Séries

de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$

entières $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

de Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x)$$

Intervalle de convergence avec le critère généralisé de d'Alembert : ensemble des valeurs de x pour lesquelles une série de puissances converge

Étude aux bornes

On trouve le développement en série de Maclaurin d'une fonction en :

- évaluant les dérivées successives en $x=0$;
- substituant une expression dans un série connue ;
- faisant des manipulations algébriques sur une série connue ;
- divisant ;
- utilisant l'intégrale d'une série connue.

Il est possible d'utiliser le développement en série de Malcaurin d'une fonction pour faire des approximations, à condition que l'approximation porte sur une valeur de x appartenant à l'intervalle de convergence de la série. On peut borner l'erreur commise si la série est alternée.

numériques

Séries de référence

Série géo. $\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n-1}$ cv vers $\frac{a}{1-r}$ si $-1<r<1$

Série harmonique $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

Série de Riemann $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p>1$

Critères de convergence

Critère du terme général : DV si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

Critère de d'Alembert

Converge si $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

(avec des factorielles et des exposants n)

Critère de l'intégrale

Série de même nature que $\int_k^{\infty} a_x \, dx$ si les a_n sont décroissants à partir de k

(quand a_x est intégrable)

Critère de Leibniz

CV si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ et termes décrois. à partir de k

(avec des séries alternées)

Par dépit !

Critère de comparaison

Comparaison avec une série de réf.

(avec a_n semblable à une série de réf. $\pm$ des termes)

Corollaire du crit. de comparaison

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ où b_n est une série de réf.

(avec a_n semblable à une série de réf. $\pm$ des termes)