DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
SÉANCE DE TRAVAUX DIRIGÉS VI

Directives : *Cette séance de travaux dirigés porte sur la résolution des systèmes d'équations algébriques non linéaires et les équations différentielles.*

Systèmes d'équations algébriques non linéaires

1. On a résolu un système non linéaire par la méthode de Newton. En comparant avec la solution analytique $\vec{x}$ du système non linéaire, on a obtenu les valeurs suivantes pour la norme de l'erreur à l'itération k, $\|\vec{x} - \vec{x}^k\|_\infty$:

k	$\|\vec{x} - \vec{x}^k\|_\infty$
1	1
2	0,333333
3	$0,666667 \times 10^{-1}$
4	$0,392157 \times 10^{-2}$
5	$0,152590 \times 10^{-4}$
6	$0,23283 \times 10^{-9}$

   Quel est l'ordre de convergence de la méthode de Newton dans ce cas ? Justifier votre réponse.
   Référence : Recueil d'exercices , no. 298

2. On considère le système non linéaire

$$\begin{cases} y - \sin(\pi x) = 0 \\ y + x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

   (a) Déterminer graphiquement le nombre de solutions et leur position approximative sur l'intervalle $[-1\,,\,1]$.

   (b) Donner le système d'équations *linéaires* à résoudre à la première itération de la *méthode de Newton*, pour l'approximation initiale $(x^0, y^0) = (\frac{1}{2}\,,\,1)$ (ne pas résoudre le système linéaire).

   (c) Est-ce que la méthode de Newton va converger rapidement vers la racine $(1, 0)$ de ce système d'équations non linéaires ? *Justifier* votre réponse.

   (d) Déterminer et illustrer graphiquement le lieu des approximations initiales $(x^0\,,\,y^0)$ pour lesquels la méthode de Newton ne fonctionne pas.

   Référence : Recueil d'exercices , no. 302

Équations différentielles

3. Une méthode numérique à un pas a été utilisée pour résoudre une équation différentielle avec condition initiale. Les résultats obtenus par cette méthode en prenant des pas de temps $h = 0{,}1$ et $h = 0{,}025$ sont donnés dans le tableau suivant :

t_i	Approximation de $y(t_i)$ $(h = 0{,}1)$	Approximation de $y(t_i)$ $(h = 0{,}025)$
1,0	0,500 000	0,500 000
1,1	0,512 084	0,512 280
1,2	0,511 698	0,512 196
1,3	0,500 927	0,501 704
1,4	0,482 686	0,483 619
1,5	0,459 861	0,460 804

   (a) Sachant que $y(1{,}5) = 0{,}460\,857$, déterminer l'ordre de la méthode numérique utilisée.

   (b) En vous servant des 2 approximations de $y(1{,}2)$ données dans le tableau, obtenir une meilleure approximation de $y(1{,}2)$. Discuter de l'ordre de cette nouvelle approximation.

   Référence : Recueil d'exercices , no. 153

4. Un corps de masse M glisse à l'intérieur d'un récipient hémisphérique, sous l'influence de la gravité. Son mouvement $\theta(t)$ (en radians) est décrit par l'équation différentielle

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{R}\left(\mu \sin(\theta(t)) - \cos(\theta(t))\right) = 0,$$

   où $\mu = 0{,}006$ est le coefficient de friction, $R = 0{,}2\,\mathrm{m}$ et $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$. Initialement à $t = 0$, on a $\theta = 0$ et $\frac{d\theta}{dt} = 0$.

   (a) Transformer cette équation différentielle en un système équivalent d'équations différentielles d'ordre un. Indiquer les conditions initiales applicables au système.

   (b) Utiliser la méthode d'Euler modifiée pour calculer une approximation de $\theta(0{,}1)$ en prenant un pas $h = 0{,}1$. En déduire une aproximation de $\frac{d^2\theta(0{,}1)}{dt^2}$.

   (c) Soit E la valeur de l'erreur de l'approximation de $\theta(0{,}1)$ calculée en (b). Quelle serait approximativement la valeur de l'erreur si on avait pris un pas $h = 0{,}01$ pour calculer une autre approximation de $\theta(0{,}1)$? (**Ne pas calculer cette approximation**).

   Référence : Recueil d'exercices , no. 168

5. On considère l'équation différentielle avec condition initiale

$$y'(t) = te^{y(t)}, \quad y(0) = 0.$$

   Soit y_1 l'approximation de $y(0{,}1)$ obtenue à l'aide de la méthode **d'Euler implicite** avec un pas $h = 0{,}1$. On désire calculer une approximation de y_1. Identifier le problème à résoudre et proposer une méthode numérique pour déterminer une approximation de y_1. Préciser explicitement la (les) fonction(s) ainsi que les valeurs numériques des paramètres nécessaires à l'utilisation de votre méthode. (**On ne demande pas d'estimer y_1**).