Problème 1 : Solution analytique

Problème : $-K\dfrac{d^2T}{dx^2} = f$ (1)

avec $T(x=0) = T_a$ (2)

et $T(x=L) = T_b$ (3)

$$(1) \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{f}{K}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{f}{K}x + C_1$$

$$\Rightarrow T = -\frac{1}{2}\frac{f}{K}x^2 + C_1 x + C_2 \quad (4)$$

(2) dans (4) $\Rightarrow T(x=0) = T_a = -\dfrac{1}{2}\dfrac{f}{K}(0)^2 + C_1(0) + C_2$

$= C_2 \Rightarrow C_2 = T_a$

(3) dans (4) $\Rightarrow T(x=L) = T_b = -\dfrac{1}{2}\dfrac{f}{K}L^2 + C_1 L + T_a$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{T_b - T_a}{L} - \frac{1}{2}\frac{f}{K}L$$

Donc :

$$\boxed{T(x) = -\frac{1}{2}\frac{f}{K}x^2 + \left(\frac{T_b - T_a}{L} - \frac{1}{2}\frac{f}{K}L\right)x + T_a}$$

à $x = 0.01$ (noeud 2)

$$T(0.01) = -\frac{1}{2}\frac{10^7}{100}\times 0.01^2 + \left(\frac{-20-20}{0.04} + \frac{1}{2}\frac{10^7}{100}\times 0.04\right)0.01 + 20$$

$$= 25°C$$

Solution numérique : $T(0.01) = 24.99999°C$

solution quasi parfaite aux arrondis près

Problème 2 : Solution analytique

Problème : $-K \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (1)$

avec $T(x=0) = T_a \quad (2)$

et $-K \left.\frac{dT}{dn}\right|_{x=L} = -K \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = h_w (T_L - T_\infty) \quad (3)$

où $T_L = T(x=L)$ est inconnue

$(1) \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{dT}{dx} = C_1$

$\Rightarrow T = C_1 x + C_2 \quad (4)$

(2) dans (4) $\Rightarrow T(x=0) = C_1(0) + C_2 = T_a$

$\Rightarrow C_2 = T_a$

Maintenant à $x = L \Rightarrow T(x=L) = T_L \quad (5)$

(5) dans (4) $\Rightarrow T_L = C_1 L + T_a$

$\Rightarrow C_1 = \frac{T_L - T_a}{L} \quad (6)$

De (3) on tire : $T_L = -\frac{K}{h_w} \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} + T_\infty \quad (7)$

De (4) et (6) on tire : $\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = C_1 = \frac{T_L - T_a}{L} \quad (8)$

(8) dans (7) $\Rightarrow T_L = -\frac{K}{h_w}\left(\frac{T_L - T_a}{L}\right) + T_\infty$

$$\Rightarrow T_L = \frac{\frac{K}{h_w L} T_a + T_\infty}{\left(1 + \frac{K}{h_w L}\right)}$$

Donc $\boxed{T(x) = \frac{T_L - T_a}{L} x + T_a}$

avec $T_L = \frac{\frac{K}{h_w L} T_a + T_\infty}{\left(1 + \frac{K}{h_w L}\right)} = \frac{K T_a + h_w L T_\infty}{h_w L + K}$

Si $h_w \to \infty$ alors $\frac{K}{h_w L} \to 0 \Rightarrow T_L \to T_\infty$

Si $h_w \to 0$ alors $h_w L \to 0 \Rightarrow T_L \to T_a$