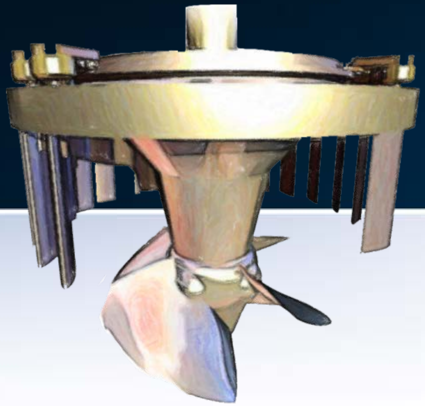
TurboFluids

Turbomachines



NRJ EN ROTATION

Révision: Thermo+ Mécaflu + Euler

OBJECTIFS

- Rappeler les lois de conservation
- Introduire l’équation d’Euler pour les turbomachines
- Présenter le lien entre l’équation d’Euler et l’équation de l’énergie
- Faire un rappel du premier et du second principe de la thermodynamique

OBJECTIFS

- Revoir quelques éléments de la dynamique des gaz
- Rappeler les processus thermodynamiques dans le diagramme h-s (enthalpie-entropie)
- Présenter des formules pour le calcul des rendements total-à-total et polytropique dans une turbomachine

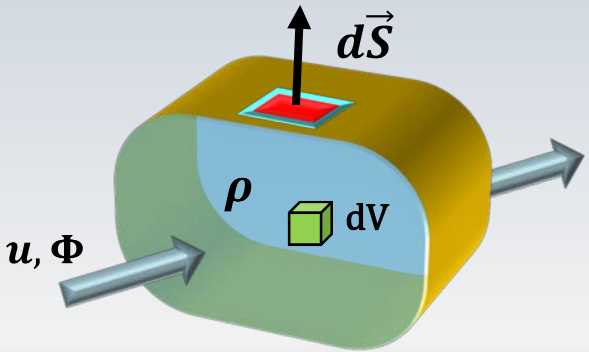
Les principes de conservation

Pour **un volume de contrôle VC fixe,** avec $\boldsymbol{u}$ étant la vitesse de l'écoulement, ρ la masse volumique et dV et dS le volume et la surface infinitésimale, respectivement, les lois de conservation: **masse, quantité de mouvement et énergie**, peuvent être formulées de la manière suivante:

Formulation générale

$$\frac{d}{dt}\int_{VC}\rho\Phi dV + \int_{SC}\rho\Phi(\vec{u}\cdot\vec{n})dS = S^{\Phi}$$

Conservation	Φ	S^{Φ}
Masse	1	0
Q. Mouvement	$\vec{u}$	$\sum\vec{F}$
Énergie	e	$\dot{Q}-\dot{W}$



Cas stationnaire

Pour les trois lois de conservation, nous allons nous intéresser au **cas stationnaire**. Ainsi, le terme décrivant la variation temporelle sera nul

$$\cancel{\frac{d}{dt}\int_{VC}\rho\Phi\, dV} + \int_{SC}\rho\Phi(\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS = S^{\Phi}$$

Le terme restant dans le membre de gauche comprend le flux de la propriété $\boldsymbol{\Phi}$ traversant la surface d’un volume de contrôle

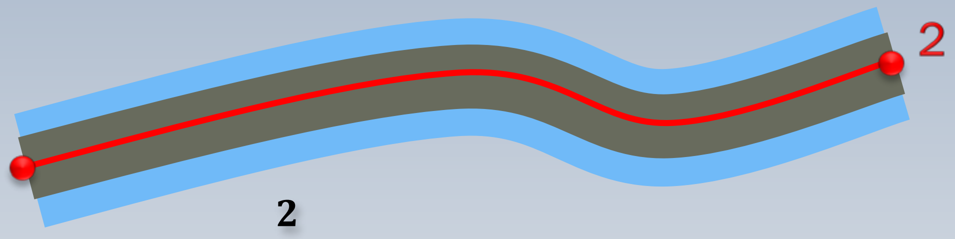
Conservation de la masse

Pour la conservation de **la masse**: $\boldsymbol{\Phi = 1, S^{\Phi} = 0}$, alors

$$\int_{SC} \rho(\vec{u} \cdot \vec{n})dS = 0$$

Cette équation, ainsi que les suivantes, seront regardées en 1D avec des quantités **uniformes** à l'entrée et à la sortie

Cas 1D état stationnaire



$\rho_1 u_1 A_1$

$\rho_2 u_2 A_2$

$$\int_1^2 \rho(\vec{u}\cdot\vec{n})dS = \rho_2\, u_2 A_2 - \rho_1 u_1 A_1 = 0$$

$$\boxed{\dot{m} = \rho_2 u_2 A_2 = \rho_1 u_1 A_1}$$

Conservation de la Q. de mouvement

Pour la conservation de **la quantité de mouvement** $\boldsymbol{\Phi = \vec{u}}$ et $\boldsymbol{S^{\Phi} = \vec{F}_{VC}}$ de sorte que

$$\boldsymbol{\vec{F}_{VC} = \int_{SC} \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS}$$

Au lieu de poursuivre avec le développement de cette équation, nos allons nous concentrer sur l'équation germaine du **moment angulaire**

Conservation du moment angulaire

Pour celle-ci $\boldsymbol{\Phi} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{u}}$ et $\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{\Phi}} = \vec{M}$, de sorte que

$$\vec{M} = \int_{SC} \boldsymbol{\rho} \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{u}} (\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}) \boldsymbol{dS}$$

Alors, en une dimension on trouve

$$\vec{M} = \int_1^2 r \times \rho\, \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}\,) ds \qquad = (r_2 \times u_2)\underbrace{\boxed{\rho_2 u_2 A_2}}_{\dot{\boldsymbol{m}}} - (r_1 \times u_1)\underbrace{\boxed{\rho_1 u_1 A_1}}_{\dot{\boldsymbol{m}}}$$

Vers l’équation d’Euler

En ingénierie, la conservation du moment angulaire prend la forme de **l’équation d’Euler**. En effet, cette formule:

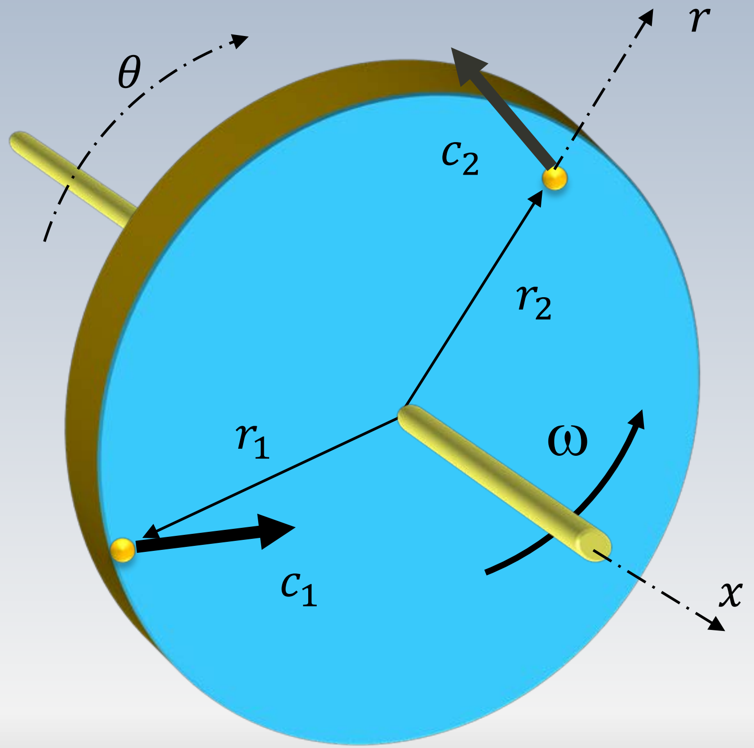
$$\vec{M} = \dot{m}(r_2 \times u_2 - r_1 \times u_1)$$

est mathématiquement élégante, mais elle n’est pas pratique. Pour la simplifier, le produit $r \times u$ est écrit en fonction de vitesses facilement identifiables et calculables

Dans la suite, **la vitesse absolue de l’écoulement sera notée par le symbole c** plutôt que u

L’équation d’Euler

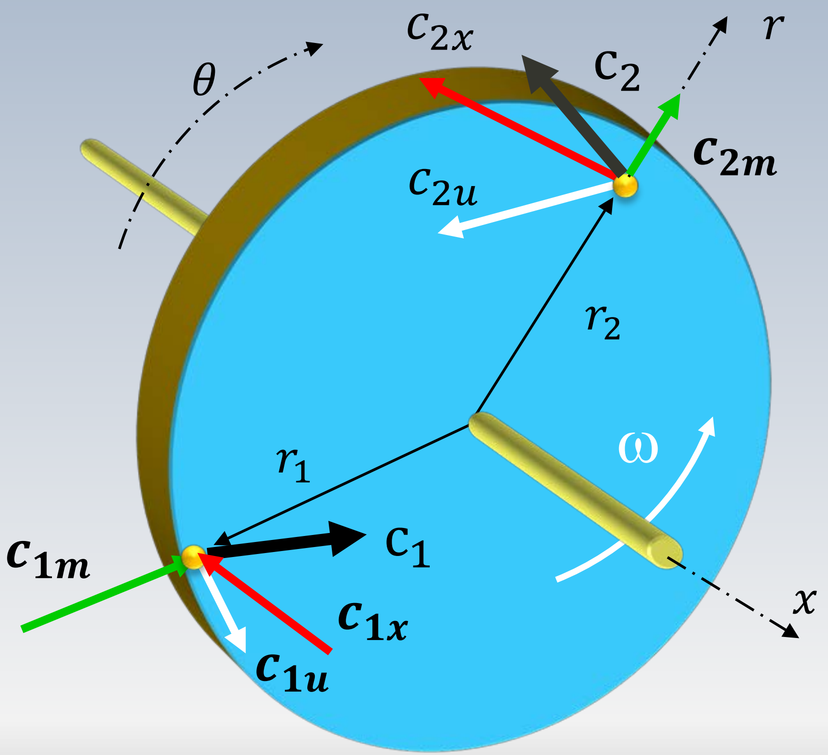
Rotor Schématique



La figure montre un rotor schématique avec des rayons $r_1$et r_2 dans le plan orthogonal à l'axe des x

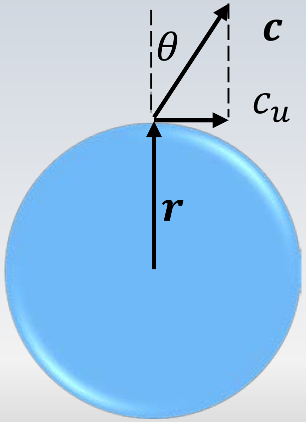
Les composantes de la **vitesse absolue** $\boldsymbol{c}$ de l'écoulement sont notées par c_x, c_m, c_u dans les directions axiale x, radiale r et azimutale θ, respectivement

Produit vectoriel



Le produit $r \times c$ avec le vecteur r considéré dans le plan orthogonal à la direction x est

$$r \times c = |r||c|sin\theta = \boldsymbol{r c_u}$$



Vers l'équation d'Euler

Alors, l'équation

$$\vec{M} = \dot{m}(r_2 \times u_2 \; - r_1 \times u_1)$$

peut s'écrire comme

$$\vec{M} = \dot{m}(c_{2u}r_2 - c_{1u}r_1)$$

et lorsqu'on multiplie par la **vitesse angulaire** $\boldsymbol{\omega}$ on a:

$$\dot{W} = M\omega = \dot{m}\omega\underbrace{(c_{2u}r_2 - c_{1u}r_1)}$$

$U_1 = r_1\omega,\ U_2 = r_2\omega$

L'équation d'Euler

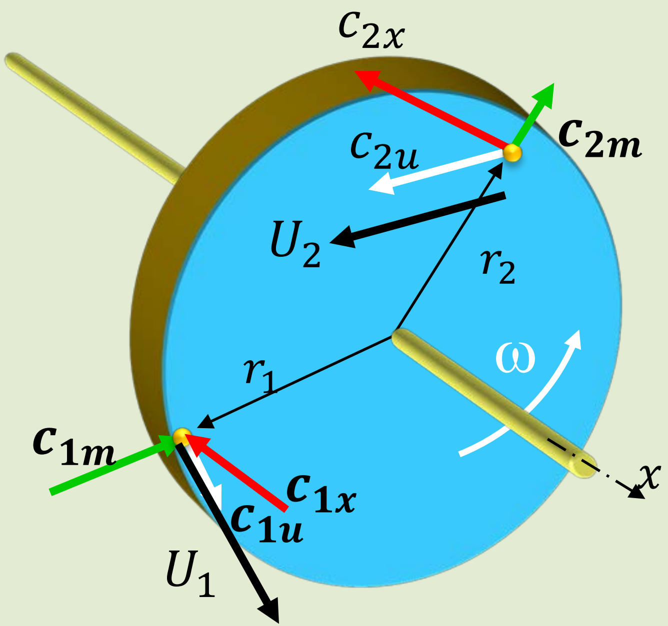
Alors, lorsqu'on introduit la vitesse tangentielle de la roue $U = r\omega$, on trouve:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{W}} = \dot{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{c}_{2u}\boldsymbol{U}_2 - \boldsymbol{c}_{1u}\boldsymbol{U}_1)}$$

Cette formule est connue comme **l'équation d'Euler**

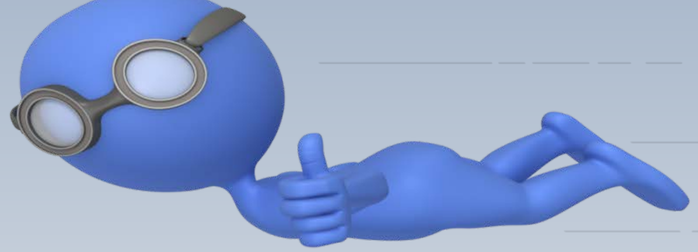
Résumé

$$\dot{W} = \dot{m}(c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1)$$



Travail Spécifique

$$E = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = (c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1)$$



$$H = \frac{(c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1)}{g}$$

Pour les machines hydrauliques on introduit l'accélération gravitationnelle g, pour obtenir une "tête" en mètres

Dans une turbomachine on utilise la notion de **travail spécifique.** Celle-ci correspond à la puissance référée au débit massique circulant par la machine. Les unités sont $J/kg = m^2/s^2$

La formule d’Euler et l’équation de l’énergie

Mécanique<<>> Thermodynamique

L'équation d'Euler exprime l'énergie transmise entre un rotor et un fluide lors de son passage par cette roue en mouvement. Le concept derrière cette équation est de nature mécanique.

La variation énergétique peut aussi être analysée en fonction de variables du fluide purement thermodynamiques

Pour ce faire, on regarde l'équation de l'énergie à l'état stationnaire. Celle-ci est retrouvée à partir de la formulation générale avec $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{e}$, $\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{\Phi}} = \dot{\boldsymbol{Q}} - \dot{\boldsymbol{W}}$. Alors,

$$\int_{SC} \rho\Phi(\vec{u} \cdot \vec{n})dS = S^{\Phi} \longrightarrow$$

Mécanique<<>> Thermodynamique

$$\int_S \left(\rho e + p\right)\vec{u}\cdot d\vec{S} = \dot{Q} - \dot{W}_S$$

- Le terme $p\vec{u}\cdot d\vec{S}$ dans l'intégrale provient d'une partie du membre de droite correspondant au "travail d'expansion" Le symbole $\dot{W}_S$ représente maintenant le travail à l'arbre. Le terme e regroupe l'énergie interne, cinétique et potentielle, soit $e = \hat{u} + \frac{V^2}{2} + gz$

NB. Le point sur les variables indique par unité de temps

Mécanique≪≫ Thermodynamique

Dans une turbomachine $\dot{Q} \approx 0$: le transfert de chaleur est négligeable par rapport aux autres formes d'énergie

Alors, en 1D, avec des propriétés uniformes aux entrées et sorties on a:

$$\int_1^2 (\rho e \ + p)\vec{u} \cdot dS = -\dot{W}_S$$

$$\Downarrow$$

$$(\rho u A e + p u A\, \rho/\rho)_2 \ - (\rho u A e + p u A\, \rho/\rho)_1 = -\dot{W}_S$$

Énergie: 1D

$$(\boxed{\rho u A}e + p\boxed{uA\,\rho}/\rho)_2 - (\boxed{\rho u A}e + p\boxed{uA\,\rho}/\rho)_1 = -\dot{W}_S$$

$$\dot{m} = \rho_2 u_2 A_2 = \rho_1 u_1 A_1$$

$$\dot{m}[(e + p/\rho)_2 - (e + p/\rho)_1] = -\dot{W}_S$$

$$e = \hat{u} + \frac{V^2}{2} + gz$$

$$h = (\hat{u} + p/\rho)$$

$$\Delta z \approx 0$$

$$\dot{m}\left[\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2}\right) - \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2}\right)\right] = -\dot{W}_S$$

Énergie: 1D

$$\dot{m}\left[\left(h_2+\frac{V_2^2}{2}\right)-\left(h_1+\frac{V_1^2}{2}\right)\right]=-\dot{W}_S$$

$$\boxed{h_0 = h + \frac{V^2}{2}}$$

⬇

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{h}_{02}-\boldsymbol{h}_{01})=\dot{\boldsymbol{W}}_S}$$

"Soudainement", on se place du point de vue du fluide et on considère que l'énergie $\dot{W}$ est positive si le fluide augmente son niveau énergétique lors du passage par le rotor.

Relation fondamentale

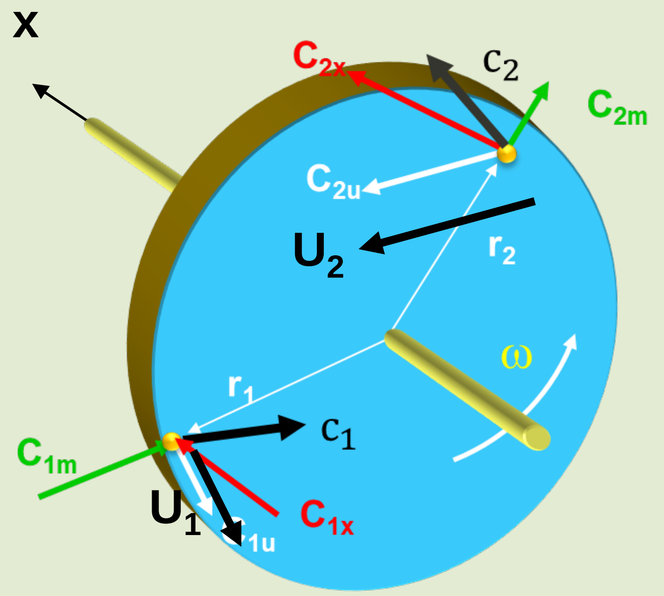
Nous avons alors deux expressions équivalentes et complémentaires pour calculer la variation d'énergie lors du passage d'un fluide dans une turbomachine

$$(h_{02} - h_{01}) = (c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1)$$

Thermo

Euler

Équations 1D à l'état stationnaire



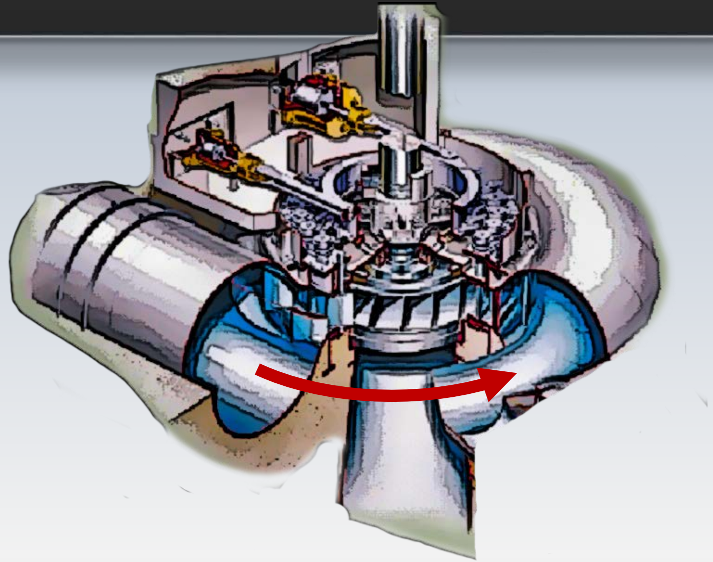
$$\dot{W} = \dot{m}(c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1)$$

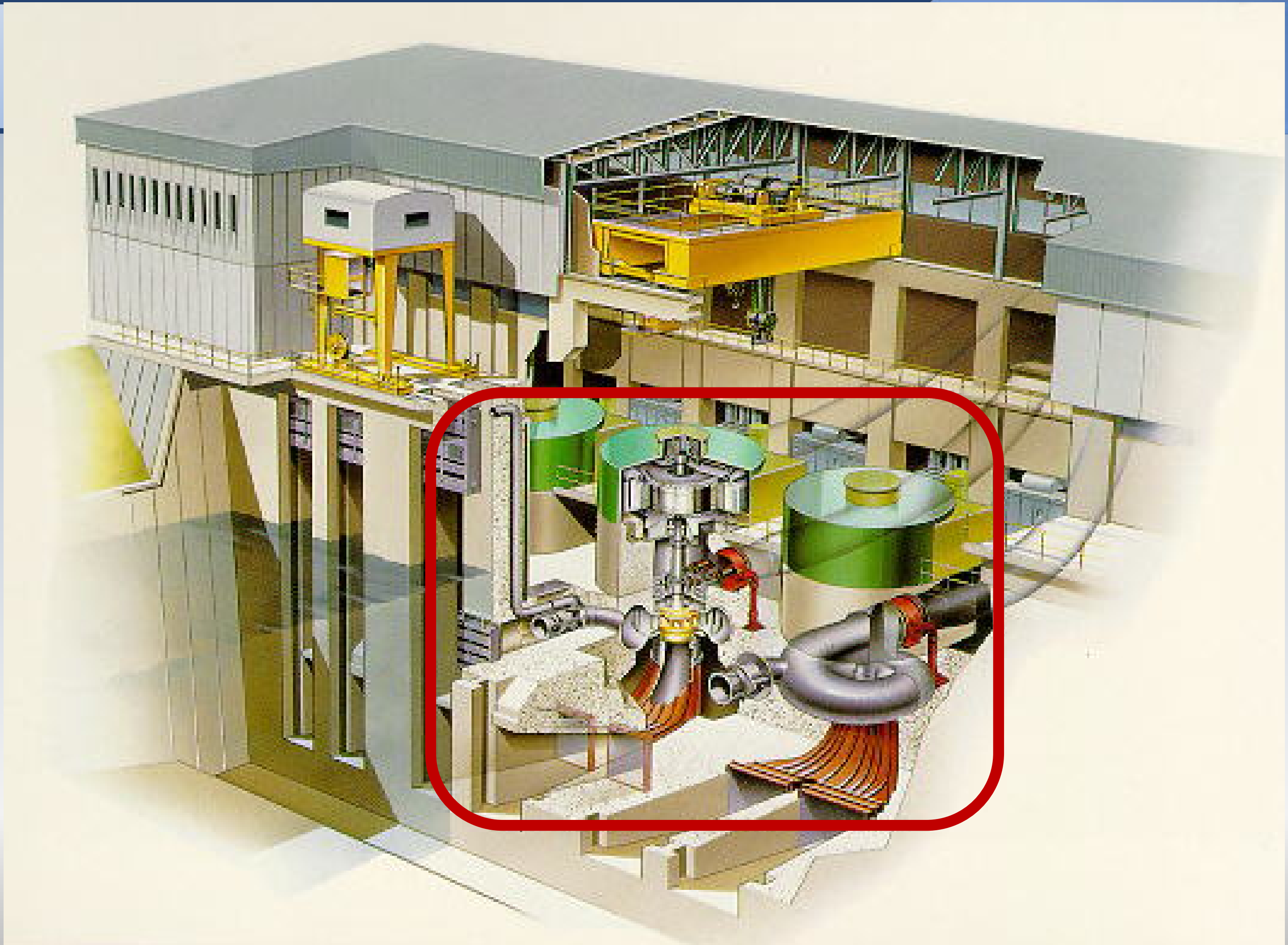
$$(h_{02} - h_{01}) = (c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1)$$

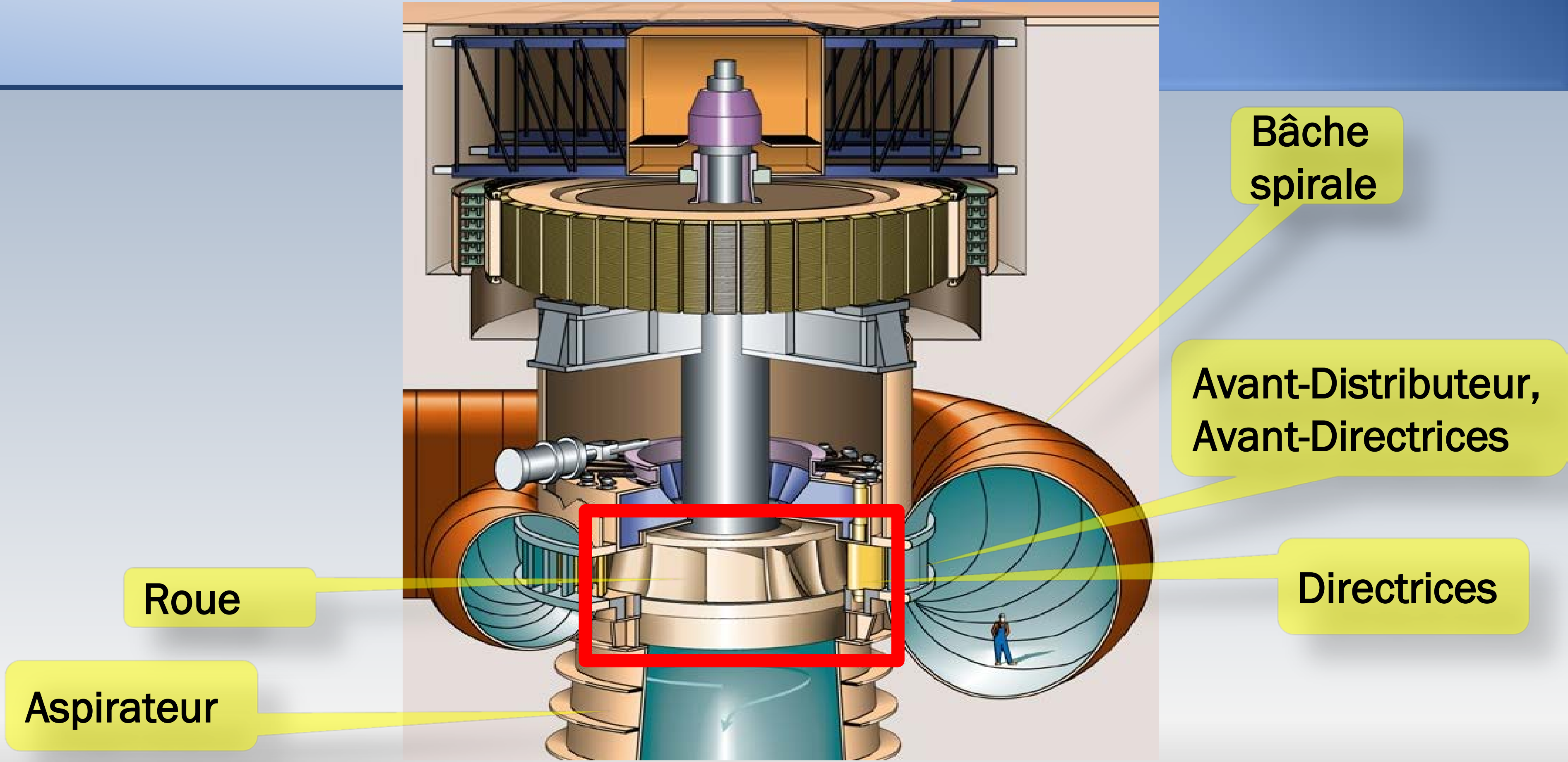
$$\dot{m} = \rho_1 c_{1x} A_1 = \rho_2 c_{2x} A_2$$

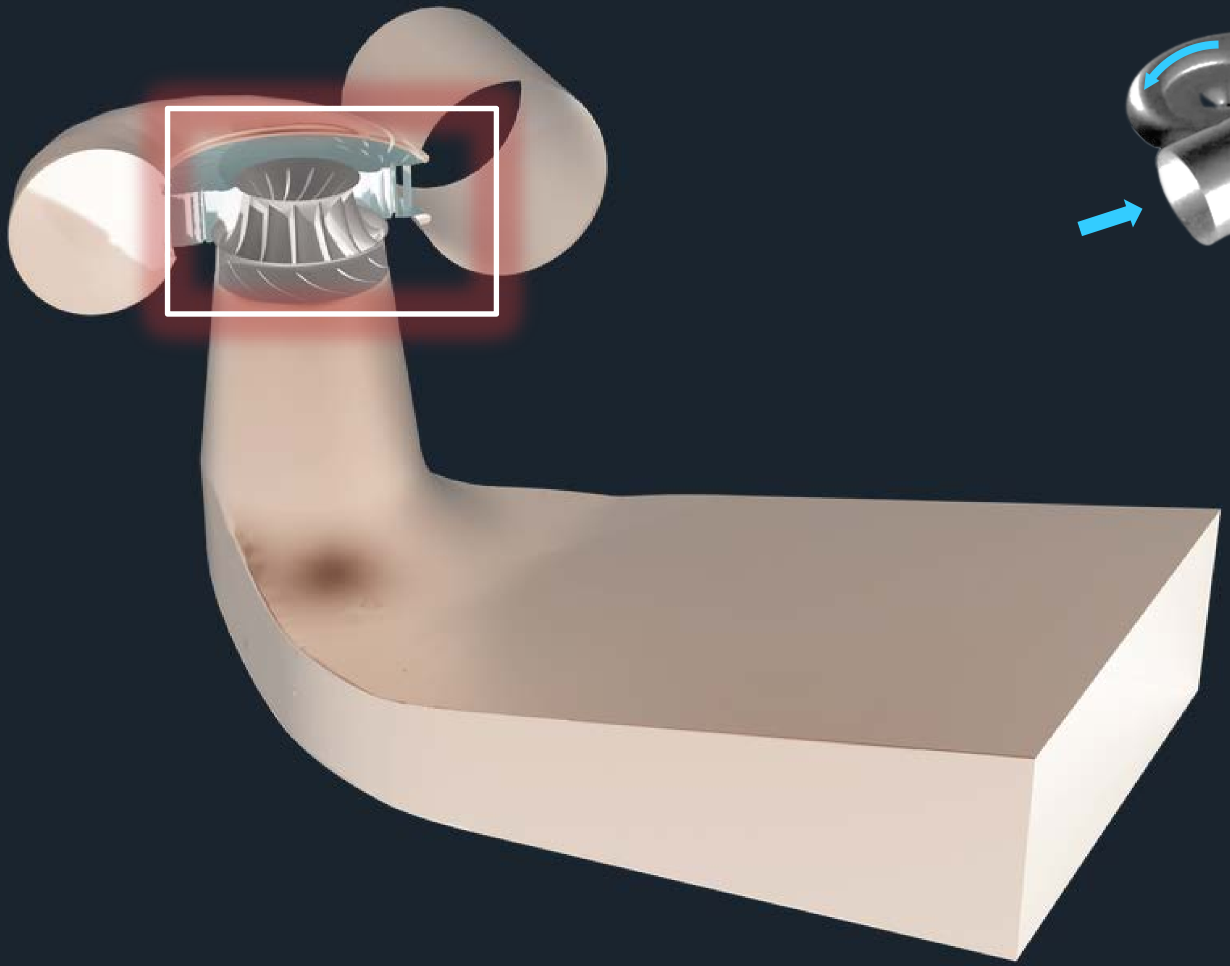
Dans cette formule, on considère que les aires d'entrée et de sortie sont dans un plan normal à l'axe des x

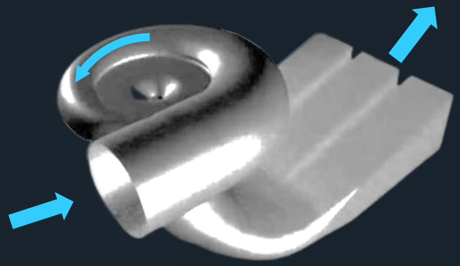
Dans une turbine hydraulique, le débit volumique est de $Q=272\ m^3/s$. Le rayon intérieur des avant-directrices est $r_i = 3.8 m$ et la hauteur des pales est $b_o=1.4\ m$. Calculez la vitesse de l'écoulement à la sortie des directrices si l'angle de sortie de ces pales est de $\theta=30^0$ par rapport à la direction radiale. La masse volumique est $\rho= 1000\ kg/m^3$

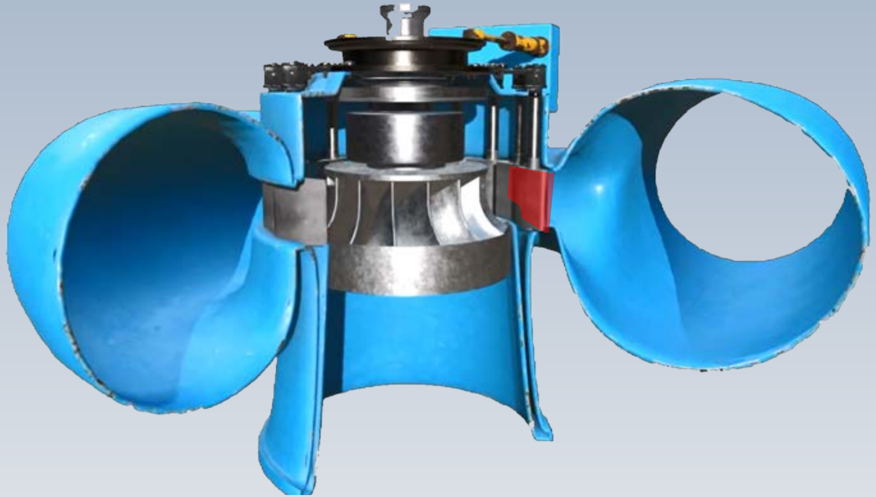




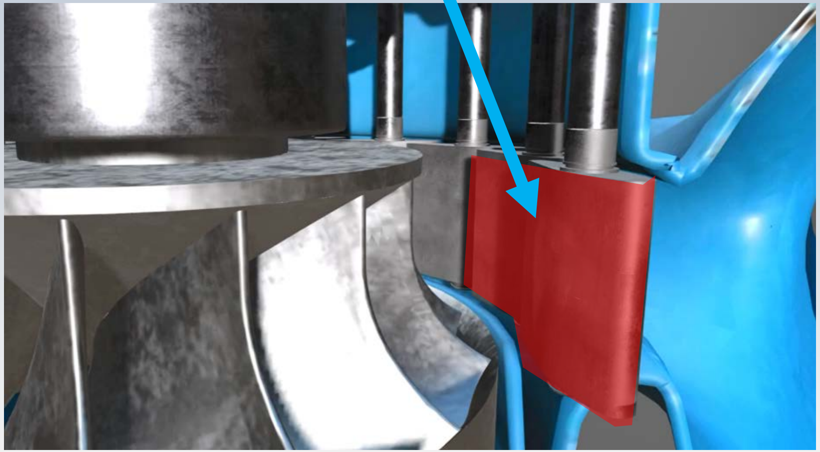

Bâche spirale
Avant-Distributeur, Avant-Directrices
Directrices
Roue
Aspirateur





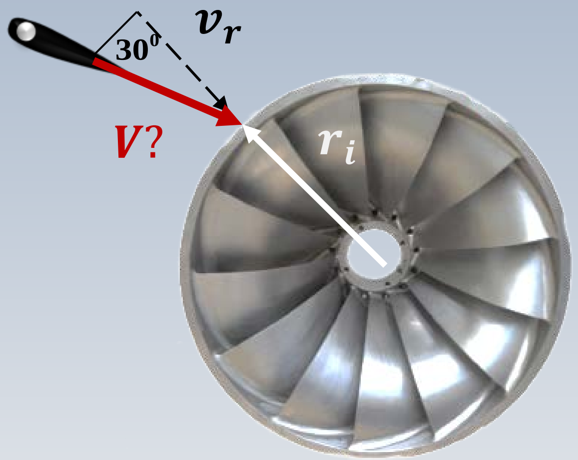


Directrices



Dans une turbine hydraulique, le débit volumique est de $Q = 272\ m^3/s$. Le rayon intérieur des avant-directrices est $r_i = 3.8\,m$ et la hauteur des pales est $b_o = 1.4\ m$. Calculez la vitesse de l'écoulement à la sortie des directrices si l'angle de sortie de ces pales est de $\theta = 30^0$ par rapport à la direction radiale. La masse volumique est $\rho = 1000\ kg/m^3$

$Q = 272\ m^3/s$, $r_i = 3.8\,m$, $b_o = 1.4\ m$, $\theta = 30^0$, $\rho = 1000\ kg/m^3$



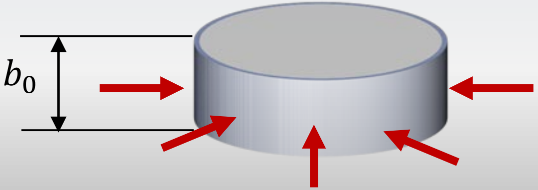
Conservation de la masse

$$\dot{m} = \int_{SC} \rho(\vec{u} \cdot \vec{n})dS \quad = \rho u A$$

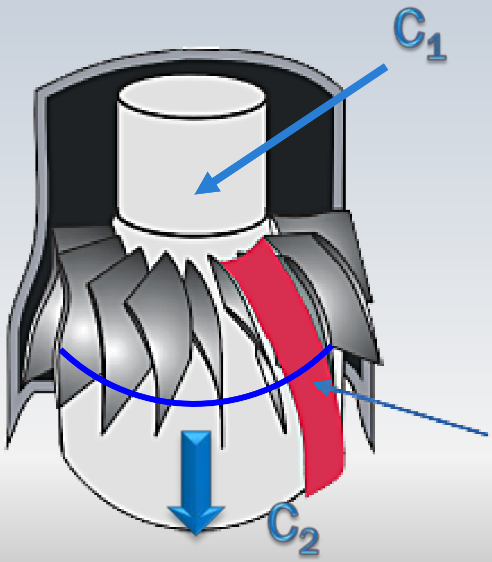
$$\dot{m} = \rho v_r (2\pi r_i b_0) = \rho Q$$

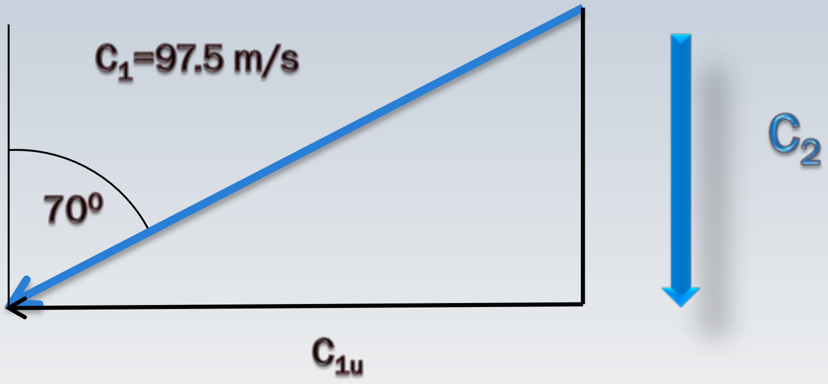
$$v_r = 8.14\, m/s$$

$$V = \frac{v_r}{\cos\theta} = \frac{8.14}{0.866} = 9.40\, m/s$$



Calculez la puissance générée $\dot{W}$ par une turbine dans laquelle le débit massique est $\dot{m} = 6kg/s$ et la vitesse à l'entrée est $c_1 = 97.5m/s$ formant un angle de 70^o par rapport à la direction axiale. On considère que la vitesse à la sortie des aubes du rotor est sans rotation (elle n'a pas de composante périphérique). La turbine tourne à $n = 10000rpm$ et elle a un diamètre moyen $d = 1m$.



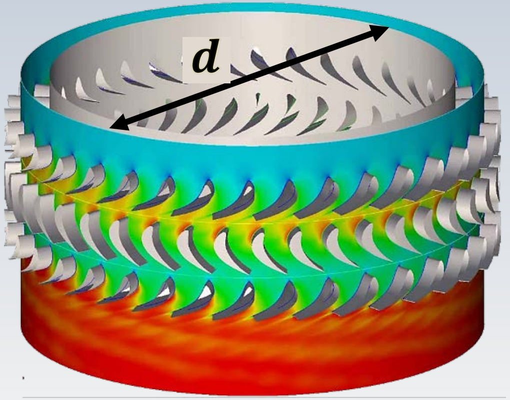


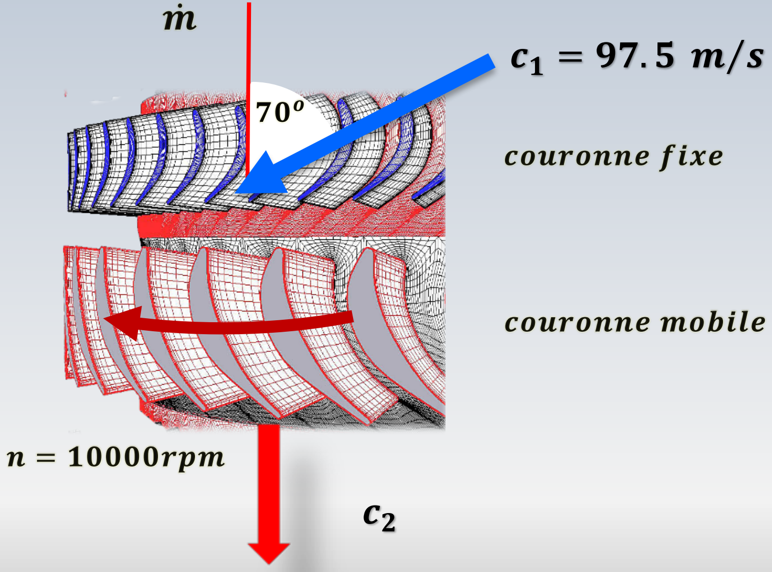
Problème

Calculez la puissance générée

$\dot{m} = 6kg/s,\ \theta = 70^o,\ n = 10000rpm, d = 1m,\ c_1 = 97.5m/s$

La figure à gauche montre un agencement avec des couronnes fixes et mobiles alternées, et à droite, une projection avec les données

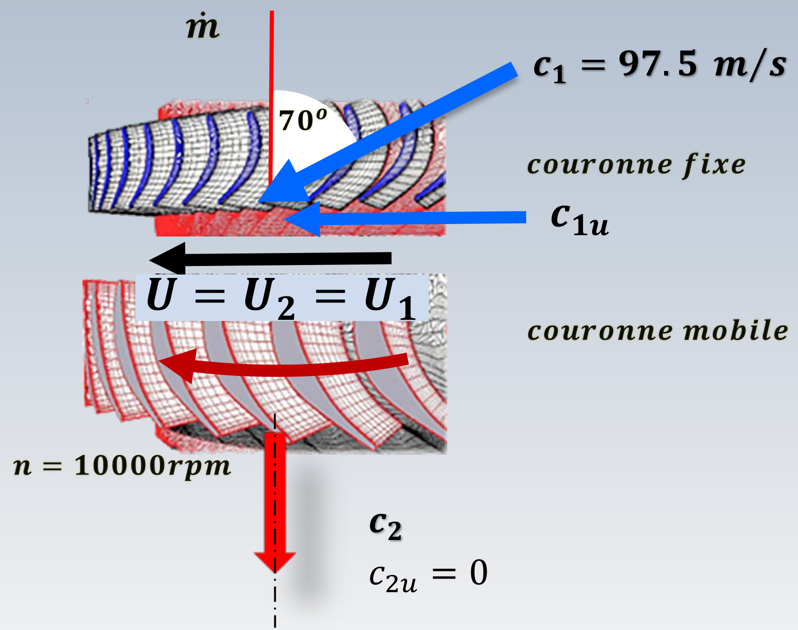




Problème

Calculez la puissance générée

$$\dot{m} = 6kg/s,\ \theta = 70^o,\ n = 10000rpm, d = 1m,\ c_1 = 97.5m/s$$



Pour chercher la puissance, nous utilisons l'équation d'Euler

$$E = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = (c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1)$$

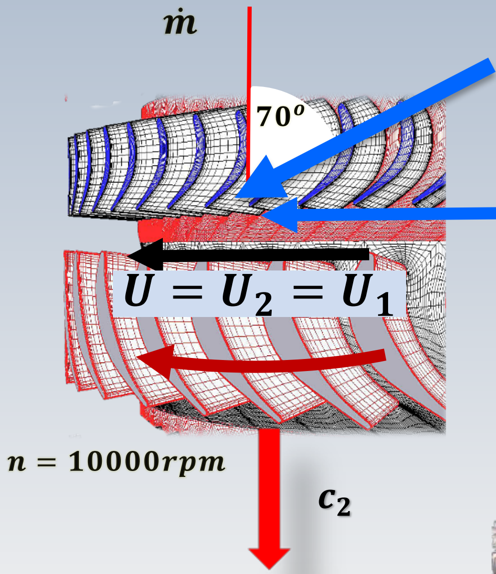
$$c_{2u} = 0$$

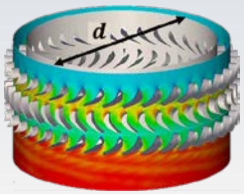
$$E = -c_{1u}\ U_1$$

Il faut alors déterminer c_{1u} et U_1

Problème

$\dot{m} = 6kg/s,\ \theta = 70^o,\ n = 10000rpm, d = 1m,\ c_1 = 97.5m/s$





$$c_{1u} = c_1 \cos 20^0 = 91.6\, m/s$$

$$U_2 = U_1 = U = \pi d\, n/60 = 523.6\ m/s$$

$$\dot{W} = \dot{m}E \quad = -\dot{m}c_{1u}\, U_1$$

$$\dot{W} = -6(k\,g/s) \times 523.6 \times 91.6$$

$$\dot{W} = -0.2877MW$$

À venir

- Le premier et le second principe de la Thermodynamique
- Surface d’état, processus réversible, entropie
- Rendement total-à-total, rendement polytropique