Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal

CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
LABORATOIRE VI

Directives : *Cette séance de laboratoire vous permettra de faire l'étude de problèmes appliqués menant à des systèmes algébriques non linéaires. Elle vous permettra aussi de résoudre numériquement des systèmes d'équations différentielles. Vous devrez utiliser les fonctions* Matlab `newton_ND_sans_der.m` *et* `rk4.m` *disponibles sur le site Moodle du cours. Rédigez et présentez votre rapport en utilisant la fonction* `publish` *de* Matlab*. Voir le fichier* `RapportLab6.m`*.*

1. La pression p (en $^{\mathrm{lb}}/_{\mathrm{po}^2}$) nécessaire pour enfoncer à une profondeur d (en po) un disque circulaire de rayon r (en po) est donnée par

$$p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r, \tag{1}$$

où k_1, k_2 et k_3 sont des constantes dépendent de la profondeur d et de la consistance du sol (et non de r). Par expérience, on sait que

$$0 < k_1 < 10, \quad 0 < k_2 < 10 \quad \text{et} \quad -2 < k_3 < -1.$$

On désire déterminer numériquement les valeurs des constantes k_1, k_2 et k_3 de sorte qu'un disque de rayon 1 po requiert une pression de 10 $^{\mathrm{lb}}/_{\mathrm{po}^2}$ pour s'enfoncer de $d = 12$ po et que des disques de rayons 2 et 3 po requièrent respectivement des pressions de 12 et de 15 $^{\mathrm{lb}}/_{\mathrm{po}^2}$ pour s'enfoncer de la même profondeur ($d = 12$ po) . Identifier le problème à résoudre, justifier le choix de la méthode numérique utilisée et des paramètres nécessaires à l'utilisation de cette méthode.

Le rapport doit contenir : la description du problème à résoudre, la justification du choix de la méthode de résolution et des arguments initiaux, le programme Matlab *et le fichier de résultats (resultat.dat) de la fonction de la bibliothèque numérique utilisée.*

2. Le problème de valeurs initiales de Fehlberg est constitué du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} c''(t) = -\pi^2 t^2 c(t) - \pi \dfrac{s(t)}{\sqrt{(c(t))^2 + (s(t))^2}}; \\[2ex] s''(t) = -\pi^2 t^2 s(t) + \pi \dfrac{c(t)}{\sqrt{(c(t))^2 + (s(t))^2}}, \end{cases}$$

et des conditions initiales

$$\begin{cases} c(2\sqrt{3}) = 1; \\ c'(2\sqrt{3}) = 0; \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} s(2\sqrt{3}) = 0; \\ s'(2\sqrt{3}) = 2\pi\sqrt{3}. \end{cases}$$

La solution du problème de Fehlberg est donnée par

$$c(t) = \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad s(t) = \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right).$$

(a) Transformer le système d'équations différentielles d'ordre 2 en un système de 4 équations différentielles d'ordre 1 et donner les conditions initiales associées au système.

(b) Résoudre le système obtenu en (a) à l'aide des méthodes d'Euler explicite et de Runge-Kutta d'ordre 4 sur l'intervalle $[2\sqrt{3}\,,\, 2\sqrt{3}+1]$. Utiliser le pas temps $h_1 = 0{,}025$ pour la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Pour avoir le même nombre d'appels de fonctions pour les deux méthodes, utiliser le pas temps $h_2 = \frac{h_1}{4}$ pour la méthode d'Euler explicite. Tracer sur 3 graphiques différents :

   i. les graphes des solutions numérique et analytique de $c(t)$ en fonction du temps ;

   ii. les graphes des solutions numérique et analytique de $s(t)$ en fonction du temps ;

   iii. les graphes des solutions numérique et analytique de $s(t)$ en fonction $c(t)$;

(c) Quelles conclusions peut-on tirer des résultats obtenus en (b) ?

Le rapport doit contenir : le fichier de la fonction du système d'équations différentielles, le programme et les graphes produits par ce programme à la question (b); la discussion à la question (c).

Donatien N'Dri & Steven Dufour