DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
LABORATOIRE III

Directives : *Cette séance de laboratoire vous permettra d'étudier la propagation des erreurs d'arrondi sur la solution calculée par la méthode de factorisation LU de* MATLAB*. La notion de conditionnement sera aussi présentée. Rédigez et présentez votre rapport en utilisant la fonction* `publish` *de* MATLAB*. Voir le fichier* `DocdeTravailLab3.m`

1. On considère le système linéaire
$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{1}$$
où A est la matrice symétrique définie positive de Lehmer de dimensions 1000×1000 donnée par l'instruction MATLAB « `A = gallery('lehmer',1000)` » et $\vec{b}$ est le vecteur qui est tel que la solution du système (1) soit $\vec{x} = (1,1,\dots,1)^t$. On veut étudier la propagation des erreurs d'arrondi sur la solution calculée par la méthode de factorisation LU de MATLAB.
   (a) Écrire un programme MATLAB qui permet de réaliser les instructions suivantes:
      - créer la matrice A;
      - à l'aide de la fonction `sum`, créer le vecteur colonne de longueur 1000 dont les composantes sont
$$b(i) = \sum_{j=1}^{1000} A(i,j);$$
      - résoudre le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$ à l'aide de l'opérateur « \ »;
      - sachant que la solution de ce système linéaire est donnée par le vecteur $\vec{x} = (1,1,\dots,1)^t$, calculer en utilisant la norme euclidienne l'erreur relative
$$E = \frac{\|\vec{x}-\vec{x}^*\|_2}{\|\vec{x}\|_2}$$
et la norme du vecteur résidu
$$\|\vec{b} - A\vec{x}^*\|_2,$$
où $\vec{x}^*$ est la solution calculée.

   (b) Commenter et expliquer les résultats obtenus.

2. Soit B une matrice diagonale de dimensions 100×100 définie par
$$B(1\,,\,1) = 1 \quad \text{et} \quad B(i\,,\,i) = 0{,}1 \quad \text{pour} \quad i = 2,3,\dots,100$$
et C une matrice triangulaire supérieure bidiagonale d'ordre 100 définie par
$$C(i\,,\,i) = 1 \quad \text{pour} \quad i = 1,2,\dots,100 \quad \text{et} \quad C(i\,,\,i+1) = 2 \quad \text{pour} \quad i = 1,2,\dots,99.$$
   (a) Après avoir initialisé les matrices B et C dans MATLAB, calculer leur déterminant et leur conditionnement avec la norme $\|\ \|_2$.
   Indice: Utiliser les fonctions MATLAB `det` *et* `cond`*.*

(b) Une matrice est bien ou mal conditionnée selon que son conditionnement est petit (près de 1) ou grand. Les matrices mal conditionnées ont souvent un déterminant voisin de 0. À la lueur des résultats obtenus en (a), est-ce qu'on peut affirmer que le déterminant d'une matrice est une indication du bon ou du mauvais conditionnement d'une matrice?

3. Soit

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

le polynôme de degré n passant par les $(n+1)$ points de collocation de coordonnées $(x_i\,,\, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, 2, \cdots, n$.

Le système pour obtenir les coefficients a_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ est donné par

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

La matrice de ce système linéaire porte le nom de matrice de Vandermonde.

(a) On considère les $(n+1)$ points d'interpolation $(x_i, f(x_i))$ choisis de telle sorte que les abscisses x_i soient équidistantes dans l'intervalle $[0, 1]$.

Écrire un programme qui permet de réaliser les instructions suivantes :

pour $n = 1, 2, \ldots, 40$:

- créer la matrice de Vandermonde de dimensions $(n+1) \times (n+1)$;
- calculer le déterminant de la matrice de Vandermonde de dimensions $(n+1) \times (n+1)$;
- présenter les résultats à l'aide de la commande `fprintf` dans un tableau de 2 colonnes contenant les valeurs de $(n+1)$ et du déterminant;
- calculer le conditionnement de la matrice de Vandermonde de dimensions $(n+1) \times (n+1)$ à l'aide de la norme $\| \|_\infty$;
- tracer à l'aide de la commande `semilogy` le graphe du conditionnement en fonction de $(n+1)$;

Indice: Utiliser les fonctions MATLAB *`det` et `cond`.*

(b) Commenter les résultats obtenus et expliquer avec preuves à l'appui pourquoi la méthode basée sur la matrice de Vandermonde est rarement utilisée pour déterminer le polynôme d'interpolation de degré n?

Donatien N'Dri & Steven Dufour