DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
SÉANCE DE TRAVAUX DIRIGÉS V

Directives : *Cette séance de travaux dirigés porte sur les équations non linéaires.*

Questions rapides

1. (a) On considère la fonction $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$. Vérifier que la fonction possède une racine dans l'intervalle $[2\,,\,2{,}4]$ et déterminer (sans faire les itérations) le nombre de chiffres significatifs minimum que l'on obtiendrait si 10 itérations de la méthode de la bissection étaient effectuées à partir de l'intervalle $[2\,,\,2{,}4]$.
Référence : Recueil d'exercices , no. 188

   (b) La fonction $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ possède une racine réelle r dans l'intervalle $[\frac{5}{4}\,,\,\frac{3}{2}]$. Pour trouver une approximation de cette racine, on se propose d'utiliser une méthode de points fixes avec la fonction
$$g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}.$$
      i. Vérifier que la racine r est un point fixe de la fonction $g(x)$.
      ii. En estimant $g'(x)$ sur un sous-intervalle approprié de $[\frac{5}{4}\,,\,\frac{3}{2}]$, en déduire que le point fixe r est attractif et que la convergence est linéaire.

   Référence : Recueil d'exercices , no. 224

   (c) Un étudiant du cours de calcul scientifique a appliqué une méthode de point fixe, la méthode de Newton et la méthode de la sécante afin de déterminer **une racine réelle d'un polynôme de degré 4 possédant une paire de racines complexes conjuguées**. Dans l'analyse de ses résultats, il a calculé les ratios $\frac{e_n}{(e_{n-1})^p}$ pour $p = 1$ et $p = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or. En créant trois tableaux pour son rapport, il a entremêlé les méthodes. Associer à chaque tableau la méthode correspondante. **Bien justifier vos choix.**

Méthode 1		Méthode 2		Méthode 3	
$\frac{e_n}{e_{n-1}}$	$\frac{e_n}{(e_{n-1})^\alpha}$	$\frac{e_n}{e_{n-1}}$	$\frac{e_n}{(e_{n-1})^\alpha}$	$\frac{e_n}{e_{n-1}}$	$\frac{e_n}{(e_{n-1})^\alpha}$
0,116 474	0,215 755	0,460 004	0,221 918	0,323 310	2,633 704
0,012 229	0,086 047	0,048 156	0,326 361	0,596 079	6,237 756
0,000 152	0,016 210	0,005 367	0,411 998	0,648 564	22,688 555
2,198E-08	0,000 531	0,000 257	0,452 120	0,662 517	471,4050
0	0	1,440E-06	0,460 771	0,664 045	13396,24

   Référence : Recueil d'exercices, no. 243

2. L'équation $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ possède une seule racine dans l'intervalle $[1\,,\,2]$. Par manipulation algébrique, on a transformé cette équation en quatre problèmes de points fixes sous la forme $g_i(x) = x$, où les fonctions $g_i(x)$ sont données par :

   i. $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$

   ii. $g_2(x) = \frac{1}{2}\left(10 - x^3\right)^{1/2}$

   iii. $g_3(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$

   iv. $g_4(x) = \dfrac{2x^3 + 4x^2 + 10}{3x^2 + 8x}$

   Le tableau suivant donne les résultats de l'algorithme de points fixes

$$\begin{cases} x_0 = 1{,}5 \\ x_{n+1} = g_i(x_n) \end{cases}$$

   pour les quatre choix précédents.

n	i)	ii)	iii)	iv)
0	1,5	1,5	1,5	1,5
1	-0,875	1,286 953 768	1,348 399 725	1,373 333 333
2	6,732	1,402 540 804	1,367 376 372	1,365 262 015
3	-469,7	1,345 458 374	1,364 957 015	1,365 230 014
4	$1,03 \times 10^8$	1,375 170 253	1,365 264 748	1,365 230 013
5		1,360 094 193	1,365 225 594	
6		1,367 846 968	1,365 230 576	
7		1,363 887 004	1,365 229 942	
8		1,365 916 734	1,365 230 022	
9		1,364 878 217	1,365 230 012	
10		1,365 410 062	1,365 230 014	
15		1,365 223 680	1,365 230 013	
20		1,365 230 236		
25		1,365 230 236		
30		1,365 230 013		

   Pour répondre aux questions suivantes, on pourra se servir du fait que la racine recherchée est $r = 1{,}365\,230\,013$ et $g_4'(r) = 0$. On pourra aussi utiliser des formules aux différences pour estimer les dérivées des fonctions au point $x = r$.

   (a) Expliquer pourquoi l'algorithme de points fixes n'a pas convergé pour le choix i).

   (b) Expliquer pourquoi la méthode iii) a convergé moins vite que la méthode iv).

   (c) Expliquer pourquoi la méthode ii) a convergé moins vite que la méthode iii).

   (d) On remarque que pour la méthode ii), les valeurs de x_n oscillent autour de la racine r. Comment expliquez-vous ce comportement ?

   Référence : du Recueil d'exercices, no. 209 (version simplifiée)

3. On désire calculer la racine positive de la fonction

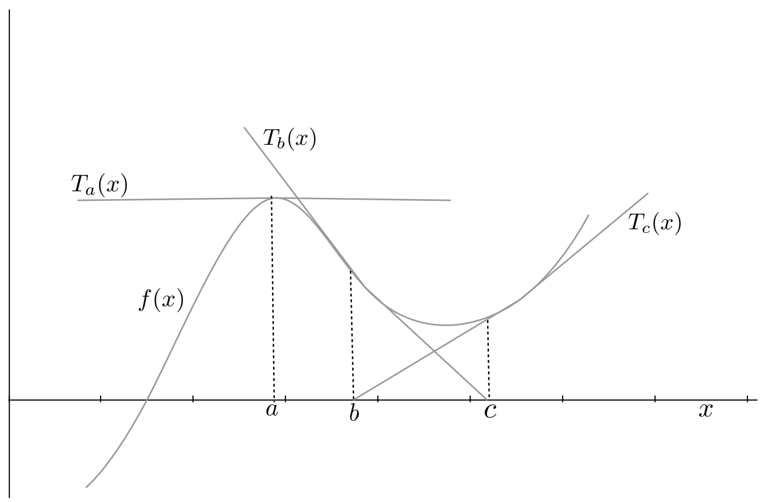
$$f(x) = x^2 - 2.$$

   (a) Tracer le graphe de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[0, 2]$ et déterminer géométriquement la position approximative de l'itérée x_2 obtenue en faisant une itération de la méthode de la sécante à partir de $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$.

   (b) Tracer le graphe de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[0, 2]$ et déterminer géométriquement la position approximative de l'itérée x_1 obtenue en faisant une itération de la méthode de la Newton à partir de $x_0 = 2$.

   Référence : Recueil d'exercices, no. 226

4. La figure suivante illustre une fonction $f(x)$ ainsi que trois de ses polynômes de Taylor de degré 1, $T_a(x)$, $T_b(x)$ et $T_c(x)$ développés respectivement autour de $x = a$, $x = b$ et $x = c$. De plus, on remarque que $T_b(c) = T_c(b) = 0$ et $T_a'(x) = 0 \quad \forall x$.



   On désire utiliser la méthode de Newton pour calculer une approximation de la racine r de la fonction $f(x)$.

   (a) Discuter de l'ordre de convergence de la méthode de Newton pour la racine r dans le cas où l'approximation initiale x_0 serait bien choisie.

   (b) Que se passe-t-il si l'on applique la méthode de Newton en partant de l'approximation initiale $x_0 = a$?

   (c) Que se passe-t-il si l'on applique la méthode de Newton en partant de l'approximation initiale $x_0 = b$?