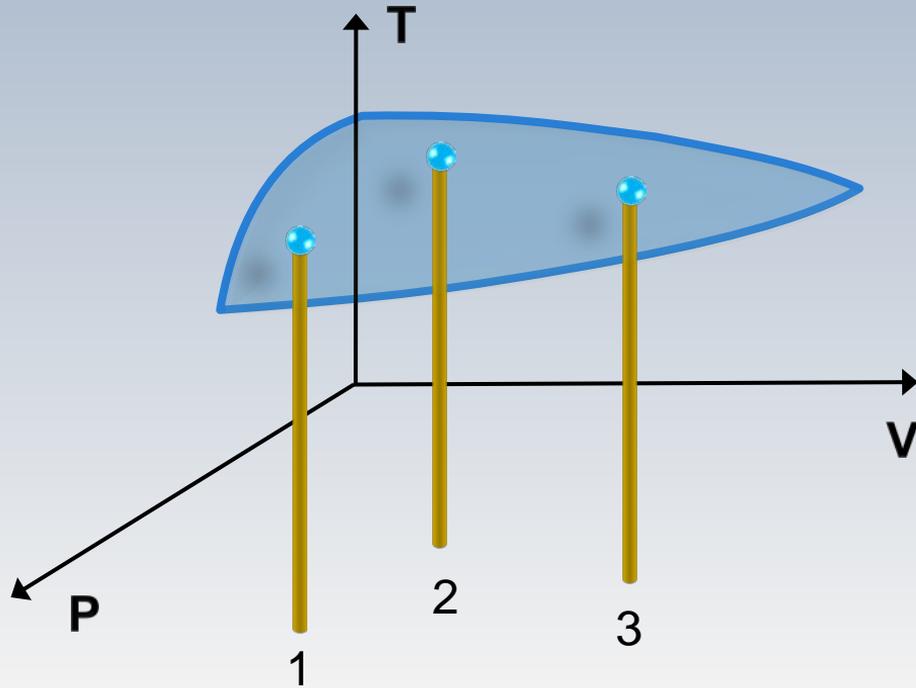
Irréversible



Réversible

La **qualité** de la transformation est différente: le **travail W produit est maximal** pour une transformation **réversible**!

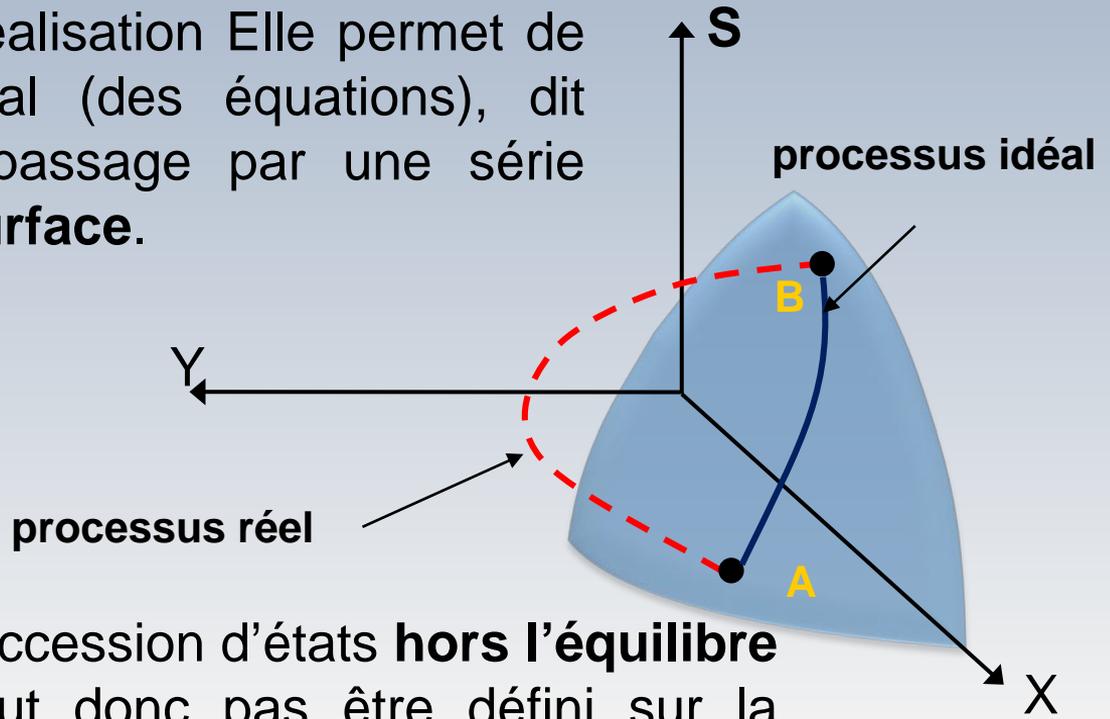
Surface d'état



On imagine qu'un ensemble de points à l'équilibre se trouvent sur une même surface, dite d'état, dans "l'univers 3D thermodynamique"

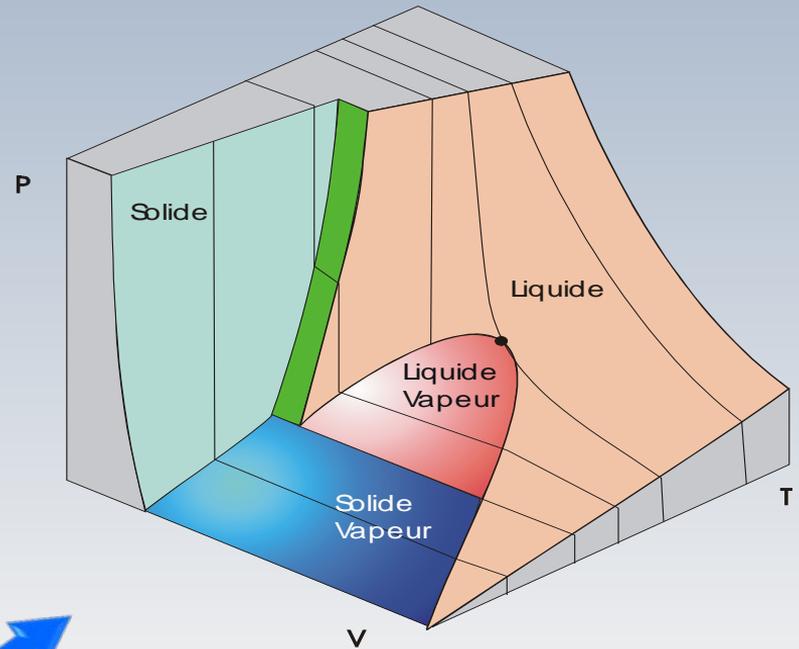
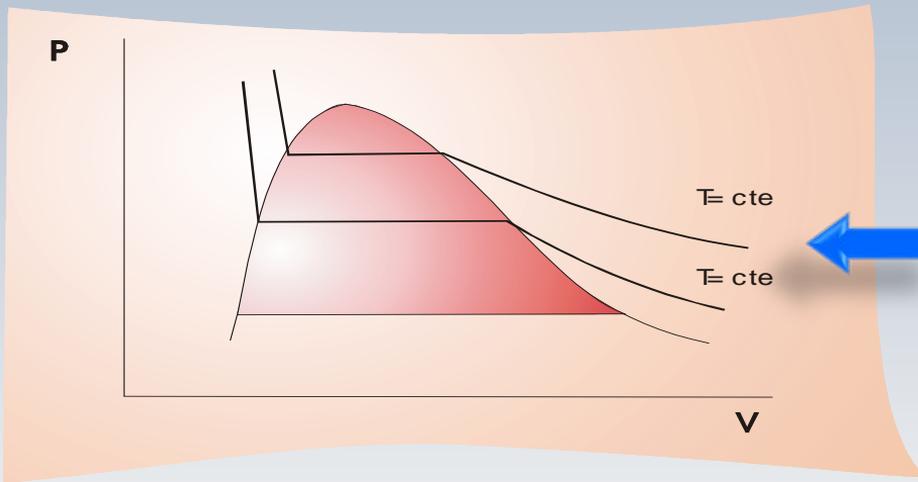
Processus réel

La **surface d'état** est une idéalisation Elle permet de concevoir un processus idéal (des équations), dit quasi-statique, décrivant le passage par une série d'états d'équilibre **sur cette surface**.

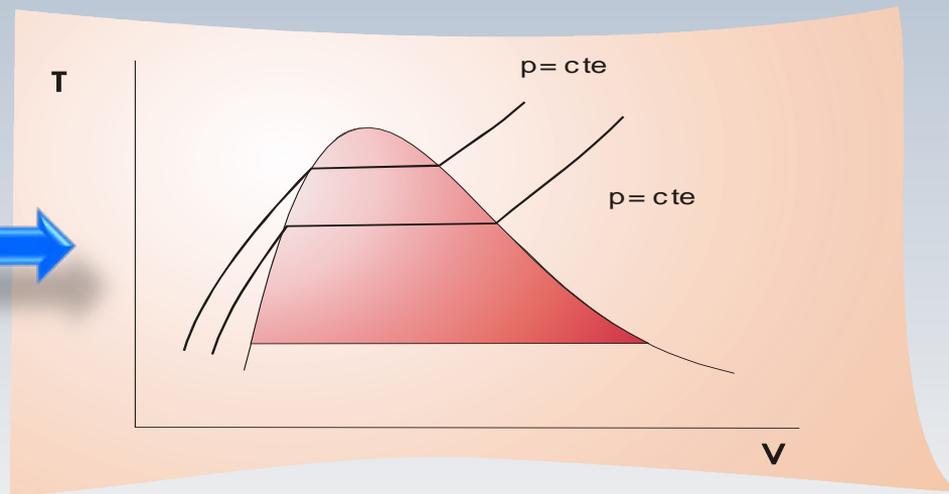
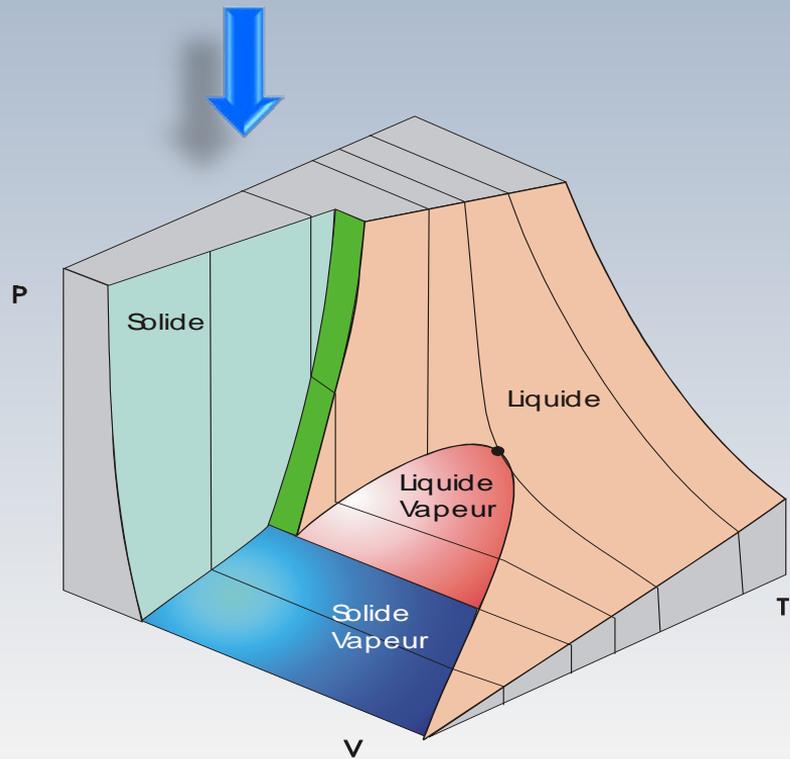


Un **processus réel** est une succession d'états **hors l'équilibre thermodynamique**. Il ne peut donc pas être défini sur la surface d'état

Surface d'état P-V-T



Surface d'état P-V-T



Écoulements compressibles

Définition	Relation	Gaz Parfait
Relation pression-densité-température	$p = f(\rho, T)$	$p = \rho RT$
Énergie interne par unité de masse	\hat{u}	$\hat{u}(T)$
Enthalpie par unité de masse	$h = \hat{u} + p/\rho$	$h = \hat{u} + RT$
Chaleur spécifique à volume constant	$c_v = \left. \frac{\partial \hat{u}}{\partial T} \right _v$	$c_v = \frac{d\hat{u}}{dT}$
Chaleur spécifique à pression constante	$c_p = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right _p$	$c_p = \frac{dh}{dT} = \frac{d\hat{u}}{dT} + R$ $c_p - c_v = R$
Volume spécifique	$\frac{1}{\rho}$	

$$R = c_p - c_v$$

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

Propriétés pour l'air $k = 1.4$

R	c_v	c_p
$1716 \frac{ft^2}{s^2 \cdot ^\circ R}$	$4293 \frac{ft^2}{s^2 \cdot ^\circ R}$	$6009 \frac{ft^2}{s^2 \cdot ^\circ R}$
$287 \frac{m^2}{s^2 K}$	$718 \frac{m^2}{s^2 K}$	$1005 \frac{m^2}{s^2 K}$

$$\widehat{u}_2 - \widehat{u}_1 = c_v (T_2 - T_1)$$

$$h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1)$$

Variation d'énergie interne et d'enthalpie d'un gaz parfait à chaleur spécifique constante

Pour un gaz parfait, **la variation d'entropie** entre deux états ① et ② peut être calculée par:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

$$c_p = \text{cnste}$$

ou encore

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right)$$

$$c_p = \text{cnste}$$

Processus **isentropique**

$$s_1 = s_2,$$

$$c_p = \text{cnste.}$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cnste}$$



Grandeur d'arrêt, totale, de stagnation

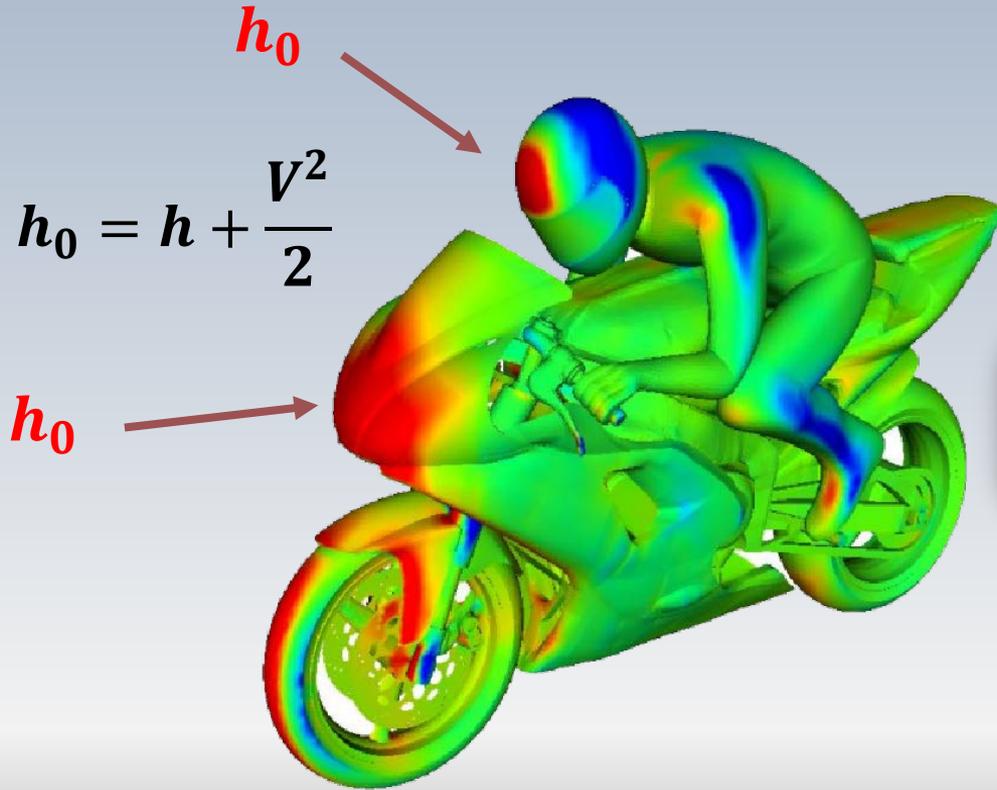
$$h_0 = h + \frac{v^2}{2}$$

L'enthalpie totale se conserve **même** si l'écoulement est **irréversible!**

Cette combinaison peut être aussi être interprétée comme l'état qui prendrait l'enthalpie de l'écoulement si on l'amenait au repos de manière adiabatique

On parle alors de **grandeur d'arrêt ou de stagnation**

Enthalpie totale



Au cours du processus d'arrêt,
l'énergie cinétique est convertie
en enthalpie!



À partir de l'enthalpie totale $h_0 = h + V^2/2$, on peut trouver la **température totale**

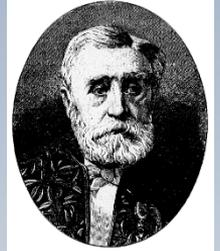
$$\int_h^{h_0} dh = \int_T^{T_0} c_p dT \quad (c_p = \text{cnste}) \quad \Rightarrow \quad h_0 - h = c_p(T_0 - T)$$

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}$$

La température totale d'arrêt ou de stagnation T_0 est conservée pour tout écoulement adiabatique

Température totale et nombre de Mach

Au 19^{ème} siècle, *de Saint Venant* a introduit une formule qui relie la température adimensionnelle T_0/T au nombre de Mach



Jean Claude Barré
de Saint-Venant
1797-1886

$$Ma = \frac{V}{a}$$

$$a = \sqrt{\gamma RT}$$

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$



$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}$$



$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2$$

Équation de Saint-Venant

Température totale et nombre de Mach

L'utilisation des relations pour un **écoulement isentropique** avec la relation de Saint-Venant, permet d'écrire

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} Ma^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{T_0}{T} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{k-1} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{k-1/k}$$



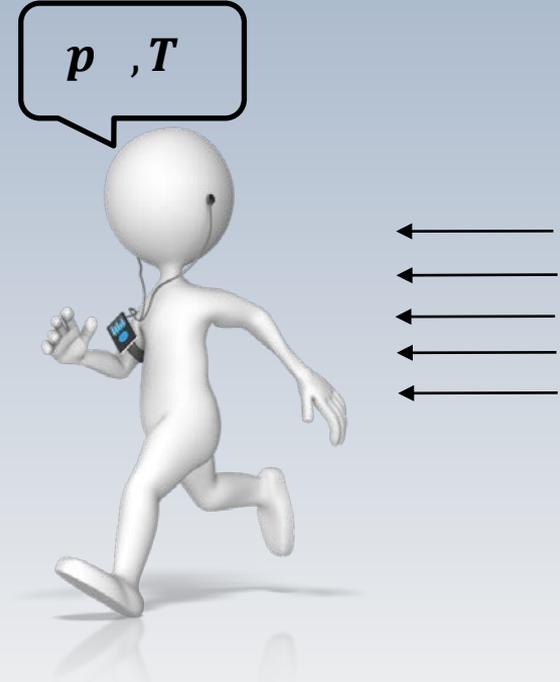
$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2 \right)^{k/k-1}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2 \right)^{1/k-1}$$

$$\left[1 + \frac{k-1}{2} Ma^2 \right] = \frac{T_0}{T} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{k-1} = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{k-1/k}$$

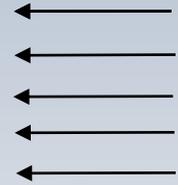
Formule ``trois pour un''

Conditions statiques p, ρ, T



Les conditions **statiques** correspondent à celles qu'on enregistrerait si on se déplaçait à la même vitesse que l'écoulement

Conditions totales p_0 , ρ_0 , T_0



Les conditions **totales** correspondent à celles qu'on enregistrerait si on arrêtait complètement l'écoulement

Conditions critiques (M=1)

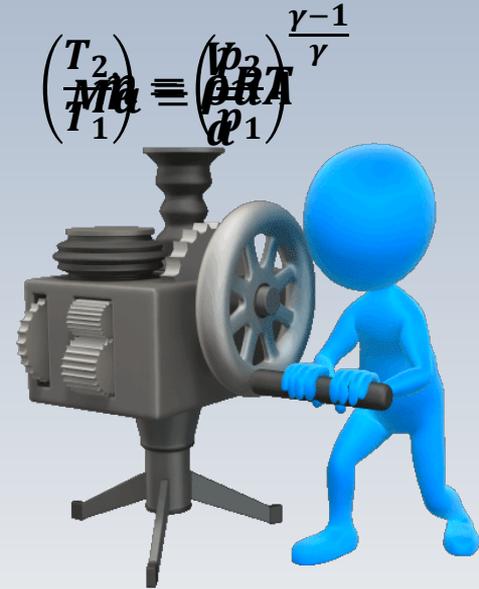
Par définition, les **quantités critiques** correspondent à un point de l'écoulement où la vitesse est sonique, soit **lorsque** $Ma = 1$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\gamma/\gamma-1} \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{1/\gamma-1} \quad \frac{T^*}{T_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right) \quad \frac{a^*}{a_0} = \sqrt{\frac{T^*}{T_0}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}$$

Pour l'air avec $\gamma=1.4$ on a

$$\frac{p^*}{p_0} = 0.5275, \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = 0.6343, \quad \frac{T^*}{T_0} = 0.8316, \quad \frac{a^*}{a_0} = 0.9119$$

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0A} = Ma\sqrt{\gamma} \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$



Le débit massique \dot{m} est une fonction du nombre de Mach

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0A} = Ma\sqrt{\gamma} \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$



Connaissant le nombre de Mach, on peut trouver facilement le débit massique. Par contre, si l'on connaît le débit massique, il faut résoudre une équation non linéaire pour trouver le nombre de Mach



Le diagramme h-s

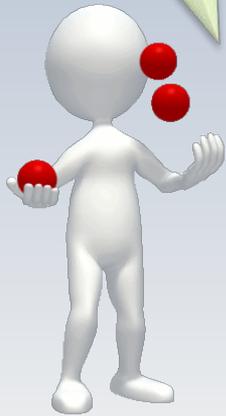
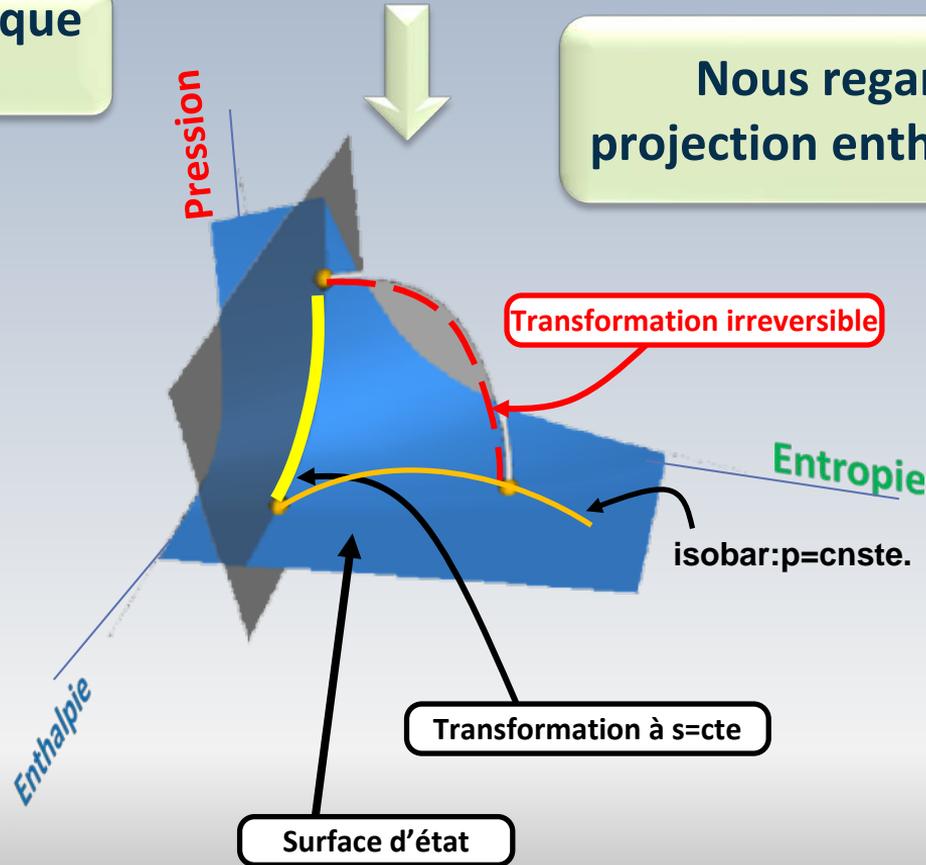
Le diagramme h-s

- **Le diagramme h-s (enthalpie-entropie)** est très utilisé pour représenter les transformations dans les turbomachines.
- Dans ce plan on peut analyser, comparer et visualiser plus facilement les variations d'enthalpie, réelle et idéale, décrites dans l'espace thermodynamique enthalpie (h), entropie (s) pression (p)

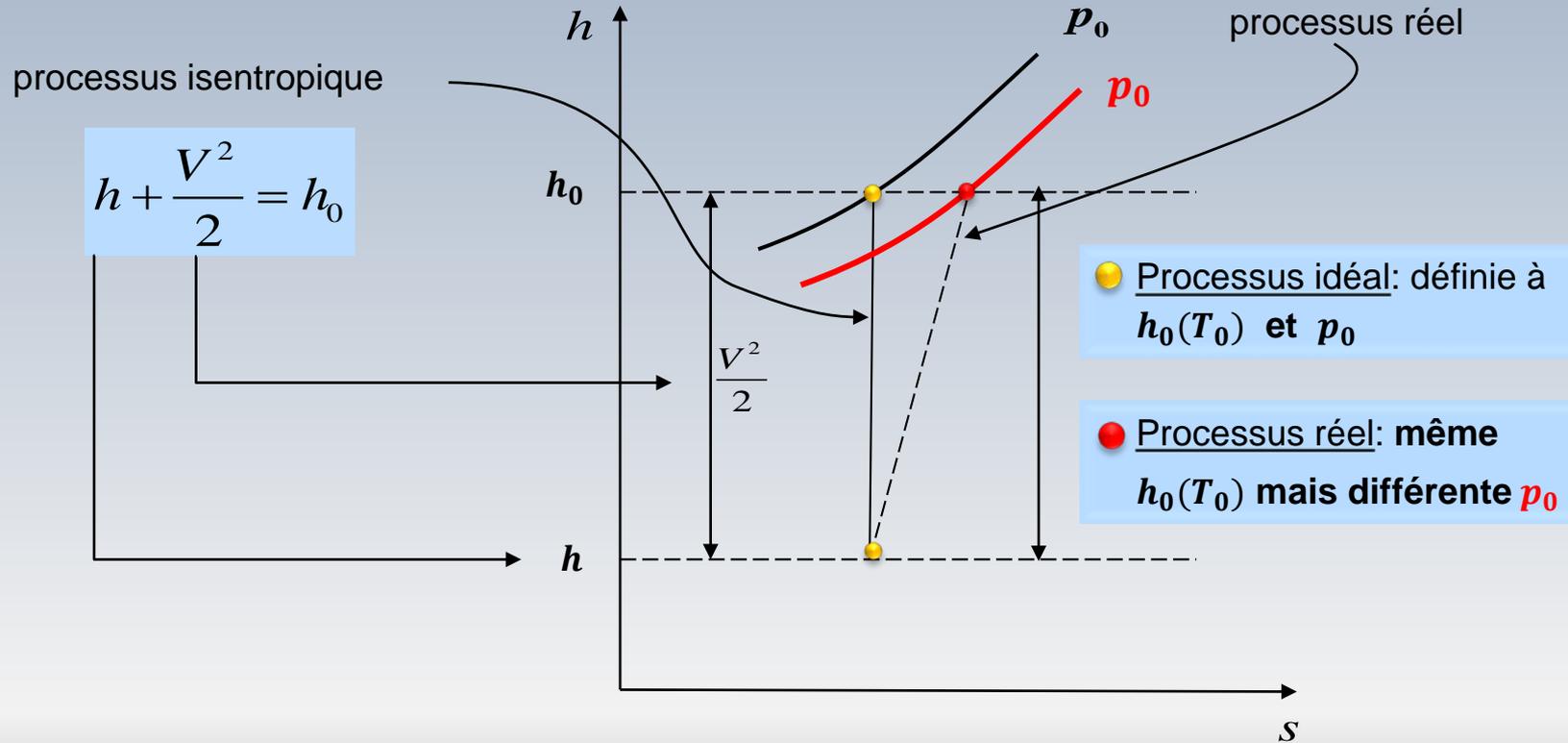
L'espace h,s,p

La thermodynamique est 3D

Nous regarderons la projection enthalpie-entropie



Processus: isentropique/réel



Rendement isentropique

Turbine

$$\eta_s = \frac{\text{travail disponible dans l'arbre}}{\text{énergie théorique du fluide}} = \frac{W_r}{W_s}$$

Compresseur

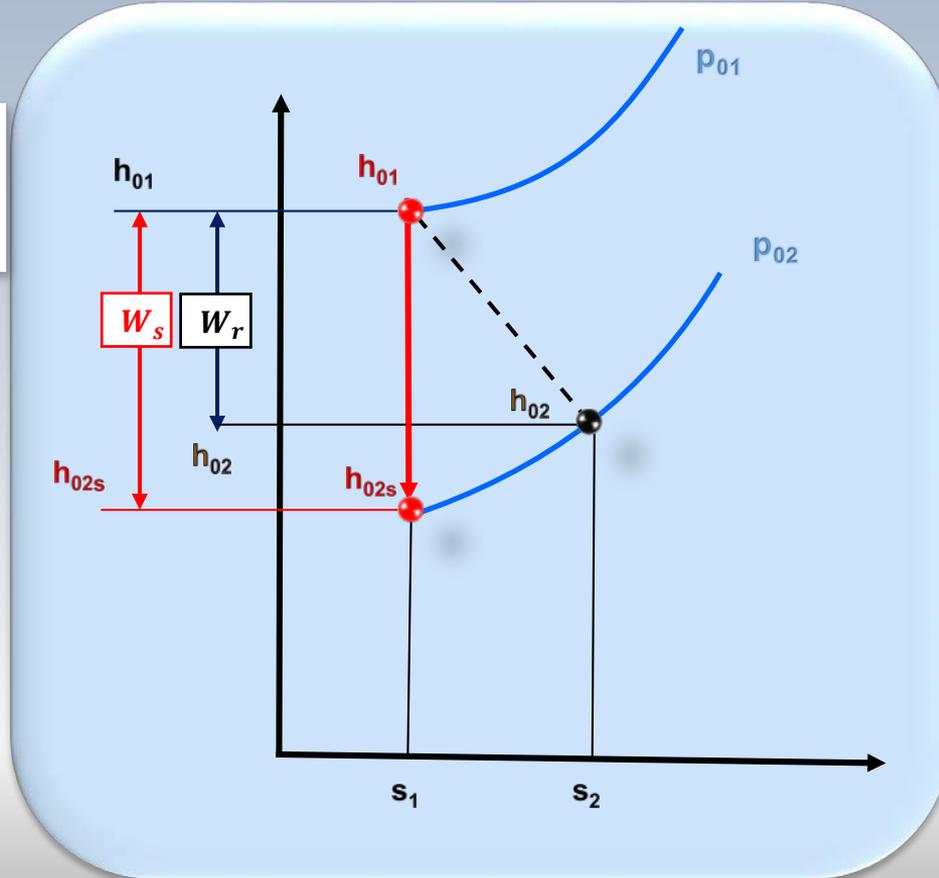
$$\eta_s = \frac{\text{énergie du fluide}}{\text{énergie fourni par l'arbre}} = \frac{W_s}{W_r}$$

Turbine: rendement total à total

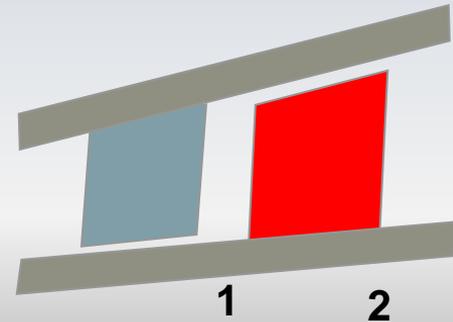
$$W_r = h_{01} - h_{02}$$

$$W_s = h_{01} - h_{02s}$$

$$W_r < W_s$$



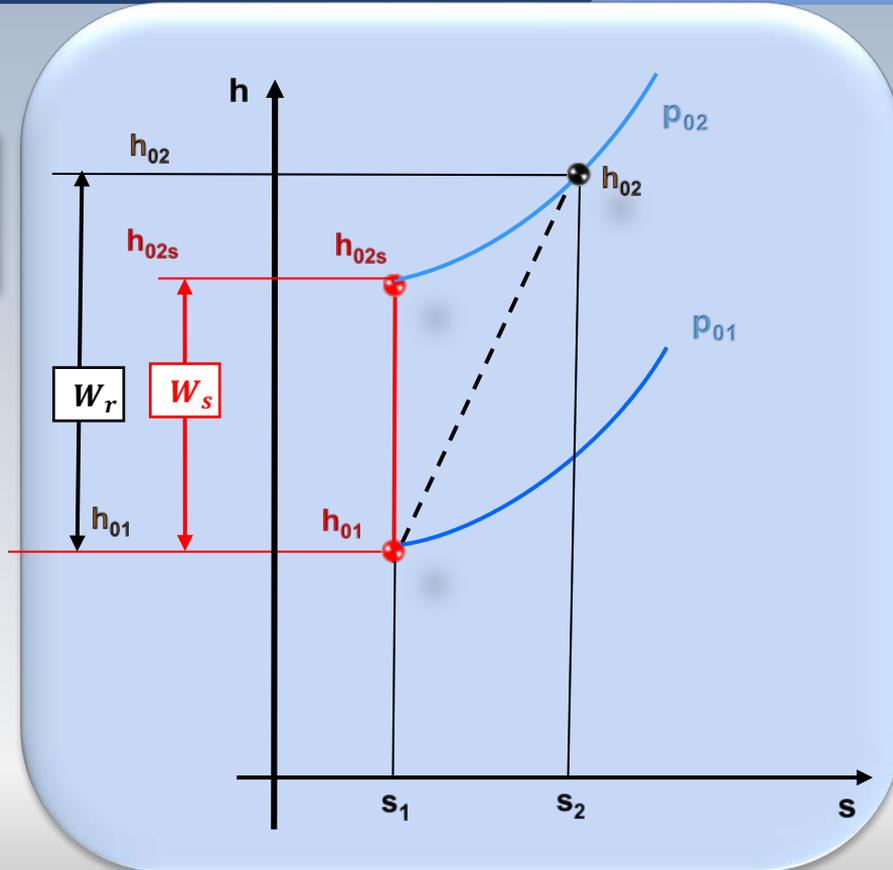
$$\eta_{ttT} = \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{02s}}$$



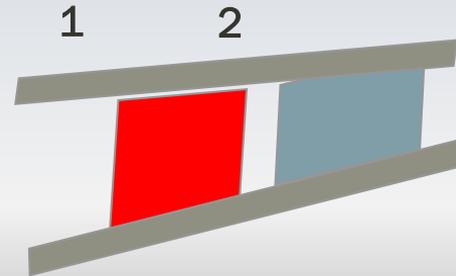
Compresseur: rendement total à total

$$W_s = h_{02s} - h_{01}$$
$$W_r = h_{02} - h_{01}$$

$$W_r > W_s$$



$$\eta_{ttC} = \frac{h_{02s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}}$$



Synthèse de formules

Rendement Turbine

$$\eta_{ttT} = \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{02s}}$$

Débit massique

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0A} = Ma\sqrt{\gamma} \left[1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2 \right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Rend. compresseur

$$\eta_{ttC} = \frac{h_{02s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}}$$

Écoulement isentropique

$$\left[1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2 \right] = \frac{T_0}{T} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\gamma-1/\gamma}$$

Température Totale

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}$$

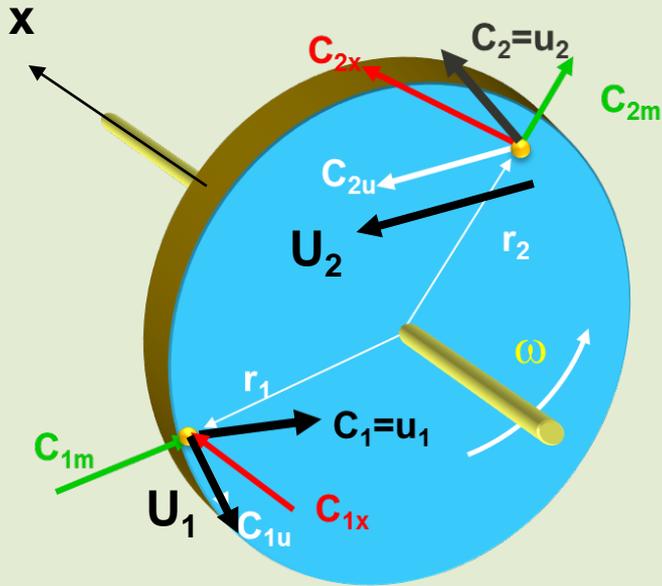
Processus isentropique

$$\left(\frac{T_2}{T_1} \right)_{s=const.} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Gaz parfait

$$p = \rho RT$$

Équations 1D à l'état stationnaire



$$\dot{W} = \dot{m}(c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1)$$

$$(h_{02} - h_{01}) = (c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1)$$

$$\dot{m} = \rho_1 c_{1x} A_1 = \rho_2 c_{2x} A_2$$

Rendement polytrophique

Rendement polytropique

De manière similaire au processus isentropique, donné par la relation $pv^\gamma = cnste$, on peut prétendre qu'une transformation réelle s'effectue suivant l'équation $pv^n = cnste$. avec n un coefficient déterminé par la transformation. Une telle transformation est appelée **polytropique**

Rendement polytropique

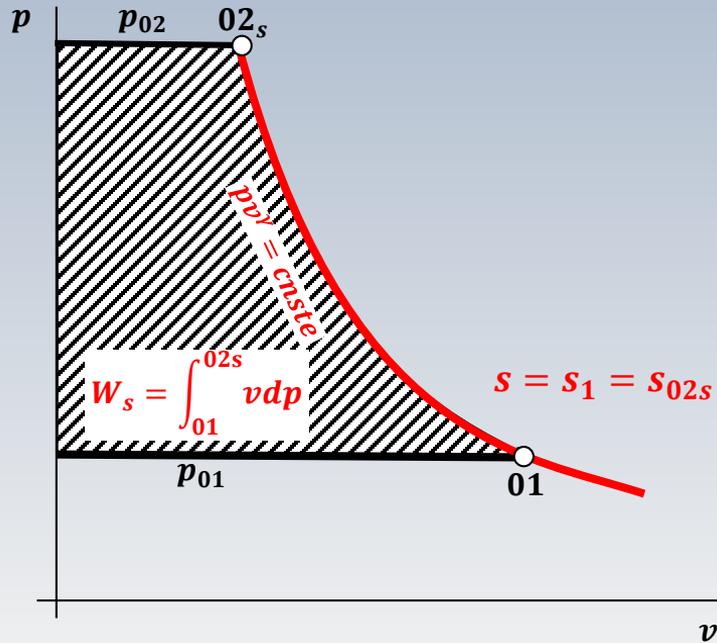
$$pv^\gamma = \text{cnste}$$

Isentropique

$$pv^n = \text{cnste}$$

Polytropique

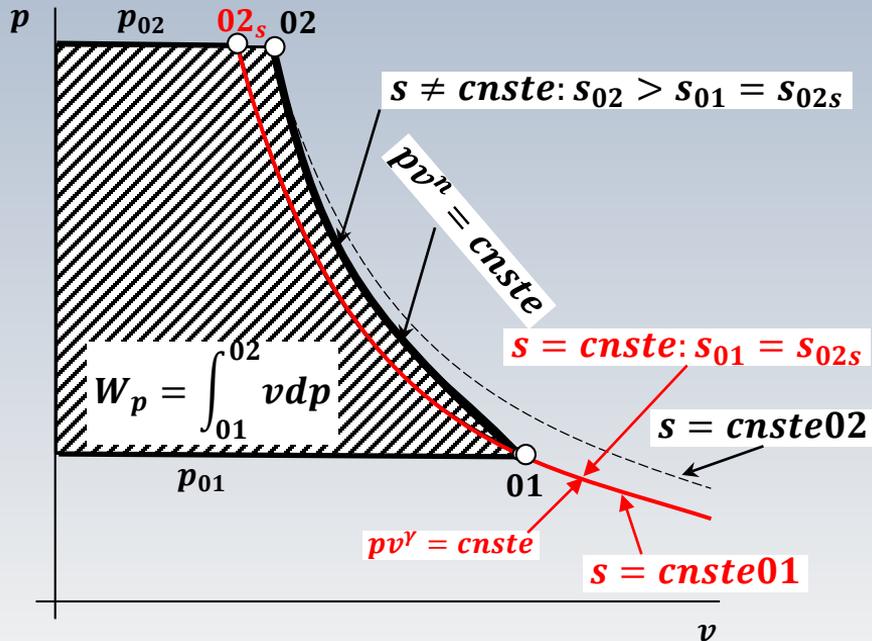
Représentation: $pv^\gamma = \text{cnste}$



La figure dans le plan $p - v$ ($s = \text{cnste}$.) illustre une compression, **isentropique** ($pv^\gamma = \text{cnste}$), entre les points 01-02s.

Le travail correspond à la surface hachurée comprise entre l'axe p , la courbe 01-02s et les isobares p_{01} et p_{02}

Représentation: $pv^n = cnste$

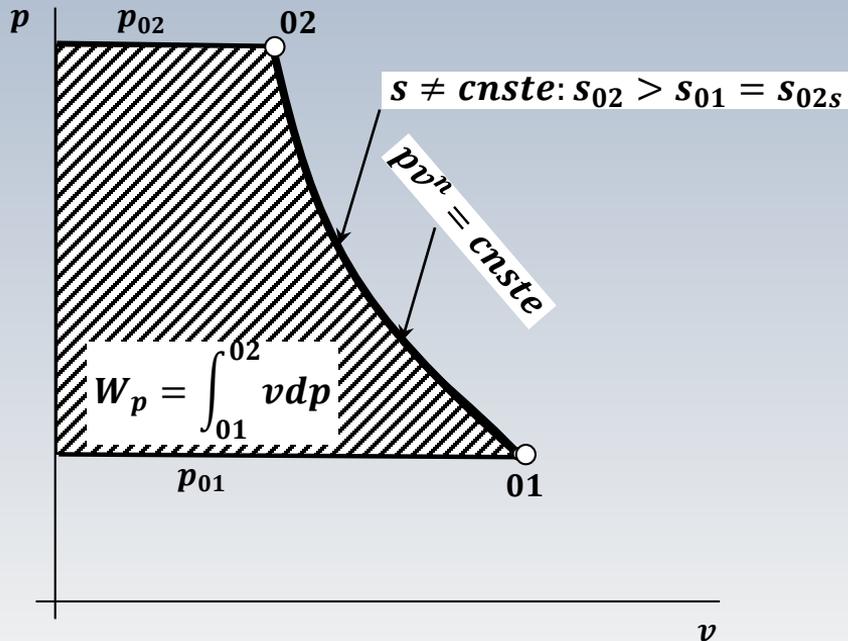


Sur cette figure, une compression **polytropique** définie par $pv^n = cnste$ est représentée.

Dans ce cas $s \neq cnste$. L'entropie passe du niveau s_{01} à un niveau supérieur s_{02}

Des transformations isentropiques ($pv^\gamma = cnste$), en traits rouge et pointillé, sont aussi illustrées à fins de comparaison

Représentation: $pv^n = cnste$



Sur cette figure, une compression **polytropique** définie par $pv^n = cnste$. est représentée.

Dans ce cas $s \neq cnste$. L'entropie passe du niveau s_{01} à un niveau supérieur s_{02}

Rendement polytropique

Turbine

Avec ces éléments, on peut définir le **rendement polytropique** pour une **turbine**, par la relation

$$\eta_p = \frac{(n - 1)/n}{(\gamma - 1)/\gamma}$$



$$\eta_s = \frac{\left(\left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{\eta_p(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right)}{\left(\left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right)}$$



Rendement en fonction des exposants n et γ

$$\eta_s > \eta_p \text{ Turbine}$$

Rendement polytropique

Compresseur

Pour un **compresseur**, on peut obtenir de manière analogue

$$\eta_p = \frac{(\gamma - 1)/\gamma}{(n - 1)/n}$$



$$\eta_s = \frac{\left(\left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right)}{\left(\left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma \eta_p} - 1 \right)}$$

Trop des formules!



$$\eta_s < \eta_p \quad \text{Compresseur}$$

Relations polytropiques

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{R\eta_p}{c_p}}$$

Turbine

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{R}{c_p\eta_p}}$$

Compresseur

Deux rendements?

Pourquoi utilise-t-on deux rendements?



Deux rendements?

Pour le cas d'un **compresseur*** l'équation du rendement (isentropique) total-à-total peut s'écrire

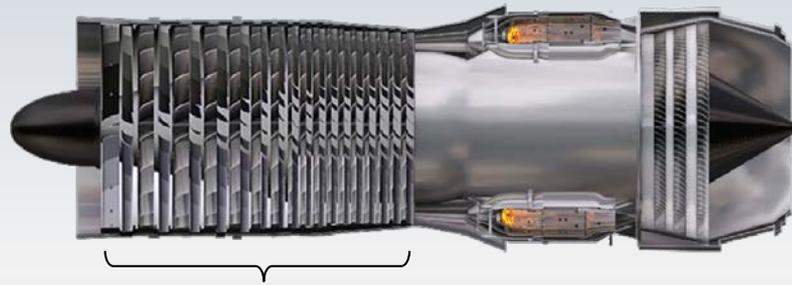
$$\eta_{tt} = \frac{T_{01}}{T_{02} - T_{01}} \left[(p_{02}/p_{01})^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]$$


On note aisément que le rendement isentropique (total-à-total) dépend du **rapport de pression**

* L'analyse est similaire pour une turbine; $c_p = cnste$.

Rapport de pression et η isentropique

Par opposition au rendement isentropique, **le rendement polytropique est similaire** (au point de design), pour des turbomachines qui opèrent à des rapports de pression différents. Cet indice, moins dépendant du nombre d'étages, est préféré pour définir la performance d'une machine.



Étages multiples



Relations polytropiques

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{R/c_p \eta_p} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma \eta_p}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{R \eta_p / c_p} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\eta_p (\gamma-1) / \gamma}$$

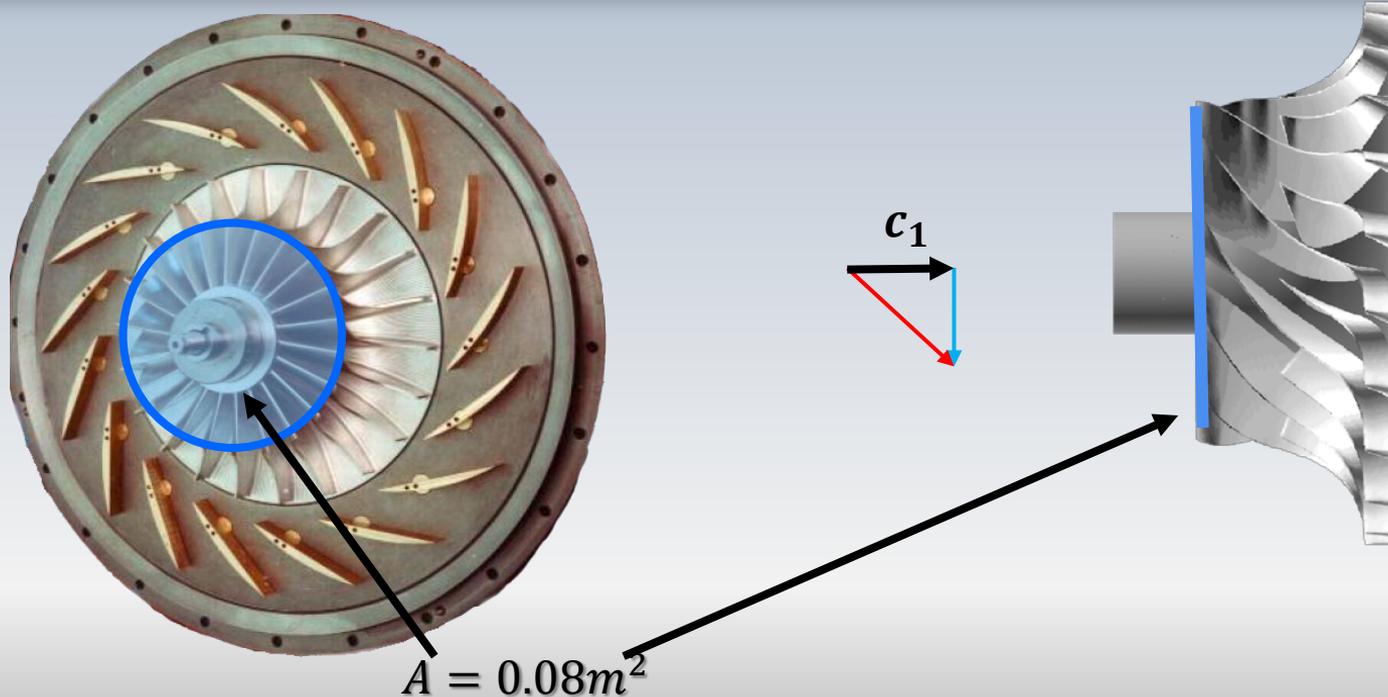
Compresseur

$$\eta_p = \frac{(\gamma - 1) / \gamma}{(n - 1) / n}$$

Turbine

$$\eta_p = \frac{(n - 1) / n}{(\gamma - 1) / \gamma}$$

À l'entrée du rotor d'un compresseur la vitesse moyenne est $C_1 = 320 \text{ m/s}$. L'aire de la section de passage est $A = 0.08 \text{ m}^2$. La température et la pression de l'environnement autour du compresseur sont respectivement $T = 300 \text{ K}$ et $p = 100 \text{ kPa}$. La puissance fournie au fluide est $\dot{W} = 300 \text{ kW}$. Calculez:



1

- Les conditions d'arrêt ou totales: température, pression et masse volumique à l'entrée du compresseur

2

- Le débit massique

3

- La pression de stagnation maximale possible à la sortie

- Considérez un **processus isentropique** entre tout point de l'environnement et l'entrée du compresseur
- Considérez que la vitesse c_1 **est alignée** avec l'axe de l'arbre
- Considérez l'air comme un gaz idéal avec $R = 287(J/kg \cdot K)$ et $c_p = 1010(J/kg \cdot K)$

Stagnation= Arrêt= Totale

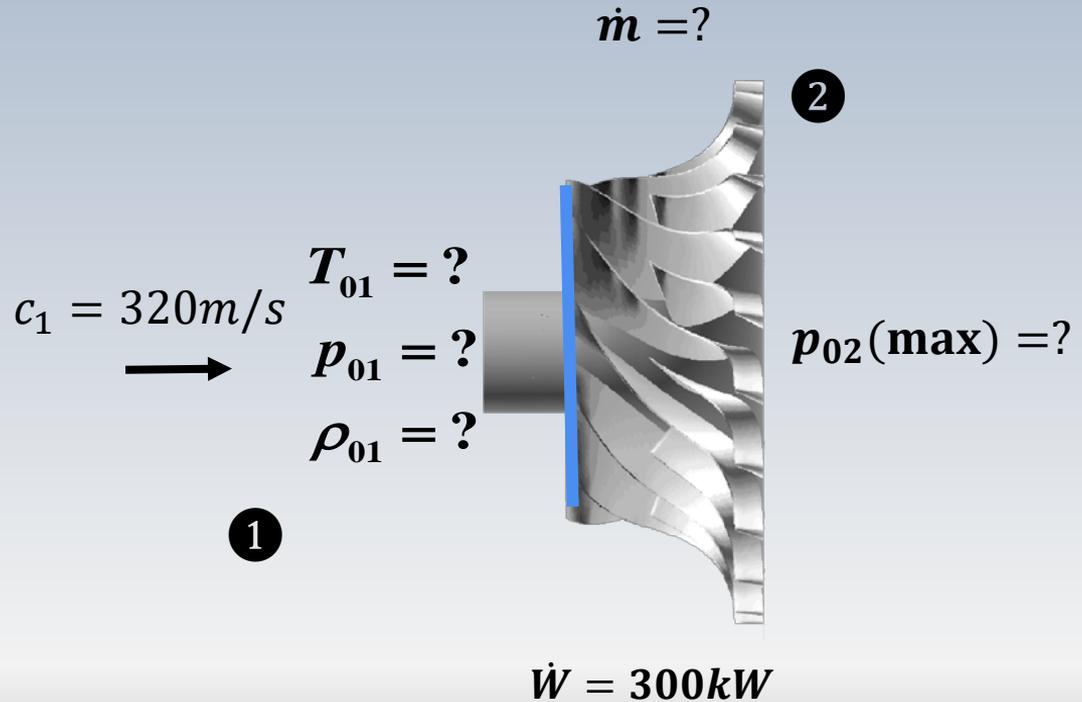


$$c = 0$$

$$T = 300K$$

$$p = 100kPa$$

0



- Température, pression et masse volumique à l'entrée du compresseur

Les propriétés statiques au point 0 sont aussi des quantités totales, puisque la vitesse est nulle

L'écoulement d'air entre le point 0 et le point 1, l'entrée du compresseur, peut être estimé comme étant isenthalpique et isentropique. Alors,

$$T_{01} = 300K, p_{01} = 100kPa \quad \rightarrow \quad \rho_{01} = \frac{p_{01}}{RT_{01}} = 1.161 \frac{kg}{m^3}$$

- Débit massique

Le débit massique est fonction de la vitesse de l'air, de l'aire normale à cette vitesse, et de la masse volumique statique

Pour calculer cette dernière, nous utiliserons la pression et la température statique à l'entrée du compresseur

Pour la température

$$T_1 = T_{01} - \frac{c_1^2}{2c_p} \quad \rightarrow \quad 300 - \frac{320^2}{2 \times 1010} \quad \rightarrow \quad T_1 = 249.3K$$

- Débit massique

Pour la pression

$$\frac{p_1}{p_{01}} = \left(\frac{T_1}{T_{01}} \right)^{\frac{c_p}{R}} \quad \rightarrow 100 \left(\frac{249.3}{300} \right)^{\frac{1010}{287}} \quad \rightarrow p_1 = 51.90 \text{ kPa}$$

La masse volumique est obtenue via l'équation d'état

$$\rho_1 = \left(\frac{p_1}{RT_1} \right) = \left(\frac{51.90}{287 \times 249.3} \right) = 0.726 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

- Débit massique

Finalement

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 c_1 = 0.726 \times 0.08 \times 320 = \mathbf{18.57kg/s}$$

Une voie alternative pour trouver \dot{m} , est l'utilisation du nombre de Mach $Ma = c_1 / \sqrt{\gamma RT_1}$ et par la suite la relation

$$\frac{\dot{m} \sqrt{RT_0}}{p_0 A} = Ma \sqrt{\gamma} \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right]^{-\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

- Pression maximale

La **pression maximale théorique** p_{02} à la sortie, est celle qui serait atteinte si le processus dans le compresseur était **isentropique**. Dans ce cas, la formule pour l'obtenir est

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{c_p}{R}}$$

T_{01} et p_{01} sont connues. Il faut trouver T_{02} . Nous avons \dot{W} , alors

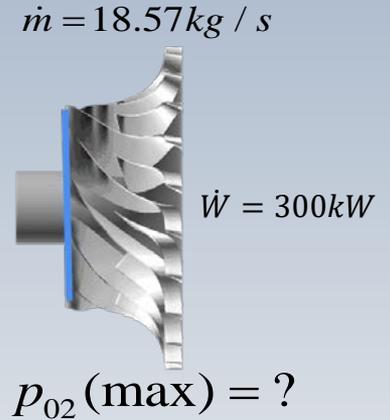
$$\frac{\dot{W}}{\dot{m}} = h_{02} - h_{01} = c_p(T_{02} - T_{01})$$

- Pression maximale

$$T_{02} = T_{01} + \frac{\dot{W}}{\dot{m} \times c_p} = 315.9K$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{c_p}{R}} \rightarrow p_{02} = 119.9 kPa$$

$T_{01} = 300K$
 $p_{01} = 100kPa$



Un compresseur centrifuge tourne à $n = 20000 \text{rpm}$. Le diamètre extérieur est $D = 300 \text{mm}$. Les conditions de stagnation à l'entrée sont $T_0 = 15^\circ \text{C}$ et $p_0 = 100 \text{kN/m}^2$. Le débit massique d'air est $\dot{m} = 0.9 \text{kg/s}$ et la composante périphérique de la vitesse absolue à la sortie est 90% de la vitesse tangentielle U en ce point. Le *rendement polytropique* du compresseur est $\eta_p = 80\%$. Le nombre de pales est $Z = 15$

Trouvez:

- le travail spécifique W_e ,
- la température totale à la sortie T_{02} ,
- le rapport: $P\text{-d'arrêt-sortie}/P\text{-d'arrêt-entrée}$ dans le rotor

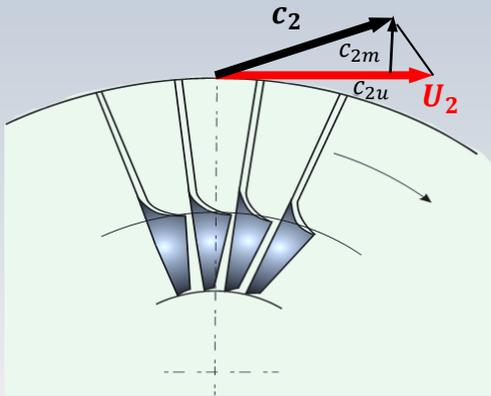
Considérez que la vitesse absolue de l'écoulement à l'entrée est alignée avec l'axe de l'arbre (sans prérotation)

Considérez l'air comme un gaz idéal: $R = 287 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$



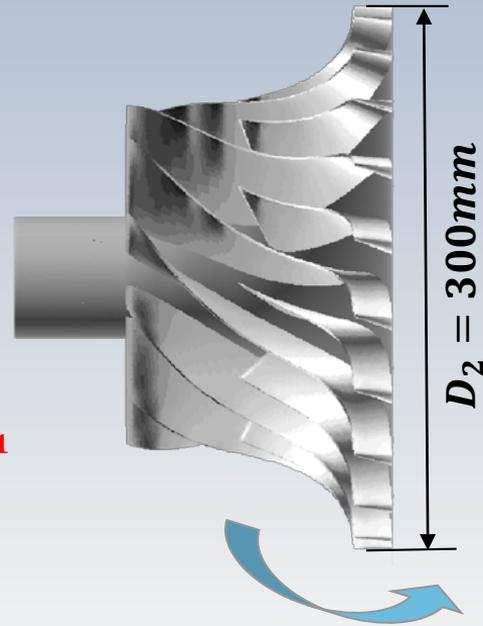
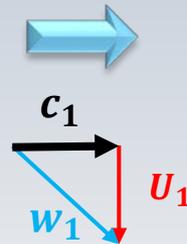
Données

$$c_{2u} = 0.9 U_2$$



$$\dot{m} = 0.9 \text{ kg/s}$$

$$T_0 = 15^\circ\text{C}$$
$$p_0 = 100 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$



$$\eta_p = 0.8$$

$$n = 20000 \text{ rpm}$$

a) le travail spécifique W_e , b) température totale à la sortie T_{02} , c) le rapport de pression d'arrêt dans le rotor

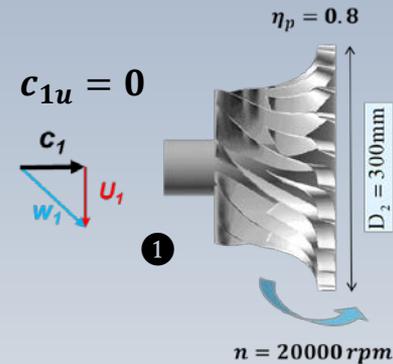
Travail spécifique ?

$$\frac{\dot{W}}{\dot{m}} = (h_{02} - h_{01}) = (c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1) \quad c_{1u} = 0$$

$$\frac{\dot{W}}{\dot{m}} = c_{2u} U_2 = 0.9U_2 \times U_2$$

$$U_2 = \frac{\pi n D_2}{60} = \frac{\pi \times 20000 \times 0.30}{60} = 314.16 \frac{m}{s}$$

$$W_e = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = 0.9U_2 \times U_2 = 88826 \frac{m^2}{s^2} = h_{02} - h_{01} = c_p(T_{02} - T_{01})$$



$$\begin{aligned} \dot{m} &= 0.9 \frac{kg}{s} \\ T_{01} &= 15^\circ C \\ p_{01} &= 100 \frac{kN}{m^2} \\ D_2 &= 300 mm \\ \eta_p &= 0.8 \\ n &= 20000 rpm \\ c_{2u} &= 0.9U_2 \\ c_{1u} &= 0 \end{aligned}$$



Température totale T_{02} ?



$$T_{02} = T_{01} + \frac{\dot{W}}{c_p \dot{m}} = 288K + \frac{88826 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1006 \text{ J/kg} \cdot \text{K}}$$

\uparrow
(288K)

$$T_{02} = 376.29 \text{ K} \quad \rightarrow c_p \approx 1012 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

$$\bar{T} = \frac{T_{01} + T_{02}}{2} = 332.14 \text{ K} \quad \rightarrow c_p \approx 1007.8 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

$$\begin{aligned} \dot{m} &= 0.9 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \\ T_{01} &= 15^\circ\text{C} \\ p_{01} &= 100 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \\ D_2 &= 300 \text{ mm} \\ \eta_p &= 0.8 \\ n &= 20000 \text{ rpm} \\ c_{2u} &= 0.9 U_2 \\ c_{1u} &= 0 \\ \frac{p_{02}}{p_{01}} &= \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{\eta_p c_p}{R}} \end{aligned}$$

On a cherché une température moyenne puisque la valeur de c_p dépend de la température

Pression totale p_{02} ?

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^{\frac{\eta_p c_p}{R}} = \left(\frac{375.8}{288}\right)^{\frac{0.8 \times 1007.8}{287}} = 2.117$$

$$p_{02} = 2.117 p_{01} = 211.7 \text{ kN/m}^2$$



$$\begin{aligned} \dot{m} &= 0.9 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \\ T_{01} &= 15^\circ\text{C} \\ p_{01} &= 100 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \\ D_2 &= 300 \text{ mm} \\ \eta_p &= 0.8 \\ n &= 20000 \text{ rpm} \\ c_{2u} &= 0.9 U_2 \\ c_{1u} &= 0 \\ \frac{p_{02}}{p_{01}} &= \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^{\frac{\eta_p c_p}{R}} \\ R &= 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \end{aligned}$$

Polytropique vs isentropique

Un compresseur axial à 4 étages a les caractéristiques suivantes

$$rp_1 = 1.8 \quad \eta_{1s} = 82\%$$

$$rp_2 = 2.1 \quad \eta_{2s} = 78\%$$

$$rp_3 = 2.3 \quad \eta_{3s} = 78\%$$

$$rp_4 = 2.6 \quad \eta_{4s} = 74\%$$

$$p_1 = 1.5 \text{ bar}$$

$$T_1 = 350 \text{ K}$$



$p_1 = 1.5 \text{ bar}, T_1 = 350 \text{ K}, \gamma = 1.4,$ **Les quantités sont totales (d'arrêt)**
 η_{ks} : rendement isentropique de l'étage k

Polytropic vs isentropic

Pour chaque i-étage ($i=1,4$), on vous demande de calculer le rapport T_{i+1}/T_i ainsi que le rendement polytropique

Par la suite, supposez des configurations successives, avec le premier étage seulement, et par après, avec les étages 1-2 , 1-2-3, et 1-2-3-4 couplés

Obtenez les rapports de température et de pression pour ces 4 configurations

Finalement, utilisez ces résultats pour calculer les rendements isentropiques et polytropiques correspondants aux quatre agencements

Formules:rappel

$rp_1 = 1.8$ $\eta_{1s} = 82\%$
 $rp_2 = 2.1$ $\eta_{2s} = 78\%$
 $rp_3 = 2.3$ $\eta_{3s} = 78\%$
 $rp_4 = 2.6$ $\eta_{4s} = 74\%$



$$\eta_s = \left(\frac{(p_{i+1}/p_i)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{(p_{i+1}/p_i)^{(\gamma-1)/\gamma} \eta_p - 1} \right)$$

$i = 1,2,3,4$

$p_1 = 1.5 \text{ bar}$

$T_1 = 350 \text{ K}$



η_p

Les quantités sont totales (d'arrêt)

Étage 1: $T_2/T_1, \eta_p$

$$rp_1 = 1.8 \quad \eta_{1s} = 82\%$$

$$rp_2 = 2.1 \quad \eta_{2s} = 78\%$$

$$rp_3 = 2.3 \quad \eta_{3s} = 78\%$$

$$rp_4 = 2.6 \quad \eta_{4s} = 74\%$$

$$\eta_{1s} = \left(\frac{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{T_2/T_1 - 1} \right)$$



$$\textcircled{1} \quad T_2/T_1 = \left(\frac{(rp_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{\eta_{1s}} \right) + 1$$



$$T_2/T_1 = 1.22$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma \eta_p}$$



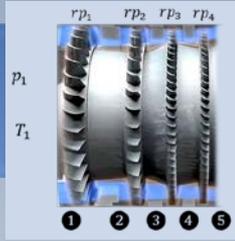
$$\eta_p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) / \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$$

Les quantités sont totales (d'arrêt)

$$\eta_p = 0.844$$

Températures

$$\begin{aligned}rp_1 &= 1.8 & \eta_{1s} &= 82\% \\rp_2 &= 2.1 & \eta_{2s} &= 78\% \\rp_3 &= 2.3 & \eta_{3s} &= 78\% \\rp_4 &= 2.4 & \eta_{4s} &= 74\%\end{aligned}$$



$$\textcircled{1} \quad T_2/T_1 = 1.22$$

$$\eta_{12p} = 0.844$$

① ②

$$\textcircled{2} \quad T_3/T_2 = 1.30$$

$$T_3/T_1 = (T_3/T_2)(T_2/T_1) = 1.3 \times 1.22 = 1.59$$

$$\eta_{32p} = 0.808$$

① ② ③

$$\textcircled{3} \quad T_4/T_3 = 1.34$$

$$T_4/T_1 = (T_3/T_1)(T_4/T_3) = 1.59 \times 1.34 = 2.14$$

$$\eta_{43p} = 0.813$$

① ② ③ ④

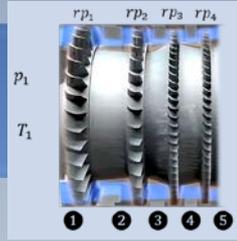
$$\textcircled{4} \quad T_5/T_4 = 1.42$$

$$T_5/T_1 = (T_4/T_1)(T_5/T_4) = 2.14 \times 1.42 = 3.05$$

$$\eta_{54p} = 0.772$$

Les quantités sont totales (d'arrêt)

Rendements



① ②

$$p_3/p_1 = (p_3/p_2)(p_2/p_1) = 1.8 \times 2.1 = \mathbf{3.78}$$

$$\eta_{13p} = \mathbf{0.819}$$

① ② ③

$$p_4/p_1 = 1.8 \times 2.1 \times 2.3 = \mathbf{8.69}$$

$$\eta_{14p} = \mathbf{0.812}$$

① ② ③ ④

$$p_5/p_1 = 1.8 \times 2.1 \times 2.3 \times 2.6 = \mathbf{22.6}$$

$$\eta_{15p} = \mathbf{0.799}$$

$$T_2/T_1 = 1.22 \quad rp_1 = 1.8 \quad \eta_{1s} = 82\%$$

$$T_3/T_1 = 1.59 \quad rp_2 = 2.1 \quad \eta_{2s} = 78\%$$

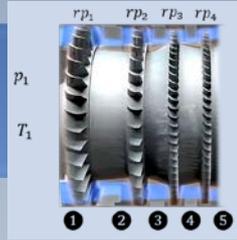
$$T_4/T_1 = 2.14 \quad rp_3 = 2.3 \quad \eta_{3s} = 78\%$$

$$T_5/T_1 = 3.05 \quad rp_4 = 2.6 \quad \eta_{4s} = 74\%$$

$$\eta_{1ip} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \ln \left(\frac{p_i}{p_1} \right) / \ln \left(\frac{T_i}{T_1} \right)$$

$$i = 2, 3, 4, 5$$

Rendements



① ②

$$p_3/p_1 = (p_3/p_2)(p_2/p_1) = 1.8 \times 2.1 = \mathbf{3.78}$$

① ② ③

$$p_4/p_1 = 1.8 \times 2.1 \times 2.3 = \mathbf{8.69}$$

① ② ③ ④

$$p_5/p_1 = 1.8 \times 2.1 \times 2.3 \times 2.6 = \mathbf{22.6}$$

$\eta_{12s} = 0.82$	

$$T_2/T_1 = 1.22 \quad rp_1 = 1.8 \quad \eta_{1s} = 82\%$$

$$T_3/T_1 = 1.59 \quad rp_2 = 2.1 \quad \eta_{2s} = 78\%$$

$$T_4/T_1 = 2.14 \quad rp_3 = 2.3 \quad \eta_{3s} = 78\%$$

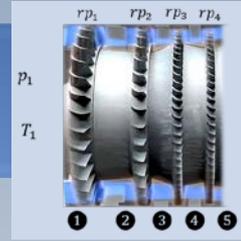
$$T_5/T_1 = 3.05 \quad rp_4 = 2.6 \quad \eta_{4s} = 74\%$$

$$\eta_{1is} = \left(\frac{(p_i/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{T_i/T_1 - 1} \right)$$

$$i = 2,3,4,5$$

Le rendement isentropique varie de manière plus significative que le rendement polytropique

Rendements



① ②

$$p_3/p_1 = (p_3/p_2)(p_2/p_1) = 1.8 \times 2.1 = \mathbf{3.78}$$

① ② ③

$$p_4/p_1 = 1.8 \times 2.1 \times 2.3 = \mathbf{8.69}$$

① ② ③ ④

$$p_5/p_1 = 1.8 \times 2.1 \times 2.3 \times 2.6 = \mathbf{22.6}$$

$\eta_{12s} = 0.82$	$\eta_{12p} = 0.844$
$\eta_{13s} = 0.779$	$\eta_{13p} = 0.819$
$\eta_{14s} = 0.745$	$\eta_{14p} = 0.812$
$\eta_{15s} = 0.701$	$\eta_{15p} = 0.799$

$$T_2/T_1 = 1.22 \quad rp_1 = 1.8 \quad \eta_{1s} = 82\%$$

$$T_3/T_1 = 1.59 \quad rp_2 = 2.1 \quad \eta_{2s} = 78\%$$

$$T_4/T_1 = 2.14 \quad rp_3 = 2.3 \quad \eta_{3s} = 78\%$$

$$T_5/T_1 = 3.05 \quad rp_4 = 2.6 \quad \eta_{4s} = 74\%$$

$$\eta_{1is} = \left(\frac{(p_i/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{T_i/T_1 - 1} \right)$$

$$i = 2,3,4,5$$

Le rendement isentropique varie de manière plus significative que le rendement polytropique

En bref

Dans une étape de préparation à l'étude des turbomachines nous avons:

- 1) Rappelé les lois de conservation,
- 2) Présenté l'équation d'Euler pour les turbomachines,
- 3) Rappelé le premier et le second principe de la thermodynamique,
- 4) Rafrainchi quelques notions de la dynamique des gaz,

En bref

- 5) Évoqué le diagramme h-s (enthalpie-entropie),
- 6) Présenté des formules pour le calcul des rendements total-à-total et polytropique

Des problèmes utilisant ces notions dans le contexte des turbomachines ont été développés

Synthèse de formules

Compresseur

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{R/c_p \eta_p} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma \eta_p}$$

$$\eta_s = \left(\frac{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma \eta_p} - 1} \right)$$

$$\eta_s \leq \eta_p$$

$$\eta_p = \frac{(\gamma - 1)/\gamma}{(n - 1)/n}$$

Turbine

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{R \eta_p / c_p} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\eta_p (\gamma-1)/\gamma}$$

$$\eta_s = \left(\frac{(p_2/p_1)^{(\gamma-1) \eta_p / \gamma} - 1}{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1} \right)$$

$$\eta_s \geq \eta_p$$

$$\eta_p = \frac{(n - 1)/n}{(\gamma - 1)/\gamma}$$

Synthèse de formules (reprise)

Rendement Turbine

$$\eta_{ttT} = \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{02s}}$$

Débit massique

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0A} = Ma\sqrt{\gamma} \left[1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2 \right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Rend. compresseur

$$\eta_{ttC} = \frac{h_{02s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}}$$

Écoulement isentropique

$$\left[1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2 \right] = \frac{T_0}{T} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\gamma-1/\gamma}$$

Température Totale

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}$$

Processus isentropique

$$\left(\frac{T_2}{T_1} \right)_{s=const.} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Gaz parfait

$$p = \rho RT$$

À venir



À venir:
Les machines axiales

