DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
LABORATOIRE VI

Directives : *Cette séance de laboratoire vous permettra de faire l'étude de problèmes appliqués menant à des systèmes algébriques non linéaires. Elle vous permettra aussi de résoudre numériquement des systèmes d'équations différentielles. Vous devrez utiliser les fonctions* MATLAB `newton_ND_sans_der.m` *et* `rk4.m` *disponibles sur le site Moodle du cours. Rédigez et présentez votre rapport en utilisant la fonction* `publish` *de* MATLAB. *Voir le fichier* `RapportLab6.m`.

1. La pression p (en lb/po^2) nécessaire pour enfoncer à une profondeur d (en po) un disque circulaire de rayon r (en po) est donnée par

$$p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r, \tag{1}$$

où k_1, k_2 et k_3 sont des constantes dépendent de la profondeur d et de la consistance du sol (et non de r). Par expérience, on sait que

$$0 < k_1 < 10, \quad 0 < k_2 < 10 \quad \text{et} \quad -2 < k_3 < -1.$$

On désire déterminer numériquement les valeurs des constantes k_1, k_2 et k_3 de sorte qu'un disque de rayon 1 po requiert une pression de 10 lb/po^2 pour s'enfoncer de $d = 12$ po et que des disques de rayons 2 et 3 po requièrent respectivement des pressions de 12 et de 15 lb/po^2 pour s'enfoncer de la même profondeur ($d = 12$ po) . Identifier le problème à résoudre, justifier le choix de la méthode numérique utilisée et des paramètres nécessaires à l'utilisation de cette méthode.

Le rapport doit contenir : la description du problème à résoudre, la justification du choix de la méthode de résolution et des arguments initiaux, le programme MATLAB *et le fichier de résultats (resultat.dat) de la fonction de la bibliothèque numérique utilisée.*

2. La hauteur $x(t)$ (en m) d'un parachutiste en chute libre au temps t est solution de :

$$\begin{cases} x''(t) = -g - k(t)x'(t); \\ x(0) = 1200, \quad x'(0) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

où $g = 9{,}81$ m/s^2 est l'accélération gravitationnelle et $k(t)$ (en s^{-1}) est le coefficient de friction.

On propose dans ce problème un modèle basé sur l'observation que le parachute prend un certain temps à s'ouvrir et on définit ainsi une fonction continue et différentiable

$$k(t) = \begin{cases} \frac{2}{11} & \text{si} \quad t < t_{para}; \\ \frac{10523}{64} - \frac{5625}{128}t + \frac{1286}{333}t^2 - \frac{268}{2415}t^3 & \text{si} \quad t_{para} \le t < t_{para} + t_{ouv}; \\ 2 & \text{si} \quad t \ge t_{para} + t_{ouv}, \end{cases}$$

où $t_{para} = 10\,\mathrm{s}$ est le moment où le parachute commence à s'ouvrir et $t_{ouv} = 3{,}2\,\mathrm{s}$ est le temps que le parachute prend pour s'ouvrir complètement. Les quantités importantes dans cette modélisation sont bien sûr la hauteur $x(t)$, la vitesse $v(t) = x'(t)$, l'accélération

$$a(t) = x''(t) = -g - k(t)v(t).$$

et surtout le jerk défini par

$$j(t) = a'(t) = -k'(t)v(t) - k(t)a(t).$$

(a) i. Écrire une fonction MATLAB qui permet d'évaluer la fonction $k(t)$ pour une valeur de t donnée. Assurez-vous que votre fonction puisse prendre des vecteurs comme argument d'entrée.

ii. Écrire une autre fonction MATLAB qui permet d'évaluer la fonction $k'(t)$ pour une valeur de t donnée. Assurez-vous que votre fonction puisse prendre des vecteurs comme argument d'entrée.

(b) Transformer l'équation différentielle (2) en un système de 2 équations différentielles d'ordre 1 et identifier les conditions initiales associées au système.

(c) Résoudre le système obtenu (b) pour $t \in [0\,,\,200]$ par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Sur un même graphique (en identifiant clairement les différentes courbes), tracer les fonctions $x(t)/1000$, $v(t)/10$ et $a(t)/g$. À partir de ce graphique, déterminer la vitesse et l'accélération du parachutiste au moment de l'atterrissage. Faire plusieurs essais pour choisir le pas de temps (justifier votre choix).

(d) Résoudre le système par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour $t \in [0\,,\,15]$. Sur un même graphique (en identifiant clairement les différentes courbes), tracer les fonctions $x(t)/1000$, $v(t)/10$, $a(t)/g$ et $j(t)/g$. En vous servant des résultats obtenus, déterminer la hauteur, la vitesse et l'accélération du parachutiste à $t = 13{,}2\,\mathrm{s}$, au moment de l'ouverture du parachute. Faire plusieurs essais pour choisir le pas de temps (justifier votre choix).

(e) Les observations de l'équipe de parachutage de l'«United States Air Force Academy» (USAFA) sont les suivantes :
— la vitesse d'arrivée au sol est autour de $5\,\mathrm{m/s}$;
— l'accélération subie au moment de l'ouverture du parachute ne dépasse pas $3g$, où $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ est l'accélération gravitationnelle;
— le jerk subi est très régulier (courbe lisse).
Déterminer si l'une des observations de l'USAFA n'est pas respectée par le modèle et conclure sur le modèle utilisé pour $k(t)$.

Le rapport doit contenir : les fichiers des fonctions MATLAB *développées à la question (a); la justification du choix du pas de temps, le fichier de la fonction du système d'équations différentielles, le programme* MATLAB*, le graphe et les valeurs de la vitesse et de l'accélération au moment de l'atterrissage à la question (c); la justification du choix du pas de temps, le programme* MATLAB*, le graphe et les valeurs de la hauteur, de la vitesse et de l'accélération au moment de l'ouverture du parachute obtenus par ce programme à la question (d); finalement la discussion de la question (e).*

Donatien N'Dri & Steven Dufour