Question 1

Pour chacun des énoncés suivants, dites s'il est vrai ou faux. Si l'énoncé est vrai, justifiez votre réponse en faisant appel à l'un des théorèmes vus au cours. Sinon, justifiez en donnant un contreexemple montrant que l'énoncé est faux.

- Le graphe de la fonction f définie sur l'intervalle $[-9, 2]$ par $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 7x - 18}$ possède une tangente horizontale en un point de cet intervalle.
- Pour tout $x \geq 0$, $\arctan(x) \geq \frac{x}{1+x^2}$.

Question 2

Les sous-questions suivantes sont indépendantes.

- On considère la surface D délimitée par les courbes $y = \cos(x)$, $y = 0$ pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
 - Déterminez l'aire de la surface D .
 - Déterminez le volume du solide engendré par la rotation de la surface D autour de la droite $x = \pi$.
- Déterminez la longueur de la courbe définie par $(x+1)^2 = 16y^3$; $y \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$ et $x \geq -1$.

Question 3

On considère la série $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n} - e^{1/(n+1)} \right)$.

- Donnez l'expression de la suite des sommes partielles de la série.
- En utilisant la suite des sommes partielles, déterminez si la série est convergente ou divergente. Si la série converge, donnez sa somme.

Question 4

Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes. Justifiez brièvement vos réponses.

- Toute suite bornée converge.
- Si la suite $\{u_n\}_{\{n \geq 1\}}$ diverge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge.
- Si les termes d'une suite sont définis par $a_1 = 2$ et $a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3}a_n$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
- La série $\sum_{n=0}^{\infty} (\arctan(n))^n$ diverge.

Question 5

Soit g une fonction définie par $g(x) = \arctan(x)$.

- Déterminez la série de Taylor $S(x)$ de la fonction g autour de 0.
- Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série $S(x)$.

3. Utilisez les résultats de 1) et 2) pour montrer que :

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \dots$$

(indice : rappelez-vous que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$).

Question 6

Nous pouvons modéliser par l'ÉDO $\frac{dv}{dt} = \frac{-k}{m}v + g$ la chute d'une bille dans un fluide, avec $k > 0$, m la masse de la bille et g l'attraction terrestre. Déterminez v en fonction de t .

Question 7

Les sous-questions suivantes sont indépendantes.

a) En faisant apparaître une somme de Riemann puis en calculant la valeur de l'intégrale, déterminez :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2 + i^2}.$$

Indice : Considérez l'intervalle $[0, 1]$

b) Déterminez les valeurs de $\beta > 0$, pour laquelle l'intégrale suivante est convergente et pour laquelle elle est divergente.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x [\ln(x)]^\beta} dx.$$