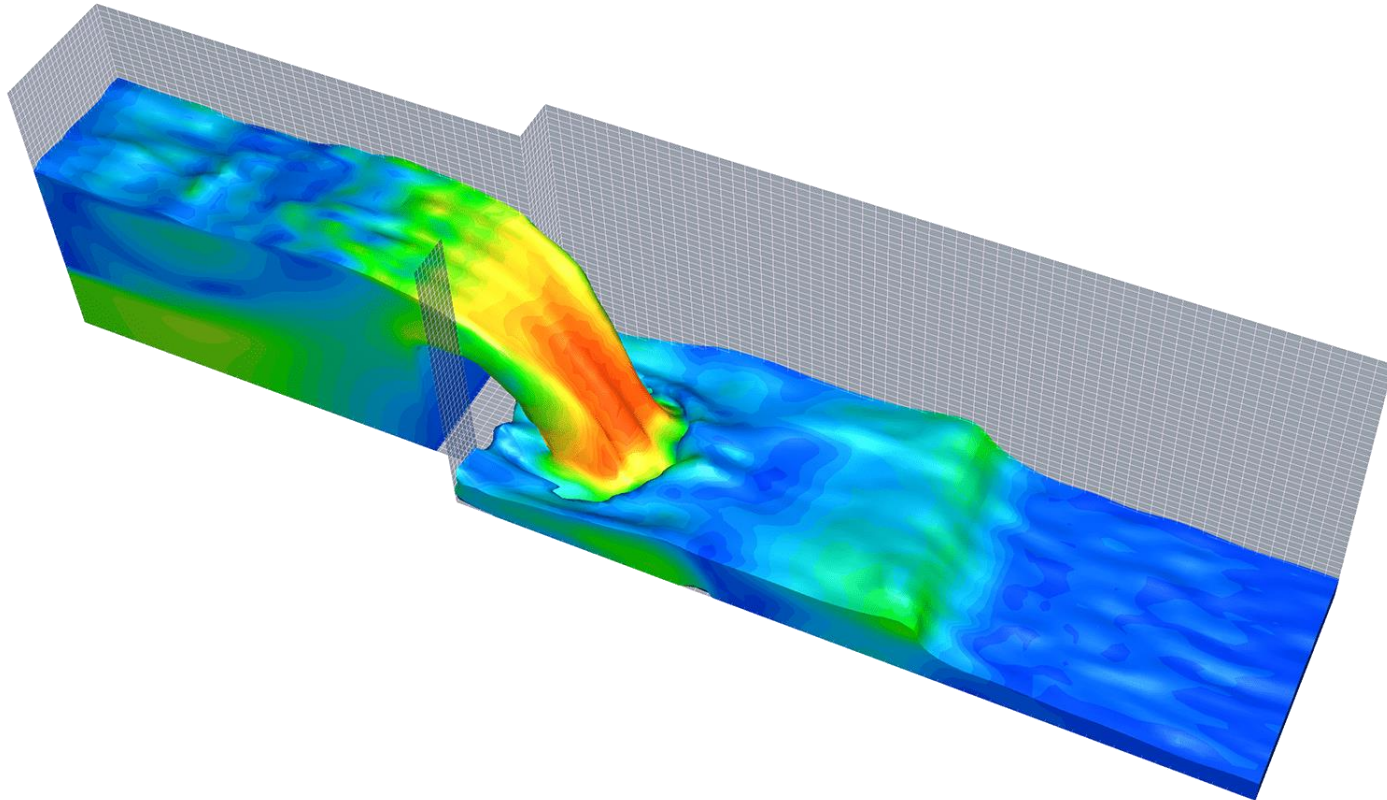


Modélisation numérique en génie chimique

GCH2535

Méthode des éléments finis (MEF)



**POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL**

LE GÉNIE
EN PREMIÈRE CLASSE

Diapositives adaptées de :
David Vidal
Bruno Blais
François Bertrand



Plan de cours

Semaine	Date	Séance	Notes	Sujet
2	Mercredi 8 Jan	1		EDP
2	Jeudi 9 Jan	2		EDP
3	Mercredi 15 Jan	3		EDP
3	Jeudi 16 Jan	4	Départ Devoir 1 (EDP)	EDP
4	Mercredi 22 Jan	5		EDP
4	Jeudi 23 Jan	6		TD#1
5	Mercredi 29 Jan	7	Remise Devoir 1 (EDP)	Intro
5	Jeudi 30 Jan	8		Intro / EDO
6	Mercredi 5 Fév	9	Partiel 1 (EDP)	CP#1
6	Jeudi 6 Fév	10		EDO
7	Mercredi 12 Fév	11	Départ Devoir 2 (MDF)	TD#2
7	Jeudi 13 Fév	12		MDF
8	Mercredi 19 Fév	13		MDF
8	Jeudi 20 Fév	14		MEF
9	Mercredi 26 Fév	15		TD#3 (LAB-MDF)
9	Jeudi 27 Fév	16		MEF
10	Mercredi 4 Mar		Relâche	
10	Jeudi 5 Mar		Relâche	
11	Mercredi 11 Mar	17	Remise Devoir 2 (MDF)	TD#4 (LAB-MEF)
11	Jeudi 12 Mar	18	Partiel 2 (EDO-MDF-MEF)	CP#2
12	Mercredi 18 Mar	19		Données exp.
12	Jeudi 19 Mar	20	Départ Devoir 3	Données exp.
13	Mercredi 25 Mar	21		Bilans
13	Jeudi 26 Mar	22		TD#5
14	Mercredi 1 Avr	23		Bilans
14	Jeudi 2 Avr	24		Opt./Rec.
15	Mercredi 8 Avr	25	Remise Devoir 3	Opt./Rec.
15	Jeudi 9 Avr	26		TD#6

Les tenseurs : objet mathématique utile à la physique

- Ordre 0 : scalaire

→ Température

→ Concentration

- Ordre 1 : vecteur

→ Vitesse

→ Force

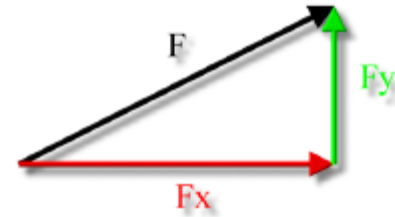
→ Déplacement

- Ordre 2 : matrice

→ Contraintes

→ Permeabilité

- Ordre 3 : essayez d'imaginer ça si vous le pouvez ...



$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \delta_{ij}$$

Notation des tenseurs

$$f = 3$$

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T = u_i$$

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \delta_{ij}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = u_i v_j \mathcal{E}_{ijk}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{e}_x - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \mathbf{e}_y + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{e}_z$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} () \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} () \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} () \mathbf{e}_z$$

Utilisation du vecteur nabla

Usage of ∇	Scalar – Cartesian coordinates f	Vector – Cartesian coordinates u
Gradient	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}(f)\mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}(f)\mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}(f)\mathbf{e}_z$	$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$
Divergence	-----	$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$

Utilisation du vecteur nabla

Usage of ∇	Scalar – Cartesian coordinates f	Vector – Cartesian coordinates \mathbf{u}
Curl	-----	$\nabla \times \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{bmatrix}$
Laplacian	$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\nabla^2 \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2}$

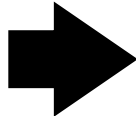
Méthode des éléments finis - Objectif

Objectif :

- **Transformer** une **équation aux dérivées partielles** continue valable sur un domaine continu en un **système linéaire à N équations pour N inconnues**, dont les équations sont associées à un domaine discret appelé maillage.

$$L \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t}, \dots \right) + f = 0$$

+ Conditions Frontières
+ Conditions Initiales (transitoire)



$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}$$

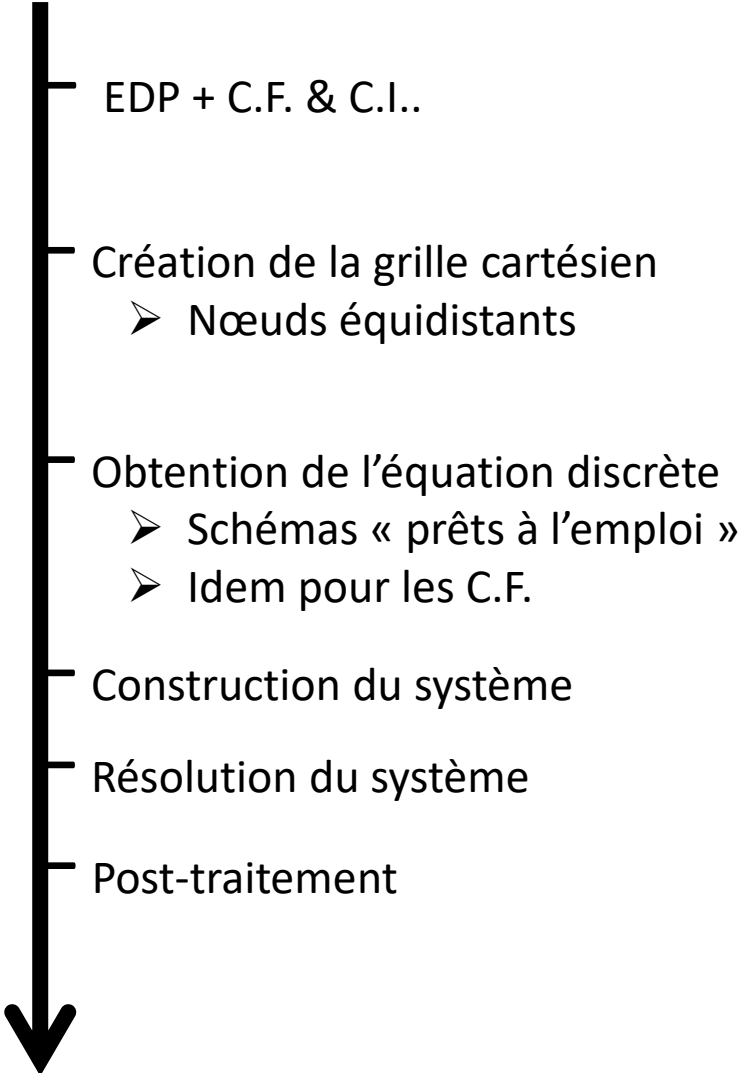
Les inconnues ne sont plus nécessairement associées à un maillage cartésien structuré (grille)

Méthode :

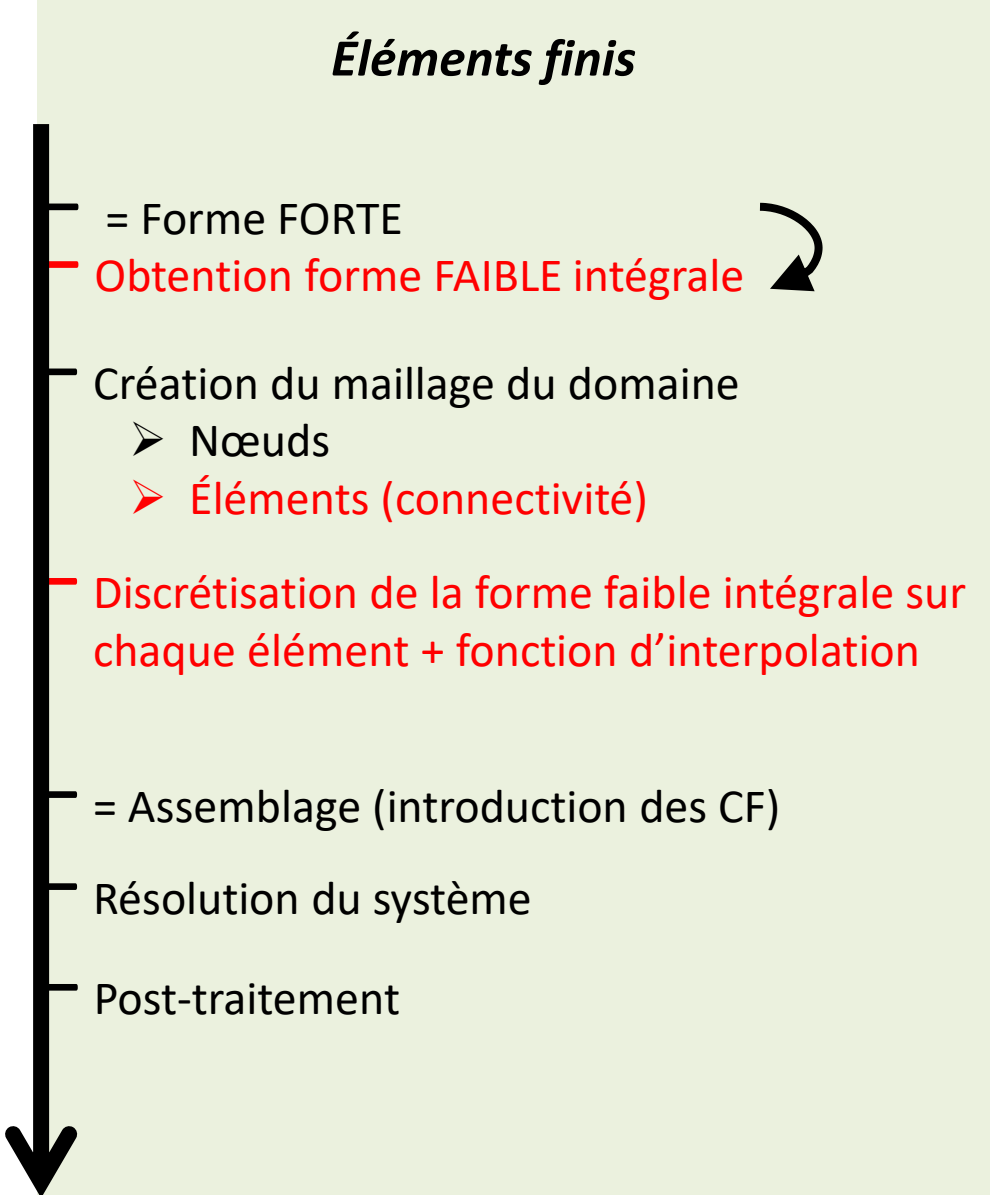
- **Écrire sous forme discrète** ($i-1, i, i+1 \dots$), non plus l'EDP, mais une **forme « affaiblie »** de cette équation par l'entremise de fonctions d'interpolation exprimées en chaque élément du maillage

Comparaison MDF vs. MEF

Différences finies (rappel)

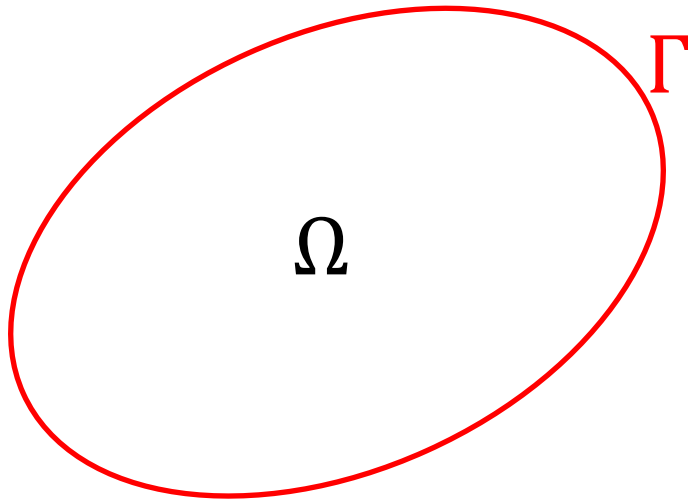


Éléments finis



Technique d'affaiblissement par la méthode des résidus pondérés

- Prenons l'exemple en conduction thermique suivant:



$$-\kappa \nabla^2 T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

avec

$$T(\mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma$$

$$\frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n} = \alpha, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma$$

ou

Définition : nous appelons résidu (noté Res), l'expression mathématique suivante liée au problème étudié :

$$Res(T) = k \nabla^2 T(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})$$

Ce résidu s'annule quand $T(\mathbf{x})$ est la solution.

Méthode des résidus pondérés

1. Pondération du résidu par une fonction-test :

$$\underbrace{\varphi(\mathbf{x})}_{\text{fonction-test}} \times \underbrace{(\kappa \nabla^2 T(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}))}_{\text{résidu}} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } \forall \varphi(\mathbf{x})$$

2. Intégration sur le domaine :

$$\int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot (\kappa \nabla^2 T(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})) d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } \forall \varphi(\mathbf{x})$$
$$-\kappa \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla^2 T(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) d\Omega$$

Formulation intégrale FORTE

Méthode des résidus pondérés

3. Intégration par parties (formule de Green en 2D et 3D) :

$$-\kappa \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla^2 T(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) d\Omega, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } \forall \varphi(\mathbf{x})$$

$$\kappa \left(\int_{\Omega} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla T(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma \right) = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) d\Omega$$

Formulation intégrale FAIBLE

Motivations :

1. Réduction de l'ordre maximum des dérivées présentes
2. Introduction « naturelle » des conditions frontières

Rappel : intégration par parties en 1D

$$\int_0^L \psi(x) \frac{dT(x)}{dx} dx = - \int_0^L \frac{d\psi(x)}{dx} T(x) dx + [\psi(x) T(x)]_0^L$$

$$\int_0^L \psi(x) \frac{d^2T(x)}{dx^2} dx = - \int_0^L \frac{d\psi(x)}{dx} \frac{dT(x)}{dx} dx + \left[\psi(x) \frac{dT(x)}{dx} \right]_0^L$$

Formes forte et faible

Particularité de la méthode des éléments finis (MEF) :

Discrétiser, non pas l'EDP associée au problème (forme forte), mais une forme « affaiblie » de cette équation

Vocabulaire :

cette forme est dénommée diversement :

- Forme/formulation faible
- Forme/formulation intégrale
- Forme/formulation variationnelle
- ...

Motivation :

affaiblir pour réduire certaines contraintes mathématiques (p.ex. discontinuités) empêchant l'utilisation d'outils classiques pour sa résolution

Conséquence :

la solution d'une forme faible correspond à une solution approchée ou « faible » en termes de continuité

Méthode des résidus pondérés

4. Introduction des conditions frontières :

$$\kappa \left(\int_{\Omega} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla T(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma \right) = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) d\Omega$$

- Traitement des conditions de **Neumann**:

$$\frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n} = \alpha, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma$$

$$\kappa \left(\int_{\Omega} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla T(\mathbf{x}) d\Omega - \alpha \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{x}) d\Gamma \right) = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) d\Omega$$

- Traitement des conditions de **Dirichlet**, deux possibilités:

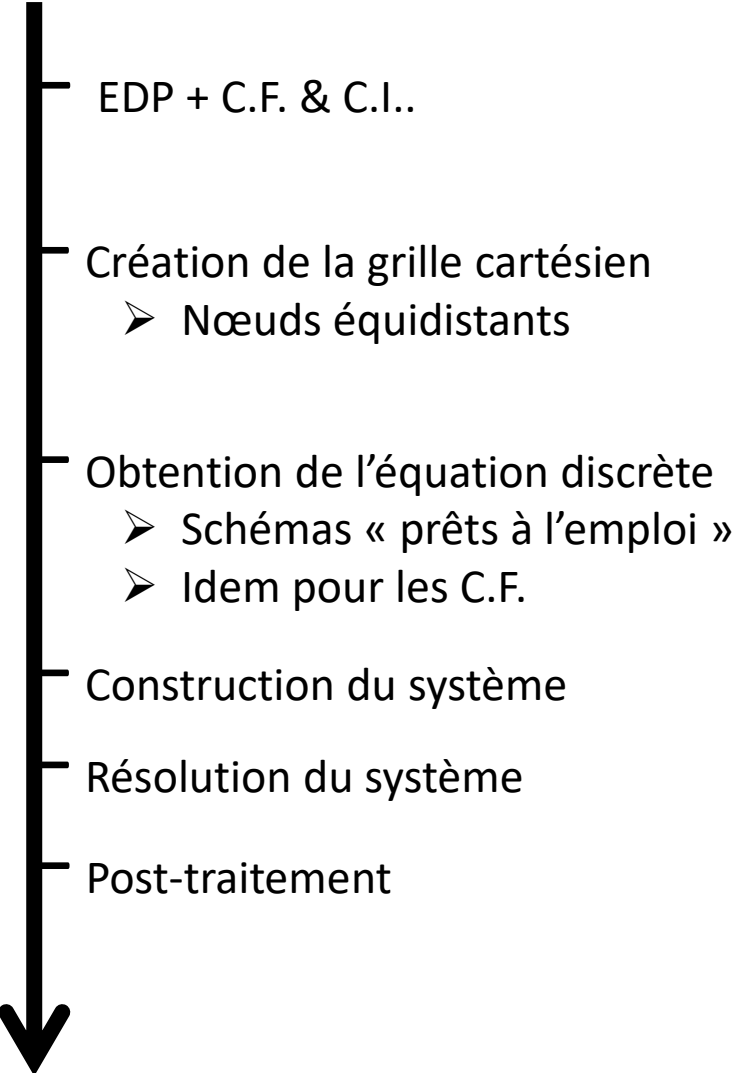
1. Introduction d'un flux inconnu $q(\mathbf{x})$ pour $\forall \mathbf{x} \in \Gamma$: $-k\varphi(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n} = \varphi(\mathbf{x})q(\mathbf{x})$

$$\kappa \int_{\Omega} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla T(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) d\Omega$$

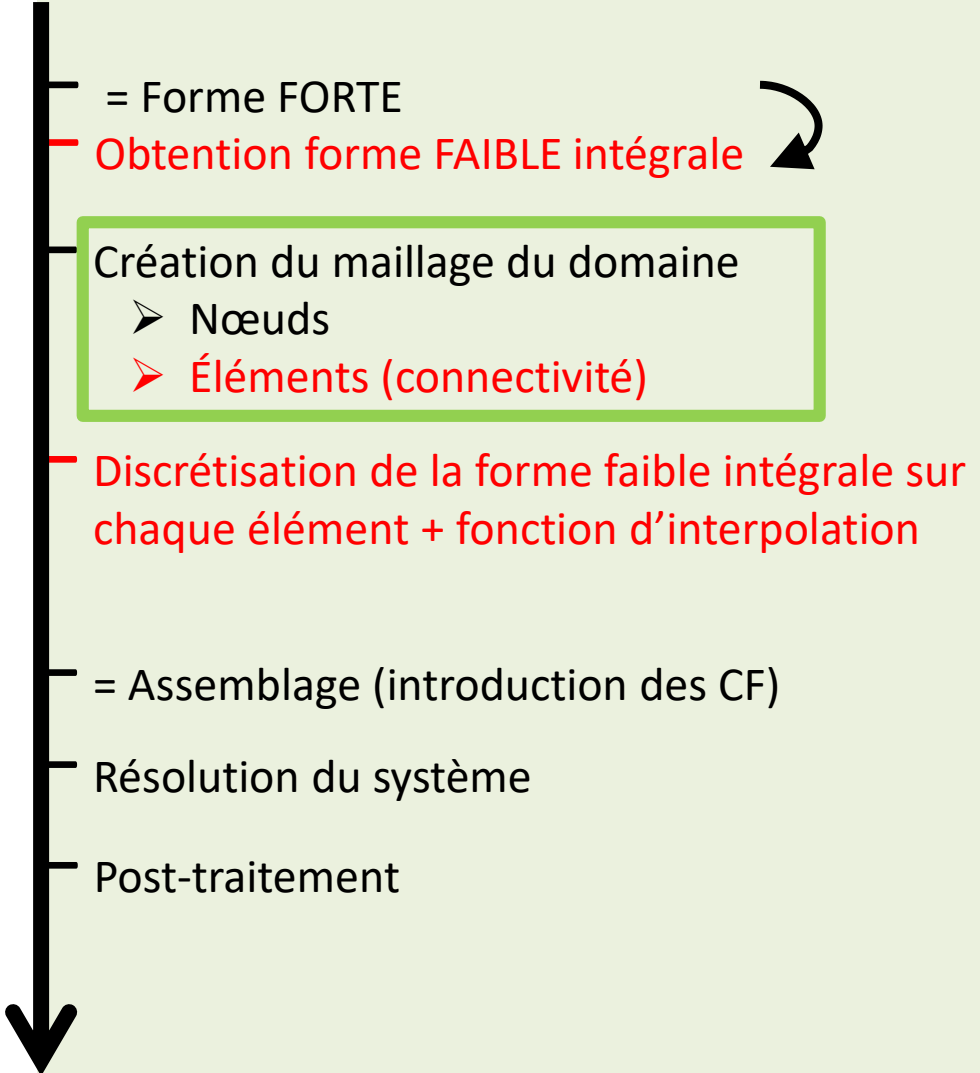
2. Élimination pure et simple du terme et réintroduction manuelle lors de la phase d'assemblage (voir plus loin)

Comparaison MDF vs. MEF

Différences finies (rappel)

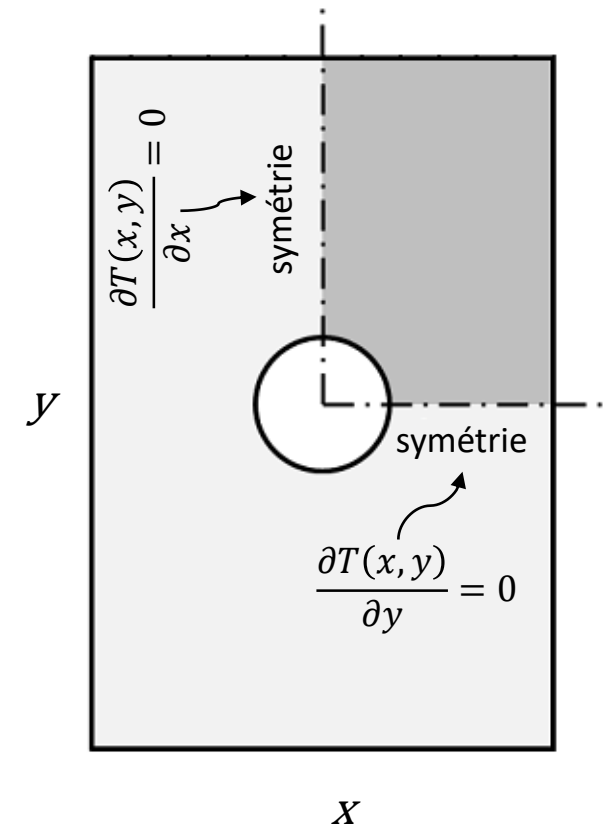


Éléments finis



Bonne préparation de la géométrie

- Elle permet de faciliter la réalisation du maillage et d'abaisser le coût des calculs
- Quatre points sont à examiner :
 - le **choix de la dimensionnalité** du domaine considéré et/ou du maillage
 - l'**exploitation des symétries** des modèles (p.ex. axisymétrie?)
 - la **suppression des détails géométriques superflus**
 - la **délimitation des régions** où seront affectés des modèles de comportements ou d'environnements différents (p.ex. matériau multicouche)



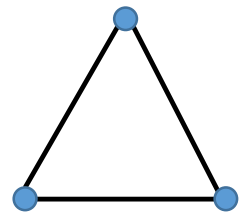
Types d'éléments finis (linéaires)

1D

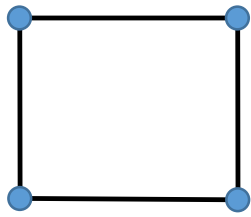


Barre

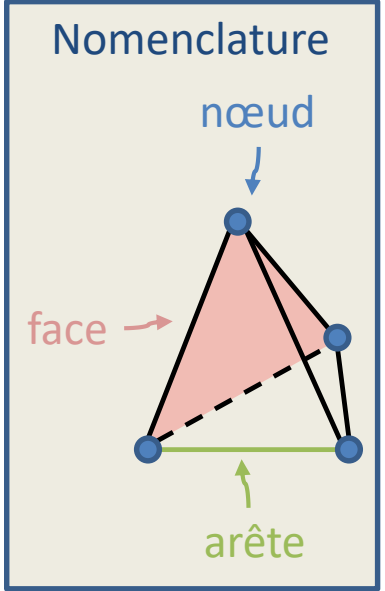
2D



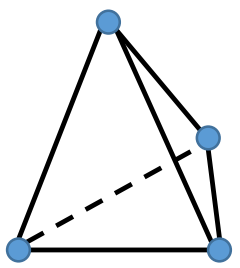
Triangle



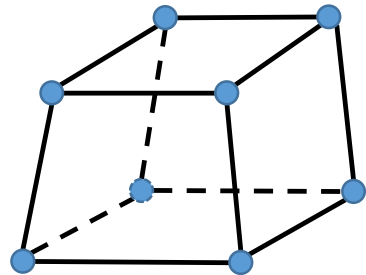
Rectangle



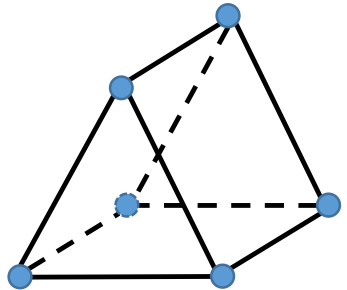
3D



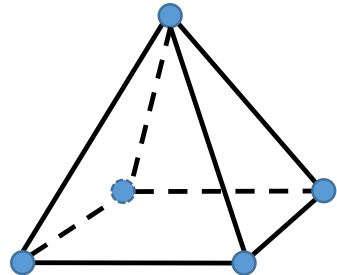
Tétraèdre



Hexaèdre



Pentaèdre
ou prisme



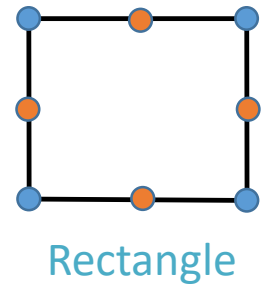
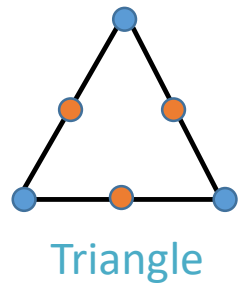
Pyramide

Types d'éléments finis (quadratiques)

1D



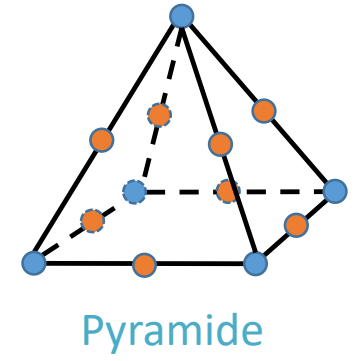
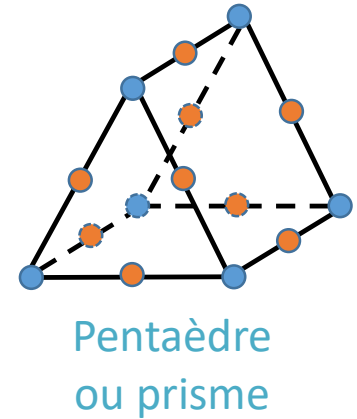
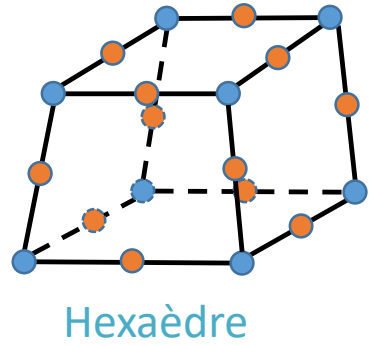
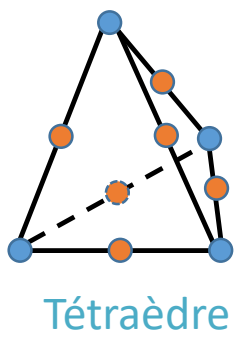
2D



Nomenclature

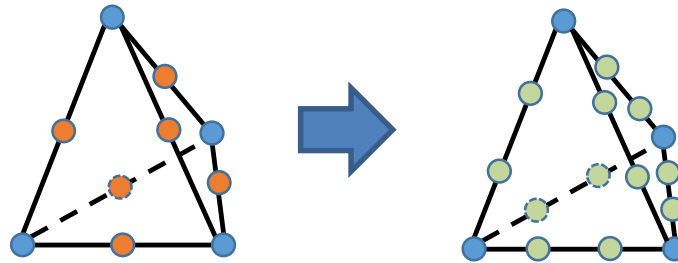
nœud d'arête
utilisé pour
l'interpolation
quadratique

3D



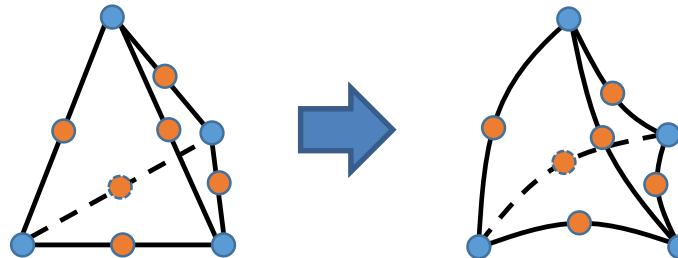
Autres types d'éléments finis

- **Éléments finis cubiques** : plus riches contenant 2 nœuds par arête (en plus des nœuds aux coins) – utilisation plus rare



Exemple pour un tétraèdre

- **Éléments finis quadratiques à arêtes curvilignes** pour mieux épouser les géométries courbes :

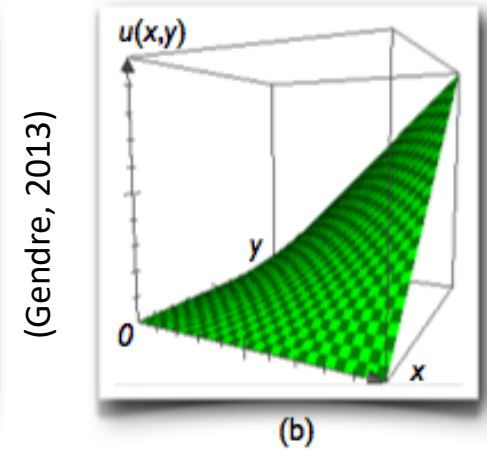
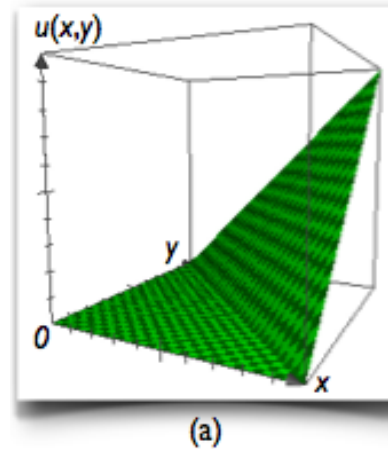


Exemple pour un tétraèdre

Choix du type et de la richesse des éléments

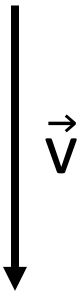
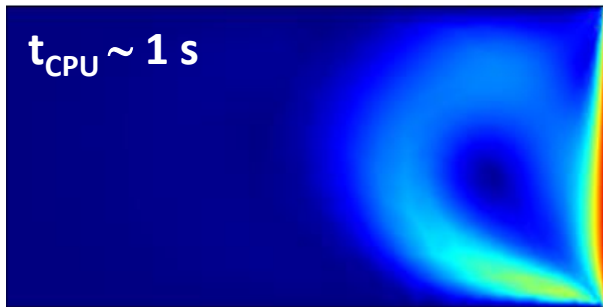
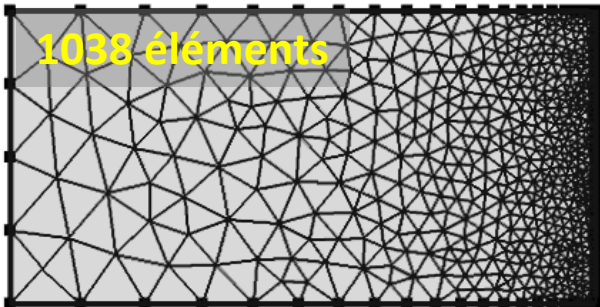
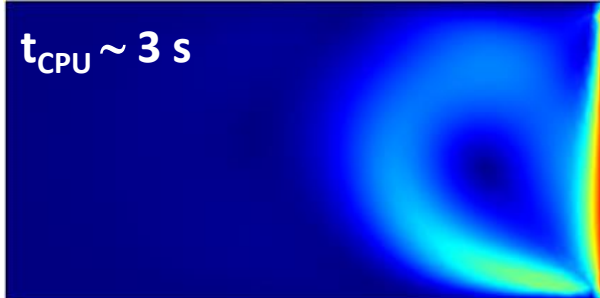
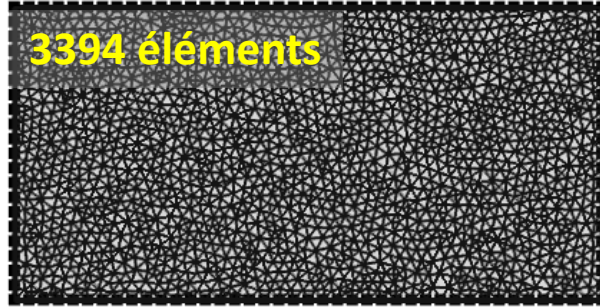
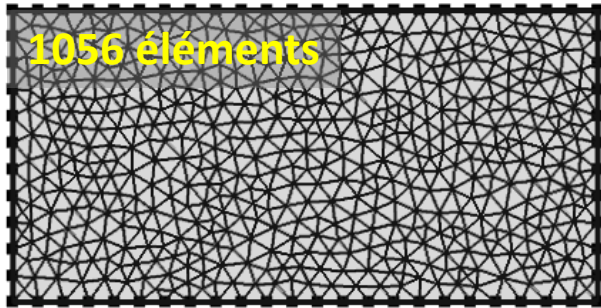
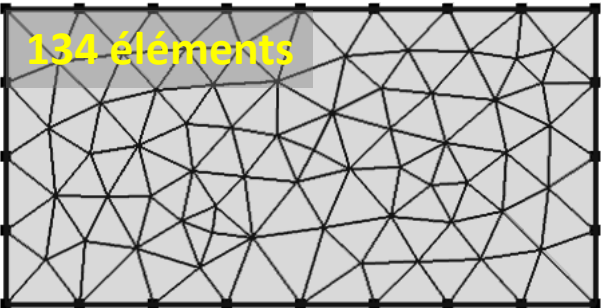
1. De façon générale, les **rectangles et hexaèdres sont plus précis** que les triangles, tétraèdres et prismes à nombre de nœuds égal, car leurs fonctions d'interpolation sont plus riches et peuvent donc représenter les gradients de façon plus régulière

Interpolation d'un champ $u(x,y)$ par deux éléments triangulaires linéaires (a) et par un élément rectangulaire linéaire (b)



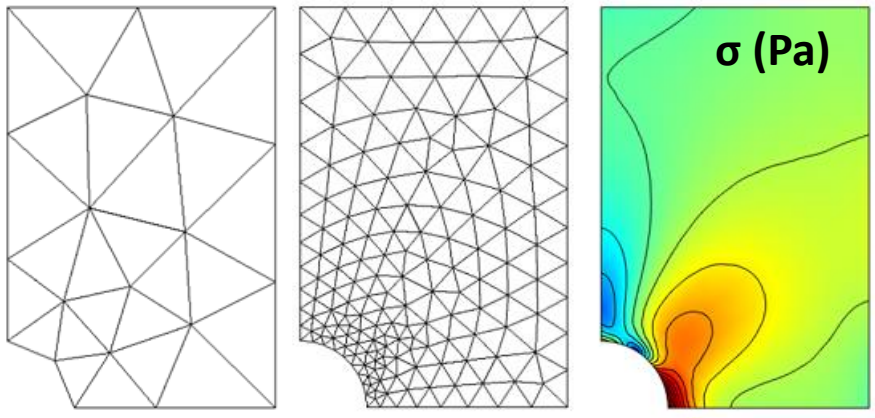
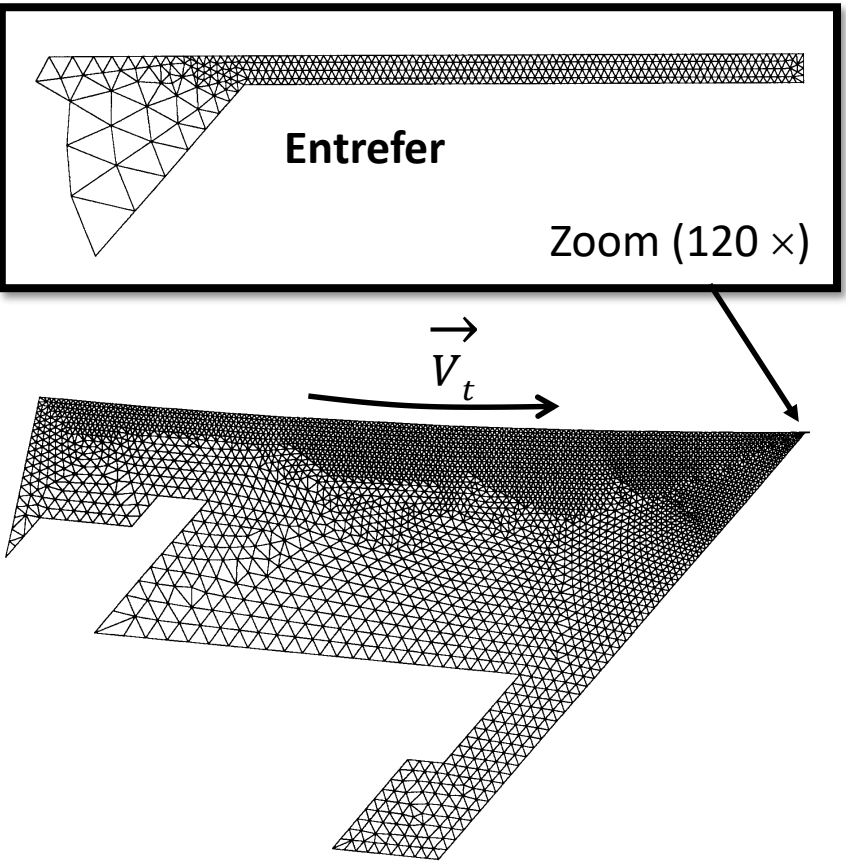
2. En revanche, les **triangles et tétraèdres permettent de créer des maillages mieux adaptés aux géométries complexes** à l'aide d'algorithmes de génération de maillage automatisée plus performants (p.ex. triangulation de Delaunay)
3. Les **éléments quadratiques** représentent un **bon compromis** entre **precision** et **temps de calcul**
 - par défaut, COMSOL (version 4) utilise des éléments quadratiques pour la plupart des types de problèmes physiques (modules)
 - deux exceptions: les modules **Fluid Flow** et **Chemical Species Transport** qui utilisent par défaut des éléments linéaires → problèmes dominés par l'advection

Raffinement du maillage requis par la physique du problème



- Il convient de **raffiner le maillage** dans les zones de **forts gradients** du champ d'intérêt (ici la vitesse du fluide dans une cavité entraînée) pour améliorer la précision à faible coût

Raffinement/enrichissement du maillage requis par la géométrie du problème



(Comsol, 2013)

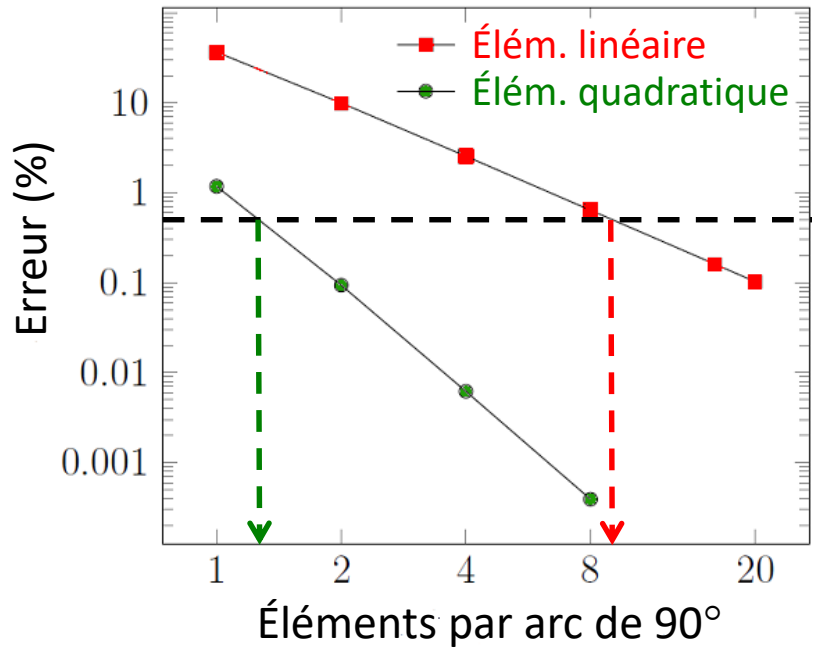
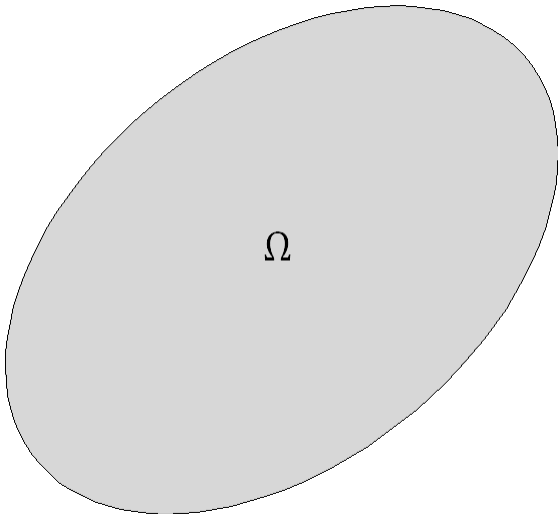
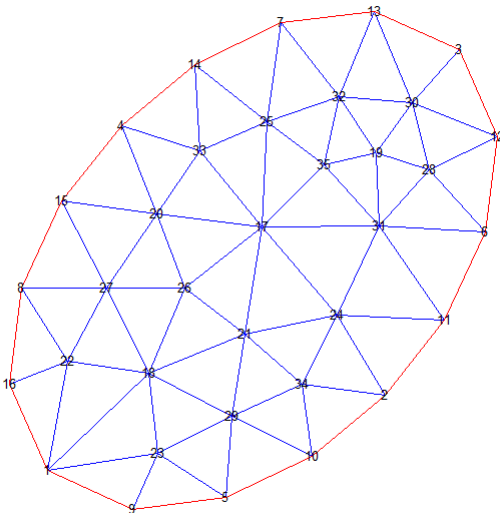


Table des connectivités des éléments

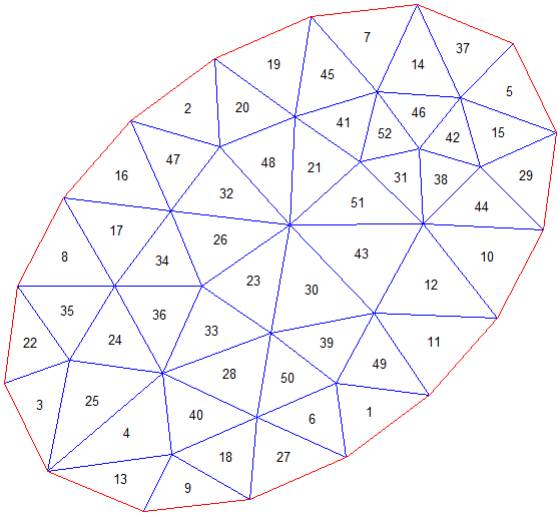
- Les numéros de nœuds globaux associés à chaque élément sont stockés dans la table des connectivités (liste de voisins)



Domaine



Numérotation des nœuds



Numérotation des éléments

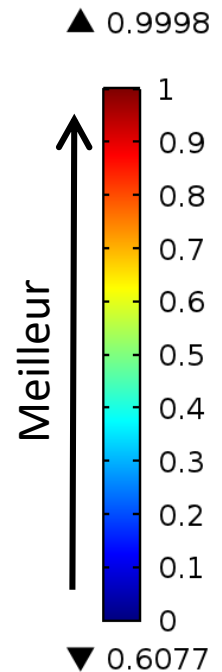
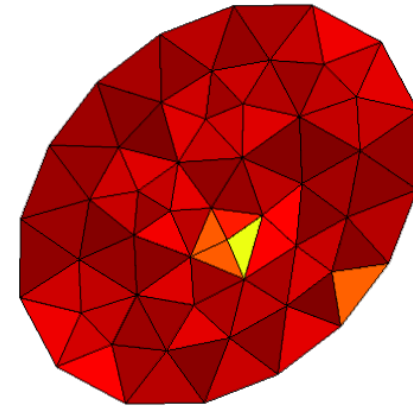
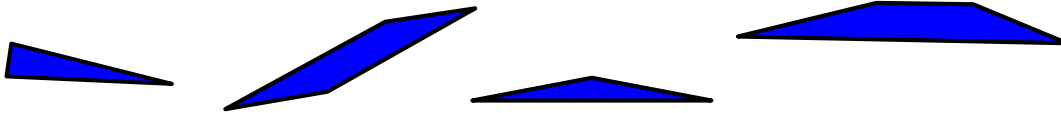
<u>No. élément</u>	<u>No. des nœuds</u>		
1	10	2	34
2	4	33	14
3	1	22	16
...
52	35	19	32

Qualité des éléments – éviter les éléments distordus!

✓ Éléments de bonnes proportions



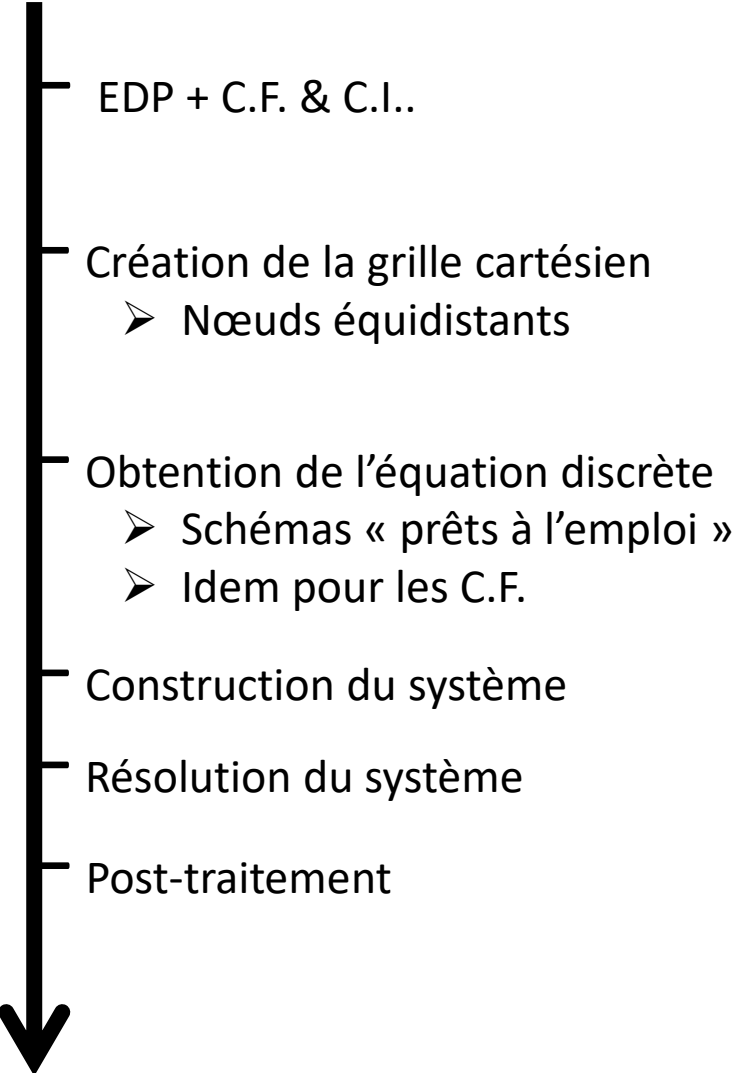
✗ Éléments trop aplatis ou étirés



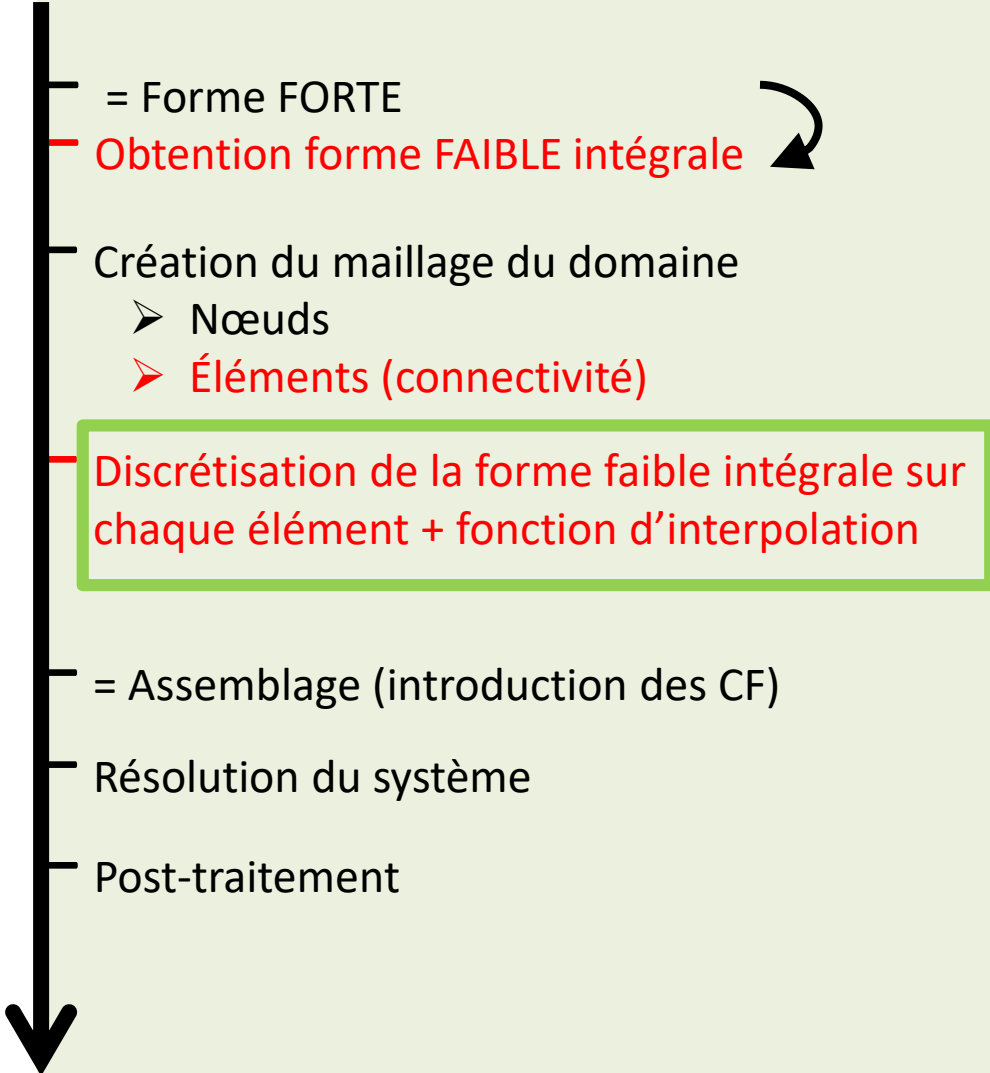
- Surviennent souvent lorsque l'on tente de **mailler des détails géométriques de petite taille** avec des éléments trop grands
- Peuvent nuire à la pertinence du résultat de plusieurs façons :
 - fonctions de base d'allure irrégulière → polarisation du champ d'intérêt selon certaines directions
 - possible dégradation du conditionnement du système d'équations résolu

Comparaison MDF vs. MEF

Différences finies (rappel)



Éléments finis



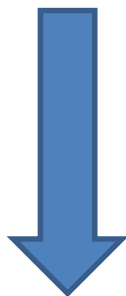
Discrétisation de la forme faible intégrale par un ensemble d'éléments

$$\kappa \left(\int_{\Omega} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla T(\mathbf{x}) \, d\Omega - \alpha \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{x}) \, d\Gamma \right) = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) \, d\Omega$$



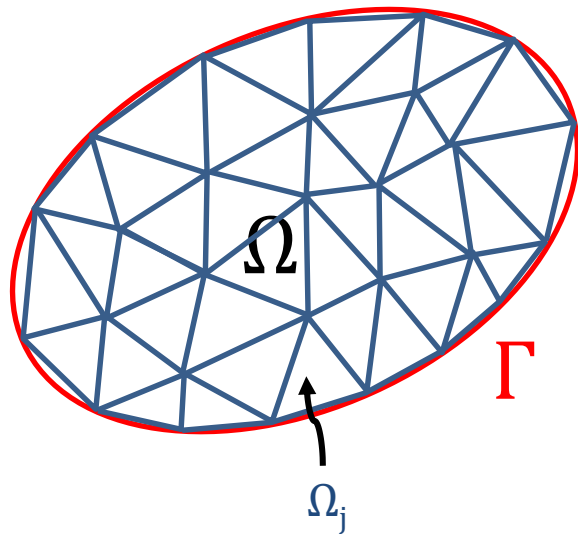
Supposons ici pour simplifier $\alpha = 0$

$$\kappa \left(\int_{\Omega} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla T(\mathbf{x}) \, d\Omega \right) = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) \, d\Omega$$



$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{N_e} \Omega_j$$

$$\Omega_l \cap_{l \neq m} \Omega_m = \emptyset$$



$N_e =$ nombre d'éléments finis

$$\kappa \left(\sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Omega_j} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla T(\mathbf{x}) \, d\Omega_j \right) = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Omega_j} \varphi(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) \, d\Omega_j$$

On souhaite maintenant se "débarrasser" de ce gradient...

$\forall \mathbf{x} \in \Omega$ et $\forall \varphi(\mathbf{x})$

Formulation intégrale faible discrétisée

Introduction des fonctions d'interpolation en chaque élément

- En chaque élément contenant N_n nœuds, nous pouvons interpoler le champ d'intérêt par :

Polynôme de Lagrange

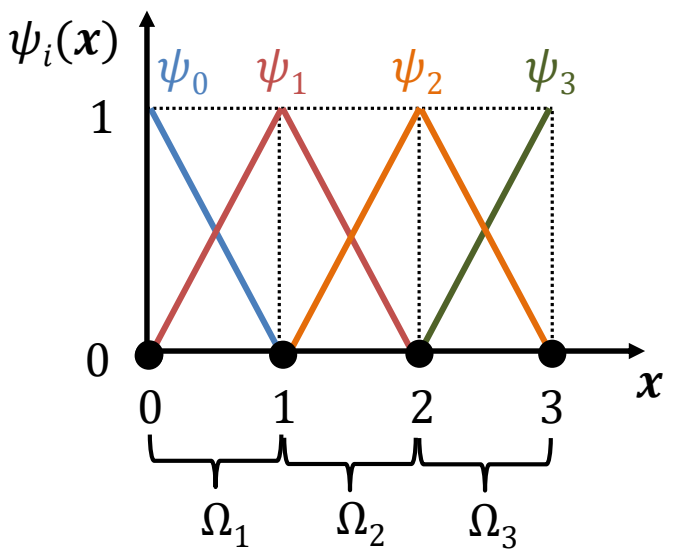
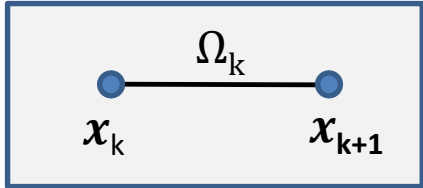
$$T(x) = \sum_{i=1}^{N_n} T_i \psi_i(x)$$

Température au nœud i

Fonctions de base

$$\psi_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

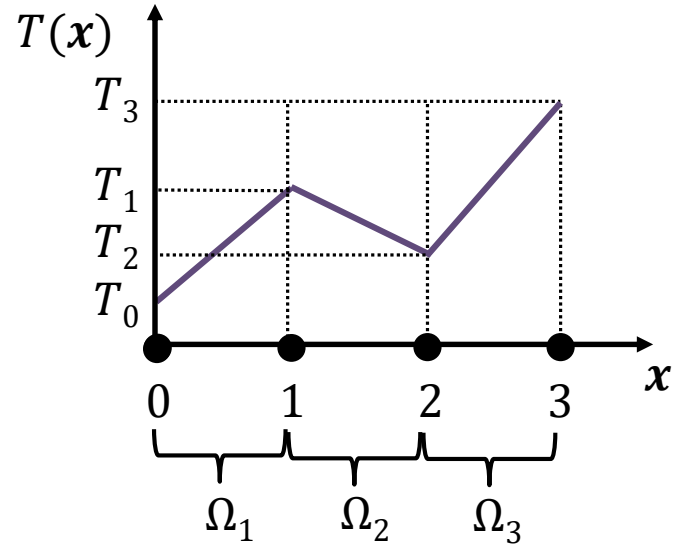
1) Polynôme de Lagrange de degré 1 - exemple 1D:



$$\psi_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{1 - x}{1 - 0}$$

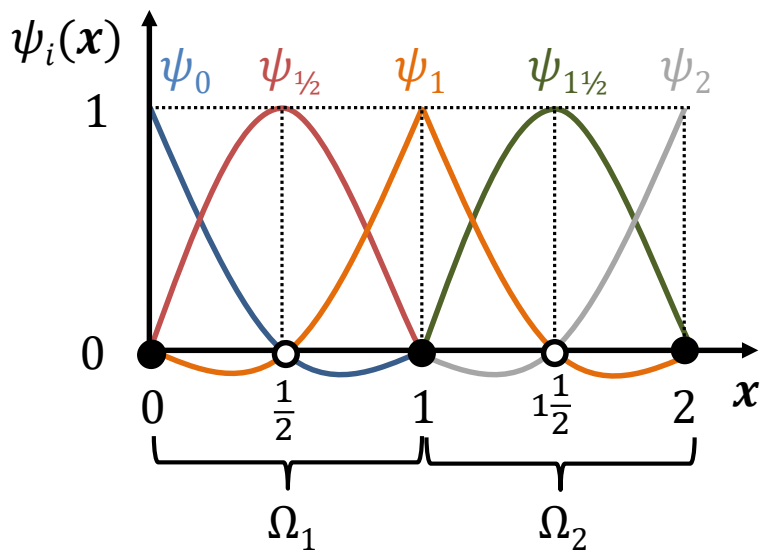
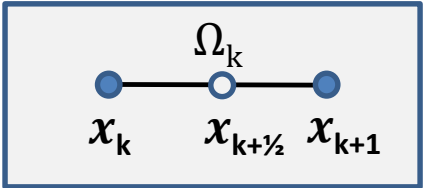
$$\psi_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - 0}{1 - 0}$$

etc...



Introduction des fonctions d'interpolation en chaque élément

2) Polynôme de Lagrange de degré 2 - exemple 1D:

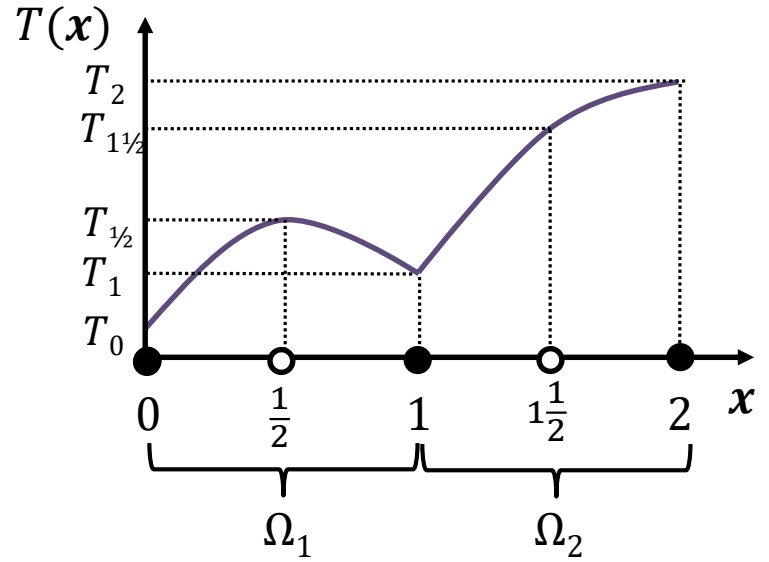


$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \left(\frac{x - x_{1/2}}{x_0 - x_{1/2}} \right) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \\ &= 2 \left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{1/2}(x) &= \left(\frac{x - x_0}{x_{1/2} - x_0} \right) \left(\frac{x - x_1}{x_{1/2} - x_1} \right) \\ &= -4(x^2 - x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_{1/2}}{x_1 - x_{1/2}} \right) \\ &= 2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x \right) \end{aligned}$$

etc...



Propriétés de l'interpolation de Lagrange

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_n} T_i \psi_i(\mathbf{x})$$

$$\psi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$$

1

$$\rightarrow T(\mathbf{x}_i) = T_1 \times (0) + \dots + T_i \times (1) + \dots + T_{N_n} \times (0) = T_i$$

$$\sum_{i=1}^{N_n} \psi_i(\mathbf{x}) = 1$$

2

$$\nabla T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_n} T_i \nabla \psi_i(\mathbf{x})$$

3

Constantes!

Introduction des fonctions d'interpolation dans la formulation intégrale faible discrétisée + remplacement de fonctions-test (Méthode de Galerkinge)

$$\kappa \left(\sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Omega_j} \nabla \varphi \cdot \nabla T \, d\Omega_j \right) = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Omega_j} \varphi \cdot f \, d\Omega_j$$

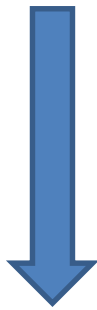
Pour un élément Ω_j fixé



$$\nabla T = \sum_{i=1}^{N_n} T_i \nabla \psi_i$$

$$\kappa \left(\int_{\Omega_j} \left(\nabla \varphi \cdot \sum_{i=1}^{N_n} T_i \nabla \psi_i \right) d\Omega_j \right) = \int_{\Omega_j} \varphi \cdot f \, d\Omega_j$$

On choisit φ tel que...
(méthode de Galerkinge)



$$\varphi = \{\psi_1, \dots, \psi_{N_n}\}$$

$$\nabla \varphi = \{\nabla \psi_1, \dots, \nabla \psi_{N_n}\}$$

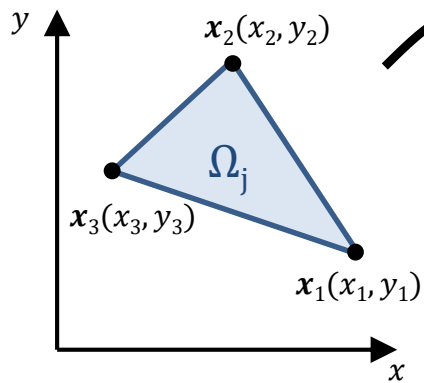
$$\kappa \left(\int_{\Omega_j} \left(\{\nabla \psi_1, \dots, \nabla \psi_{N_n}\} \cdot \sum_{i=1}^{N_n} T_i \nabla \psi_i \right) d\Omega_j \right) = \int_{\Omega_j} \{\psi_1, \dots, \psi_{N_n}\} \cdot f \, d\Omega_j$$

Évaluations des fonctions d'interpolation sur un élément de référence

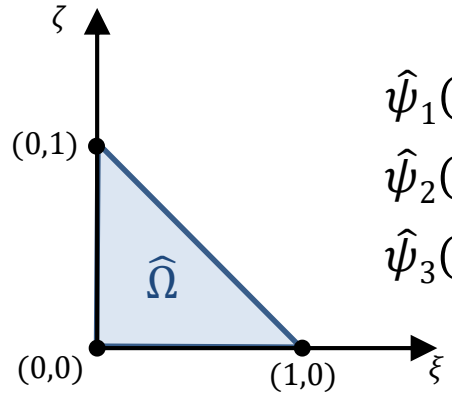
Motivation :

afin d'éviter l'évaluation de chacune des fonctions de base pour chaque élément, on préfère les évaluer dans un élément de référence pour lequel ses fonctions sont toujours les mêmes

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N_n} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j}{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}$$



Élément réel



Élément de référence

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1(\xi, \zeta) &= 1 - \xi - \zeta \\ \hat{\psi}_2(\xi, \zeta) &= \xi \\ \hat{\psi}_3(\xi, \zeta) &= \zeta \end{aligned}$$

Comment ?

le changement de base s'obtient de la façon suivante:

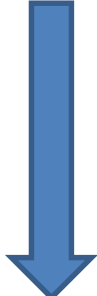
$$\begin{aligned} x(\xi, \zeta) &= x_1 \hat{\psi}_1(\xi, \zeta) + x_2 \hat{\psi}_2(\xi, \zeta) + x_3 \hat{\psi}_3(\xi, \zeta) = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\zeta \\ y(\xi, \zeta) &= y_1 \hat{\psi}_1(\xi, \zeta) + y_2 \hat{\psi}_2(\xi, \zeta) + y_3 \hat{\psi}_3(\xi, \zeta) = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\zeta \end{aligned}$$

Formulation intégrale faible discrétisée avec fonctions d'interpolation exprimées sur l'élément de référence

$$\kappa \left(\int_{\Omega_j} \left(\{\nabla\psi_1, \dots, \nabla\psi_{N_n}\} \cdot \sum_{i=1}^{N_n} T_i \nabla\psi_i \right) d\Omega_j \right) = \int_{\Omega_j} \{\psi_1, \dots, \psi_{N_n}\} \cdot f d\Omega_j$$



$$\kappa \left(\int_{\Omega_j} \left(\nabla\psi_k \cdot \sum_{i=1}^{N_n} T_i \nabla\psi_i \right) d\Omega_j \right) = \int_{\Omega_j} \psi_k \cdot f d\Omega_j \quad \forall k \in \{1, \dots, N_n\}$$



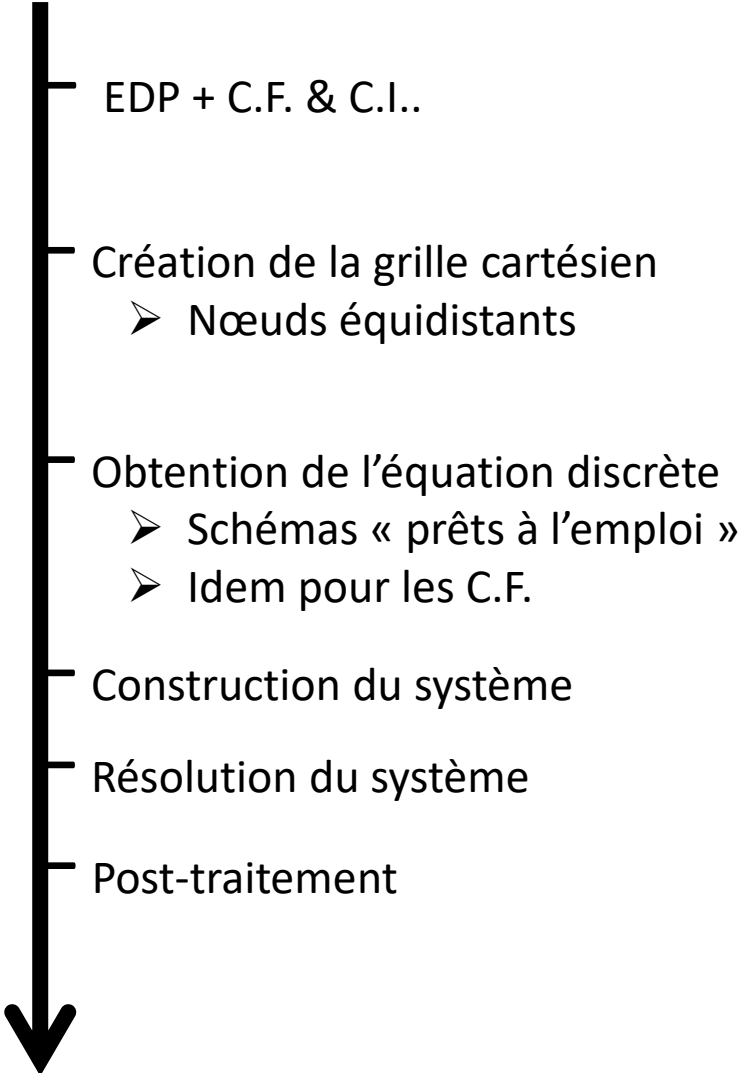
$$\begin{aligned} \Omega_j &\longrightarrow \hat{\Omega} \\ d\Omega_j &= \det[\mathbf{J}] d\hat{\Omega} \\ \nabla\psi_i &= \nabla\hat{\psi}_i[\mathbf{J}]^{-1} \end{aligned}$$

$$\kappa \left(\int_{\hat{\Omega}} \left(\nabla\hat{\psi}_k[\mathbf{J}]^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{N_n} T_i \nabla\hat{\psi}_i[\mathbf{J}]^{-1} \right) \det[\mathbf{J}] d\hat{\Omega} \right) = \int_{\hat{\Omega}} \hat{\psi}_k \cdot f \det[\mathbf{J}] d\hat{\Omega} \quad \forall k \in \{1, \dots, N_n\}$$

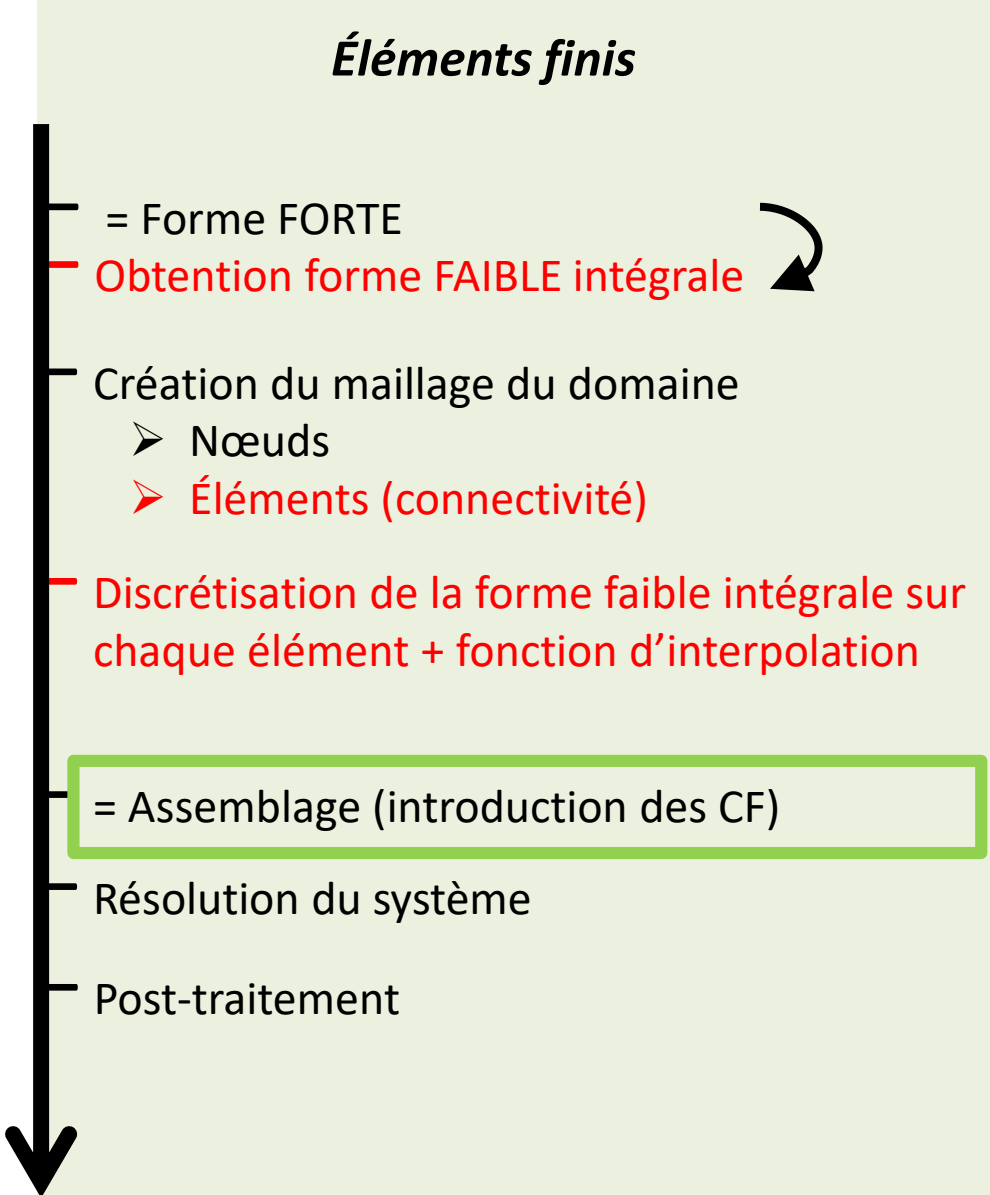
$[\mathbf{J}]$: matrice Jacobienne de transformation de l'élément j
 $\det[\mathbf{J}]$: déterminant de $[\mathbf{J}]$

Comparaison MDF vs. MEF

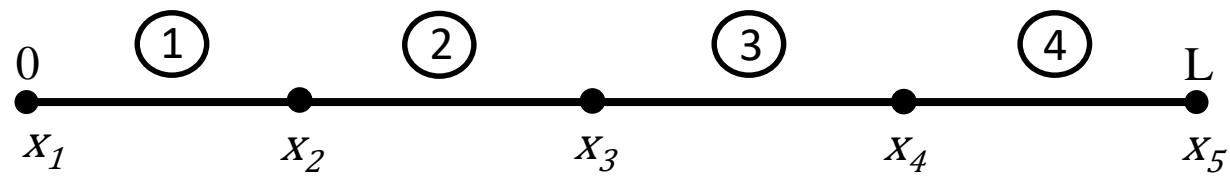
Différences finies (rappel)



Éléments finis



Assemblage du système matriciel - Prenons un exemple avec $N_n=2$ et $N_e = 4...$



$$\kappa \left(\sum_{j=1}^{N_e} \int_{\hat{\Omega}} \left(\nabla \hat{\psi}_k [\mathbf{J}]^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{N_n} T_i \nabla \hat{\psi}_i [\mathbf{J}]^{-1} \right) \det[\mathbf{J}] d\hat{\Omega} \right) = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\hat{\Omega}} \hat{\psi}_k \cdot f \det[\mathbf{J}] d\hat{\Omega}$$

valable sur tout le domaine Ω

$\forall k \in \{1, \dots, N_n\}$

Maintenant, pour un élément j donné

$$\det[\mathbf{J}] = x_k - x_{k+1} = h$$

$$[\mathbf{J}]^{-1} = \frac{1}{h}$$

$$\kappa \left(\int_{\hat{\Omega}} \left(\frac{1}{h} \nabla \hat{\psi}_k \cdot \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{N_n} T_i \nabla \hat{\psi}_i \right) h d\hat{\Omega} \right) = \int_{\hat{\Omega}} \hat{\psi}_k \cdot f h d\hat{\Omega} \quad \forall k \in \{1, \dots, N_n\}$$

$N_n = 2$

$$\frac{\kappa}{h} \left(\int_{\hat{\Omega}} \nabla \hat{\psi}_k \sum_{i=1}^2 T_i \nabla \hat{\psi}_i d\hat{\Omega} \right) = h \int_{\hat{\Omega}} \hat{\psi}_k \cdot f d\hat{\Omega} \quad , \quad \forall k \in \{1, 2\}$$

Assemblage du système matriciel (suite)

$$\frac{\kappa}{h} \left(\int_{\hat{\Omega}} \nabla \hat{\psi}_k \sum_{i=1}^2 T_i \nabla \hat{\psi}_i d\hat{\Omega} \right) = h \int_{\hat{\Omega}} \hat{\psi}_k \cdot f d\hat{\Omega} \quad , \quad \forall k \in [1,2]$$

Nous avons:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1 &= 1 - \xi & \nabla \hat{\psi}_1 &= -1 \\ \hat{\psi}_2 &= \xi & \nabla \hat{\psi}_2 &= 1 \end{aligned}$$

Prenons:

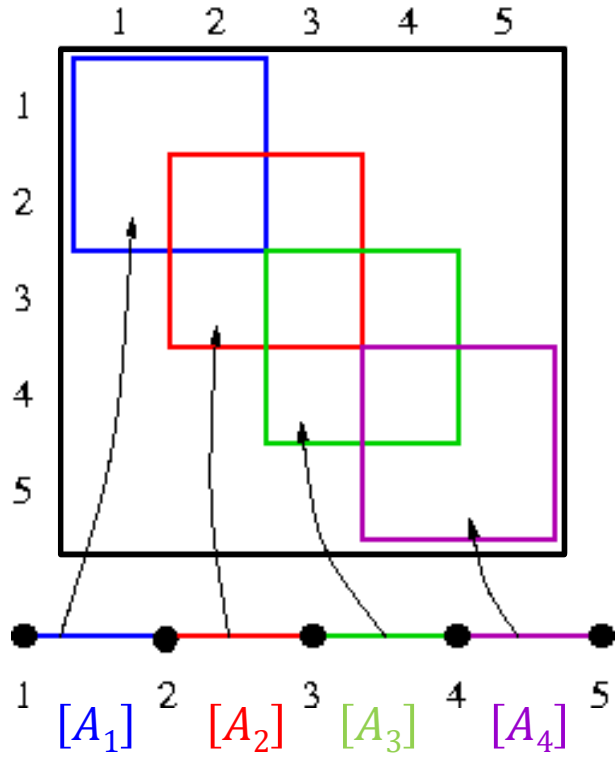
$$[A_j] = \frac{\kappa}{h^2} \int_{\hat{\Omega}} \nabla \hat{\psi}_k \nabla \hat{\psi}_i d\hat{\Omega} = \frac{\kappa}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{b_j\} = \int_{\hat{\Omega}} \hat{\psi}_k \cdot f d\hat{\Omega} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{\xi} (1 - \xi) \cdot f(\xi) d\xi \\ \int_{\xi} \xi \cdot f(\xi) d\xi \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Disons: } f = 0 \text{ c-à-d } k\nabla^2 T = 0} \{b_j\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Donc à l'élément j , nous pouvons écrire:

$$[A_j] \begin{Bmatrix} T_j \\ T_{j+1} \end{Bmatrix} = \{b_j\}$$

Assemblage final – Matrice diffuse



$$[A_j] = \frac{\kappa}{h^2} \int_{\hat{\Omega}} \nabla \hat{\psi}_k \nabla \hat{\psi}_i d\hat{\Omega} = \frac{\kappa}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

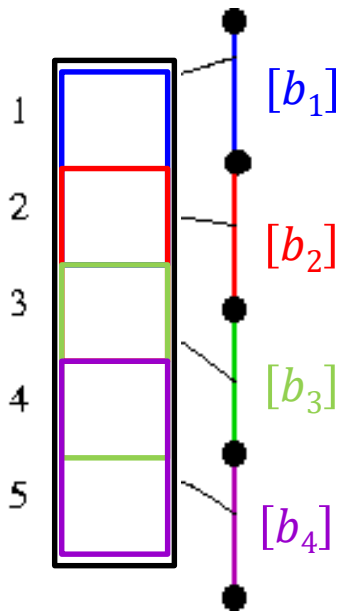


$$[A] = \frac{\kappa}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$[A] = \frac{\kappa}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assemblage final – Vecteur élémentaire



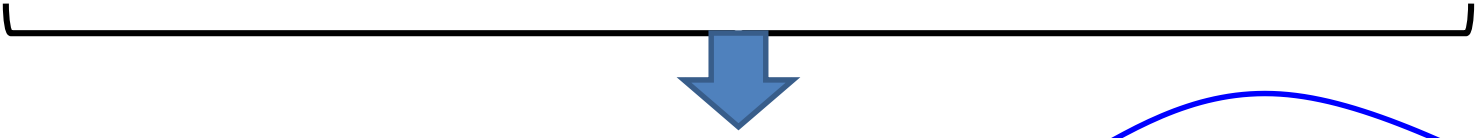
$$\{b_j\} = \begin{Bmatrix} b_{j,1} \\ b_{j,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\{b\} = \begin{Bmatrix} b_{1,1} \\ b_{1,2} + b_{2,1} \\ b_{2,2} + b_{3,1} \\ b_{3,2} + b_{4,1} \\ b_{4,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Assemblage final – Système matriciel et imposition des conditions de Dirichlet

$$[A] = \frac{\kappa}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} b_{1,1} \\ b_{1,2} + b_{2,1} \\ b_{2,2} + b_{3,1} \\ b_{3,2} + b_{4,1} \\ b_{4,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Supposons:

- $T_1 = T_a$
- $T_5 = T_b$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_b \end{Bmatrix}$$

Pour les conditions de Neumann, cf. diapo 9

Assemblage final – Système matriciel et imposition des conditions de Dirichlet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_b \end{Bmatrix}$$

Forme non-compacte



$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_a \\ 0 \\ T_b \end{Bmatrix}$$

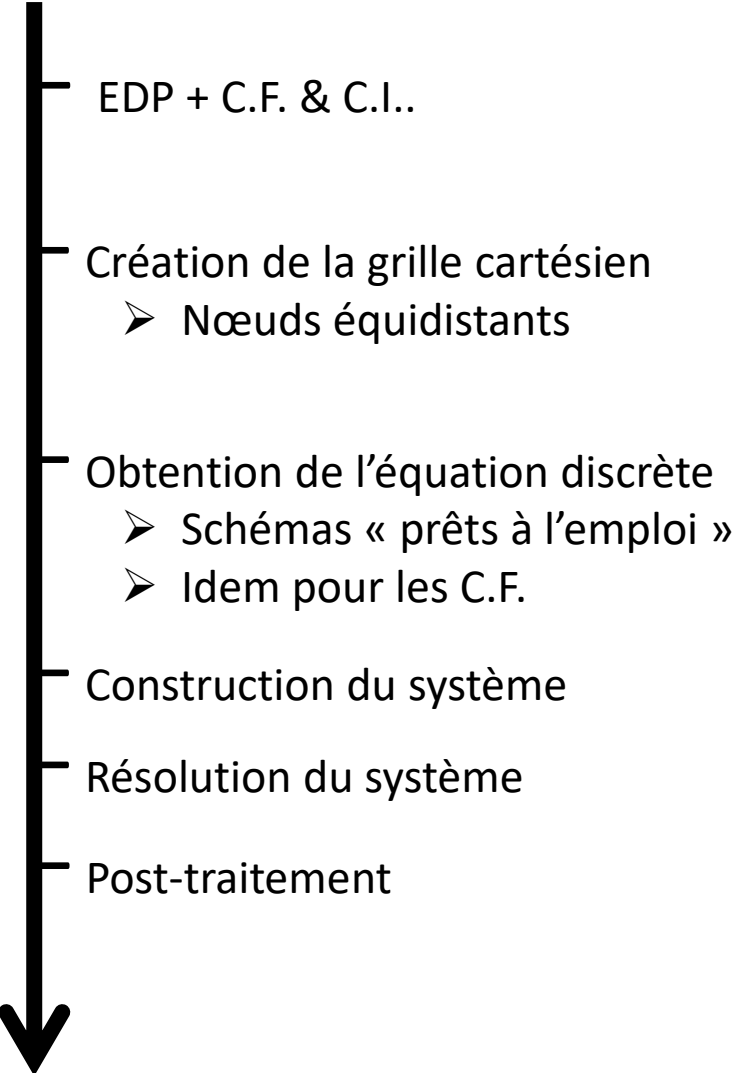
Forme compacte

Rappel:

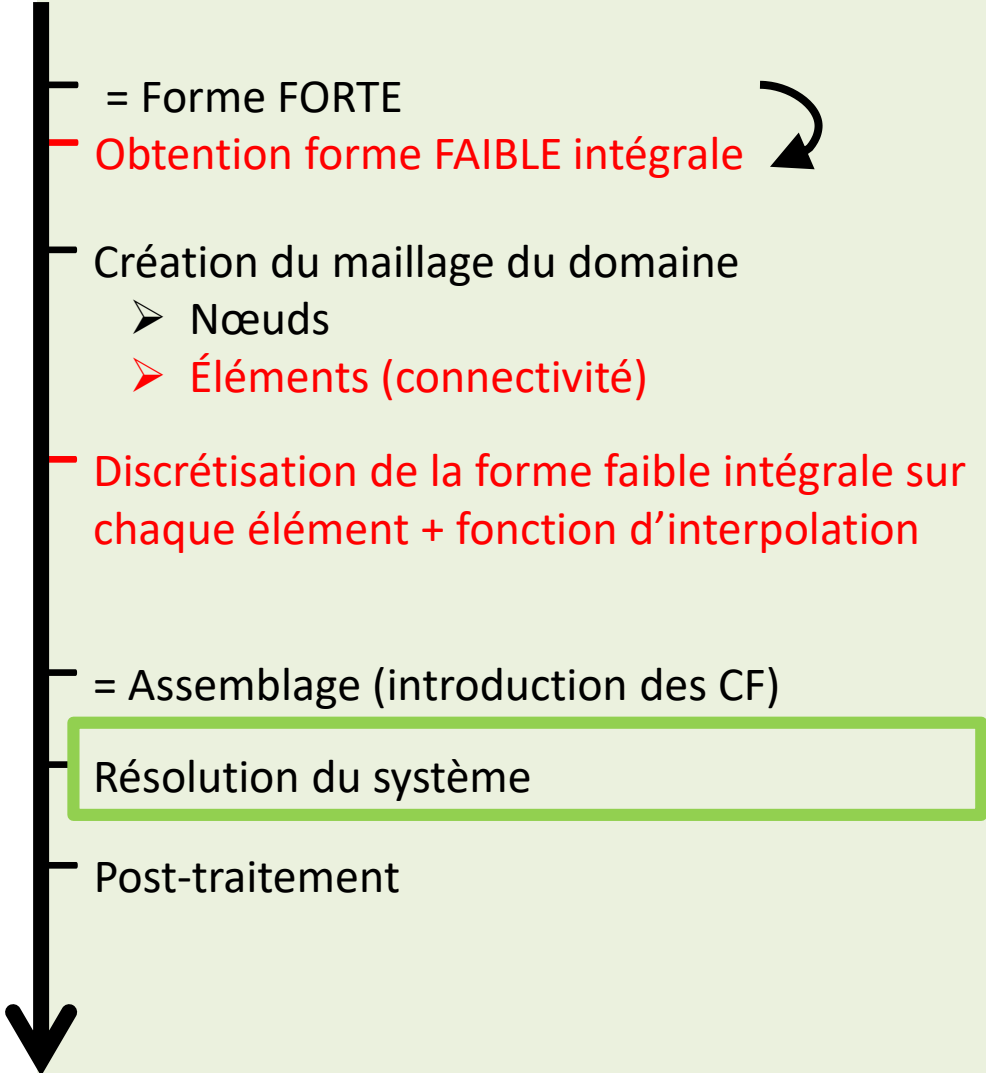
$$\left\| \begin{array}{l} -\kappa \frac{d^2 T}{dx^2} = f \text{ dans } \Omega \\ T(x=a) = T_a \\ T(x=b) = T_b \end{array} \right. \xrightarrow{\text{MDF}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_a + (h^2/\kappa)f_2 \\ (h^2/\kappa)f_3 \\ T_b + (h^2/\kappa)f_4 \end{Bmatrix}$$

Comparaison MDF vs. MEF

Différences finies (rappel)



Éléments finis



Quel algorithme doit-on choisir pour résoudre un système linéaire?

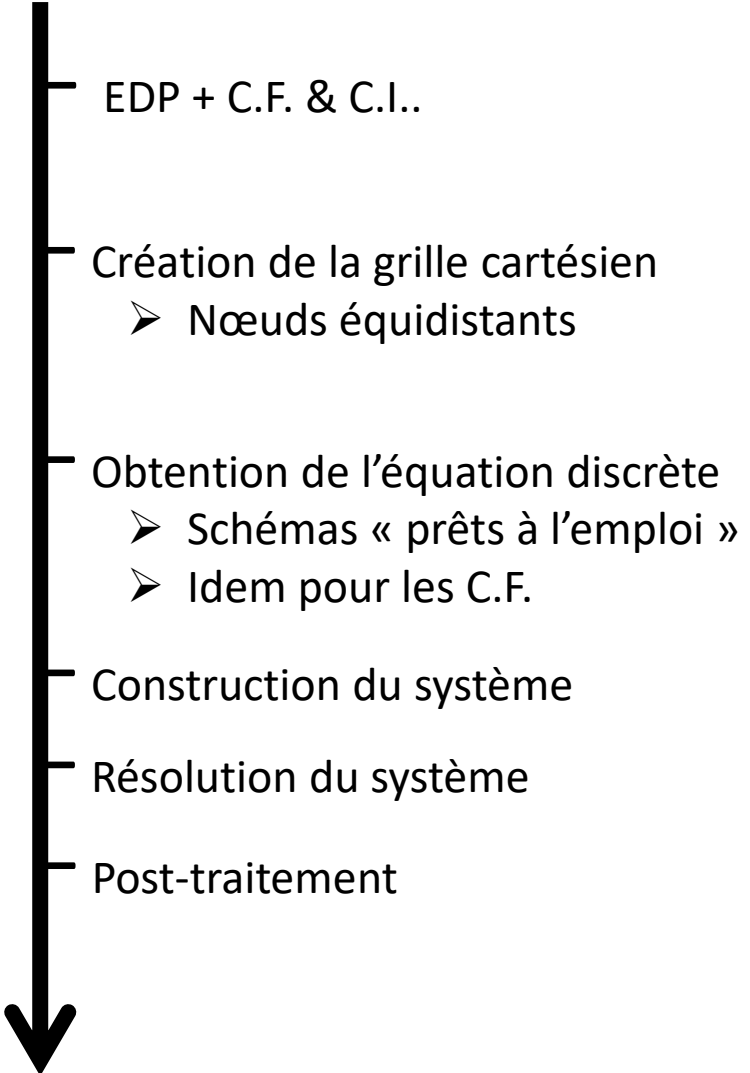
Réponse:

- On choisit l'algorithme en fonction de la taille N du système et du type de matrice (p.ex. diagonale, creuse,...) à résoudre.
- Méthodes disponibles:
 - Inversion de matrice et formule de Cramer (calculs de déterminant)
 - Méthodes directes "avancées" (p.ex. factorisation LU, algorithme de Thomas,...)
 - Méthodes itératives (p.ex. méthodes de gradient conjugué, Gauss-Seidel, GMRES, BiCGStab...)

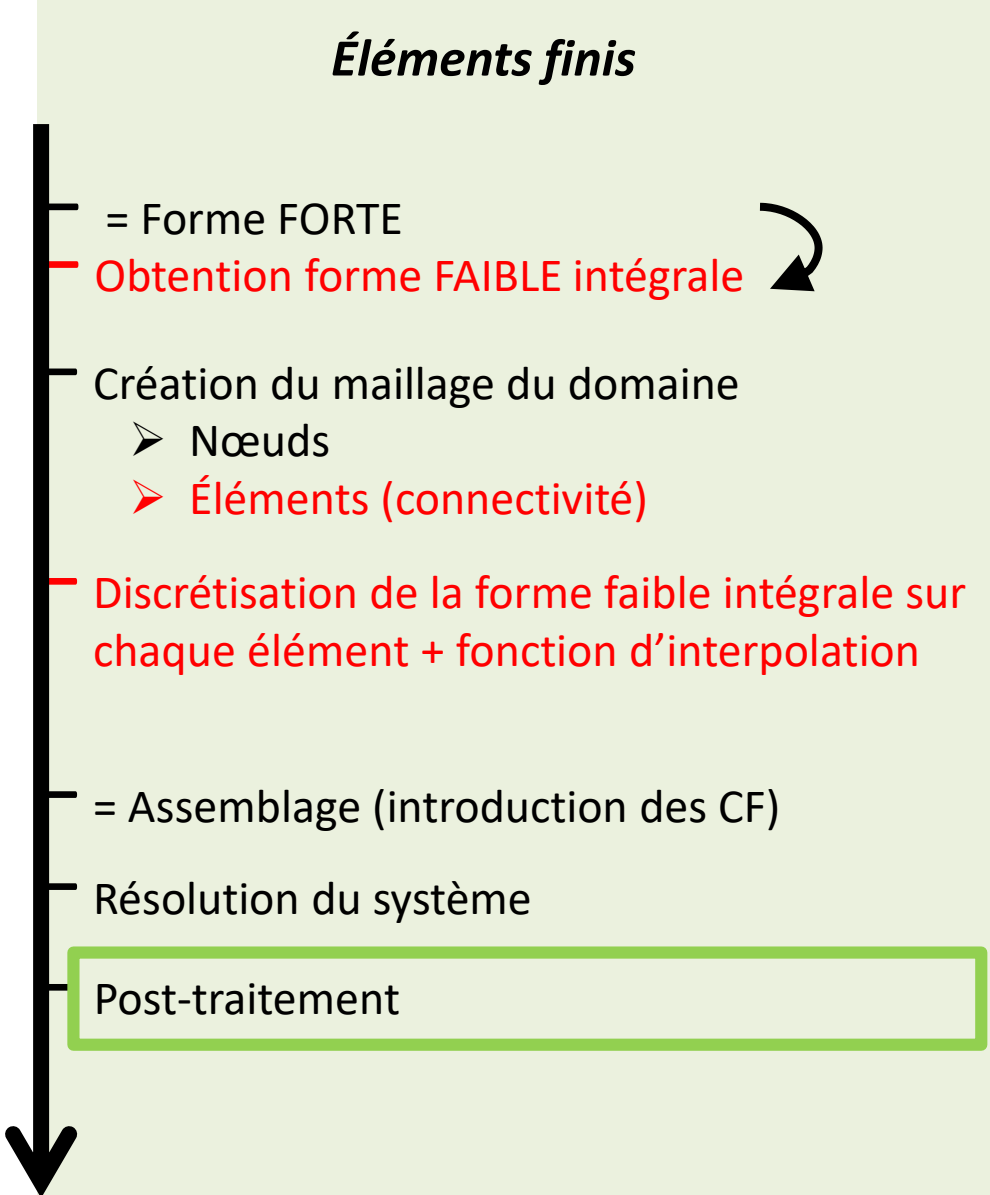
N=	5	10	25	10^5	10^6
Formule de Cramer	1300 flops	4×10^8 flops	10^{15} ans	∞	∞
Factorisation LU	100 flops	900 flops	$\sim O(\text{msec})$	$\sim O(\text{heure})$	$\sim O(\text{mois})$
Méthode itérative	-	-	-	$\sim O(\text{min})$	$\sim O(\text{heure})$

Comparaison MDF vs. MEF

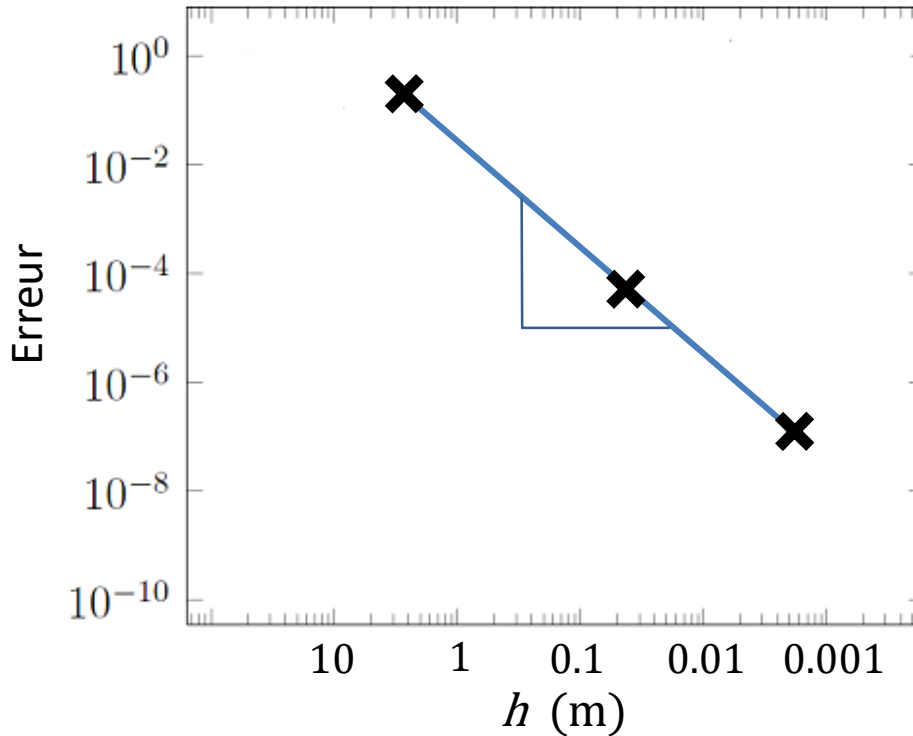
Différences finies (rappel)



Éléments finis



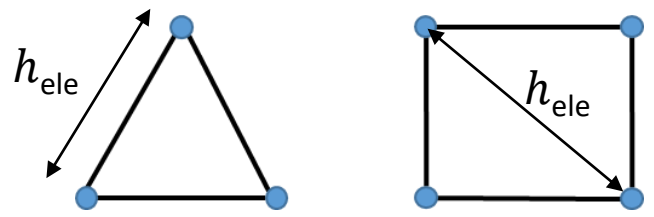
Toujours vérifier la convergence de son schéma numérique!!!



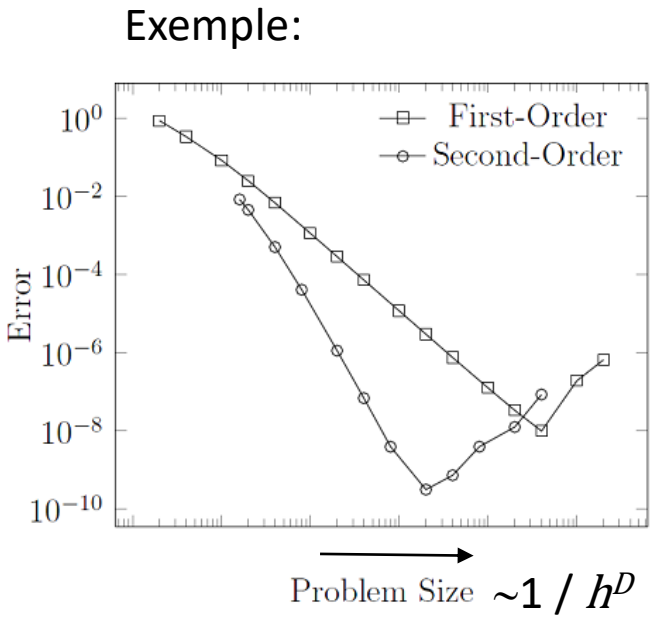
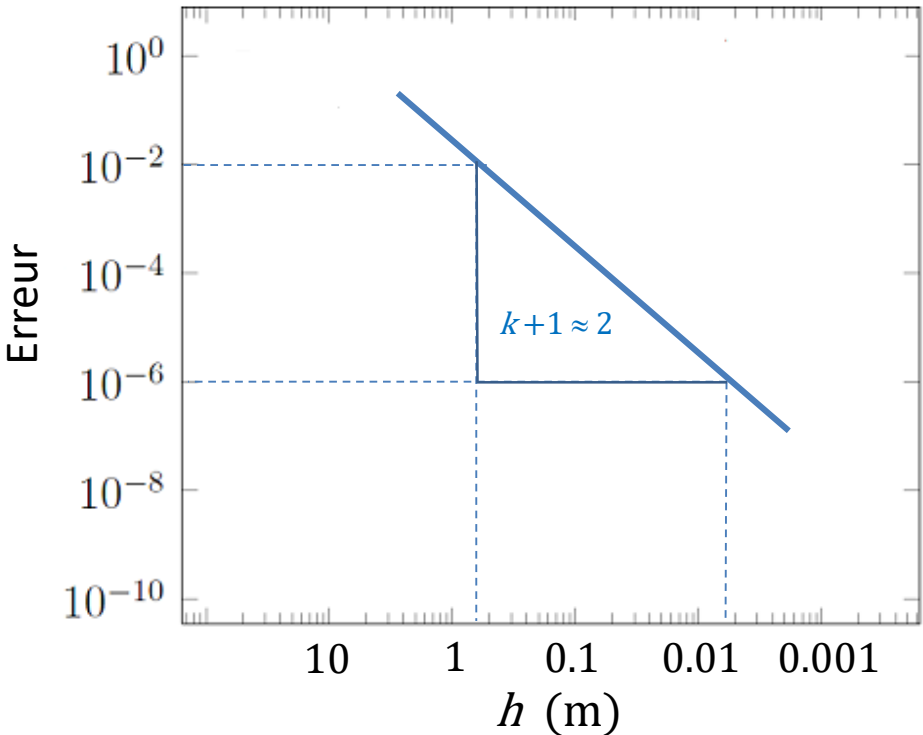
- Utiliser 3 maillages de tailles de maille différentes (grossier, moyen & fin)
- Pour calculer l'erreur, si vous n'avez pas de solution analytique, comparez alors les résultats obtenus par rapport au maillage le plus fin ou à l'extrapolation de Richardson
- Un ordre 2 est souhaitable

Précision des éléments finis

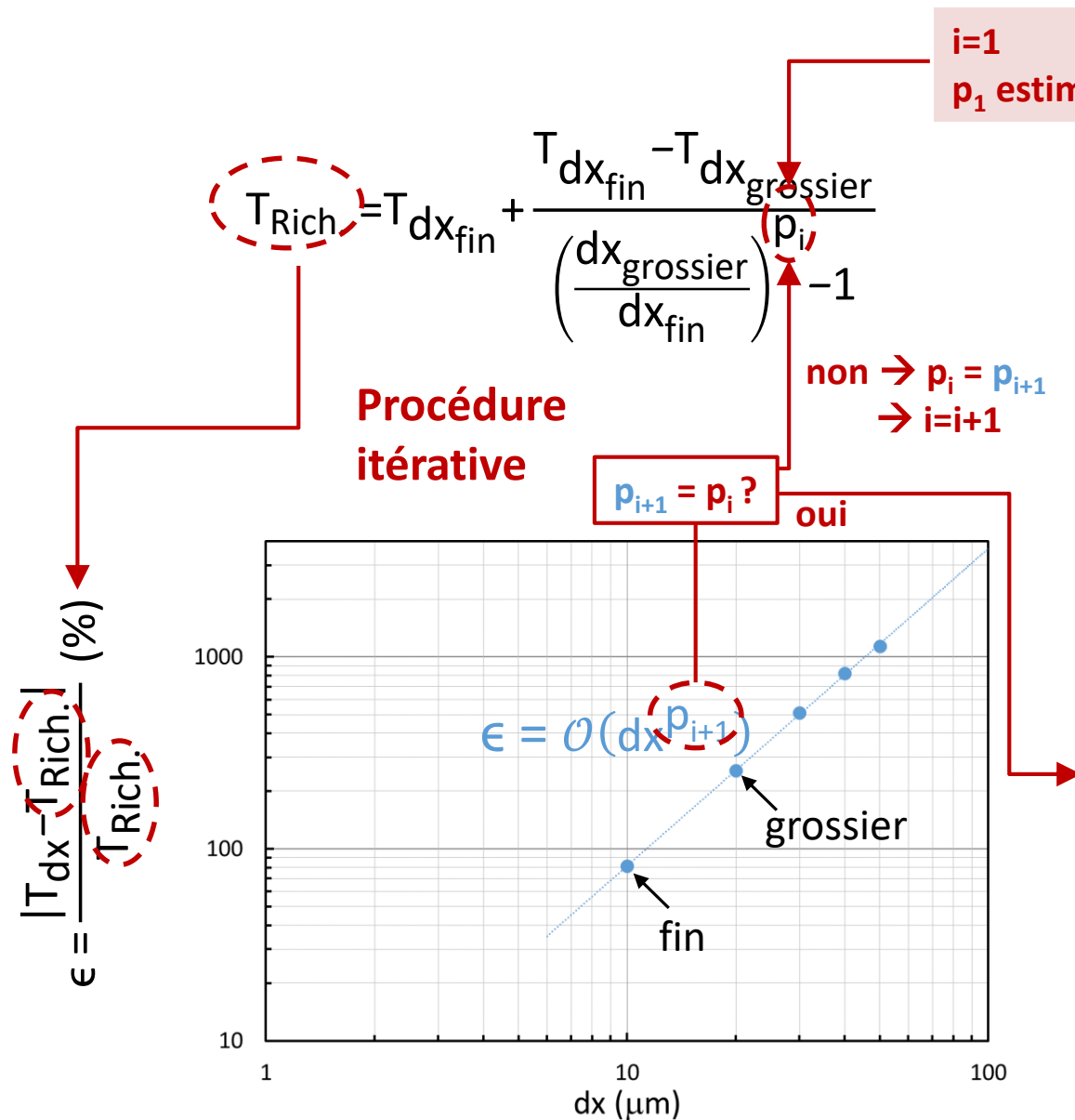
$$\begin{aligned}
 \text{Erreur } L_2 &= \sqrt{\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} |T_i - T(x_i)|^2 d\Omega} = \|T_i - T(x_i)\|_2 \\
 &= \sqrt{\frac{1}{N_{ele}} \sum_{i=1}^{N_{ele}} |T_i - T(x_i)|^2} \leq Ch^{k+1}
 \end{aligned}$$



avec $h = \max_{ele} h_{ele}$ (taille de maille) et $k =$ ordre des éléments utilisés



Extrapolation de Richardson généralisée (lorsque la solution analytique n'est pas connue)



Hypothèse principale :
Les solutions obtenues avec les maillages fin et grossier tendent de façon asymptotique vers une solution

↓

Autrement, la procédure itérative ne converge pas !

1. Ordre de convergence "p"
2. Estimé $T_{Rich.}$ de la solution numérique pour $dx \rightarrow 0$

Remarques finales sur la méthode des éléments finis

- Permet de résoudre une variété d'EDP:

- elliptique (probl. stationnaire de diffusion):

$$\alpha \nabla^2 U + f = 0$$

- parabolique (probl. instationnaire de diffusion):

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \alpha \nabla^2 U + f = 0$$

- hyperbolique (probl. instationnaire d'advection):

$$\frac{\partial U}{\partial t} - v \cdot \nabla U + f = 0$$

- mixte transport (probl. instationnaire d'advection-diffusion):

$$\frac{\partial U}{\partial t} - (v \cdot \nabla U + \alpha \nabla^2 U) + f = 0$$

- **Avantages:**

1. Flexibilité → maillages non-structurés
2. Prise en compte "naturelle" des conditions frontières
3. Contrôle de l'erreur

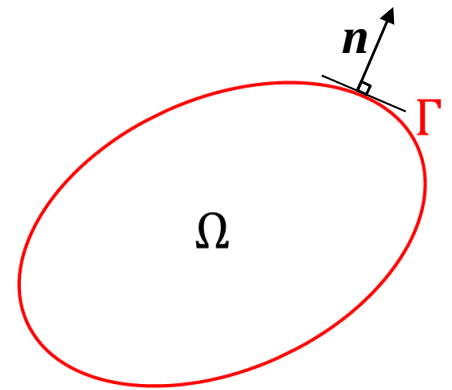
- **Inconvénients:**

1. Mise en place et programmation plus ardues que MDF
2. Parallélisation par décomposition de domaines ardue → système matriciel
3. Génération de maillage pour des géométries 3D peut devenir compliquée

Méthode des Volumes Finis (MVF)

Théorème de flux-divergence (ou de Green-Ostrogradski):

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d\Omega = \oiint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{n}$$



La divergence d'un champ vectoriel \mathbf{F} sur un volume Ω est égale au flux de ce champ à travers la frontière Γ de ce volume (intégrale de surface).

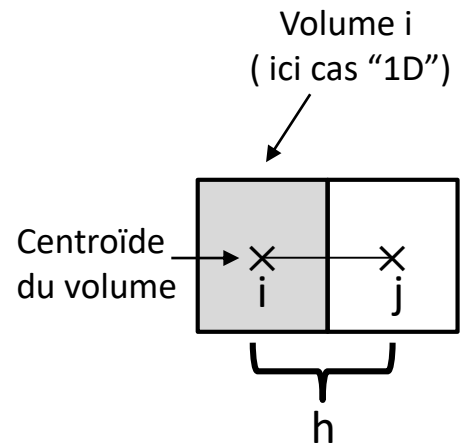
Prenons maintenant: $\mathbf{F} = k\nabla T \rightarrow \iiint_{\Omega} \nabla \cdot k\nabla T \, d\Omega = \oiint_{\Gamma} k\nabla T \cdot d\mathbf{n}$

$k = \text{constante}$

$$\iiint_{\Omega} k\nabla^2 T \, d\Omega = \oiint_{\Gamma} k\nabla T \cdot d\mathbf{n}$$

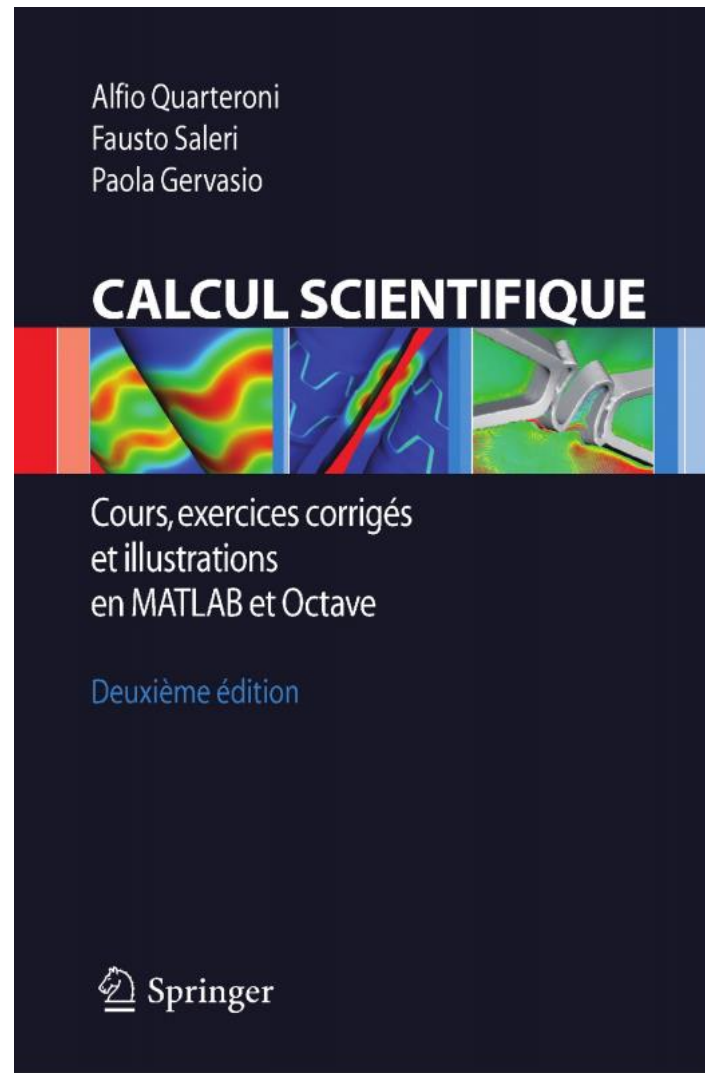
Discrétisation du flux par une différence finie

$$\iiint_{\Omega} k\nabla^2 T \, d\Omega = \oiint_{\Gamma} k \frac{T_i - T_j}{h} \cdot d\mathbf{n}$$



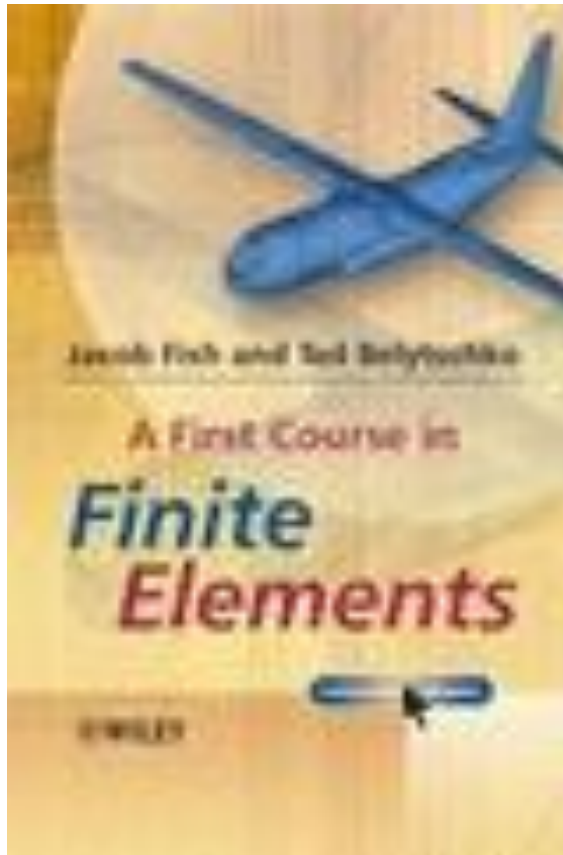
$$\nabla T = \frac{T_i - T_j}{h}$$

La méthode consiste donc à sommer tous les flux entrant par toutes les frontières d'un volume et de discrétiser ce flux au moyen d'un schéma de différences finies

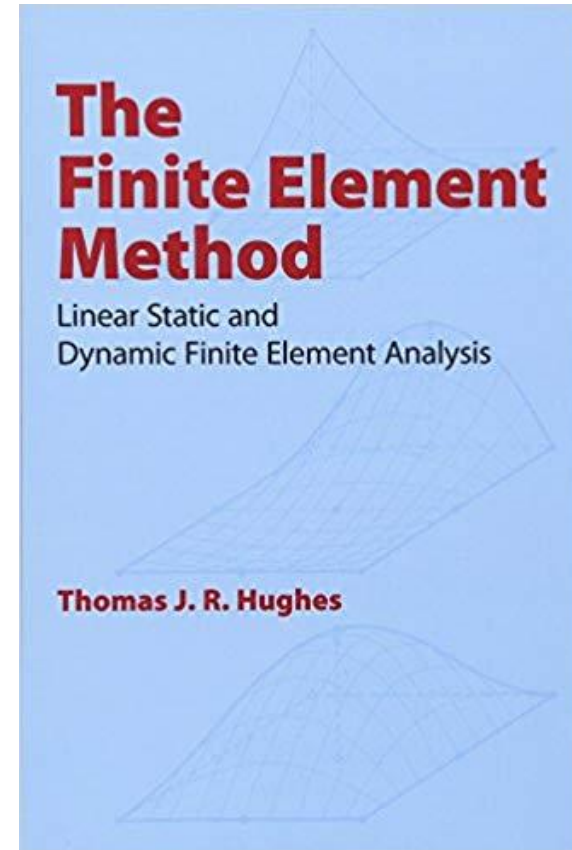


Chapitre 8

Autres lectures pour les plus passionnés



<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/9780470510858>



<https://www.amazon.com/The-Finite-Element-Method-Engineering/dp/0486411818>