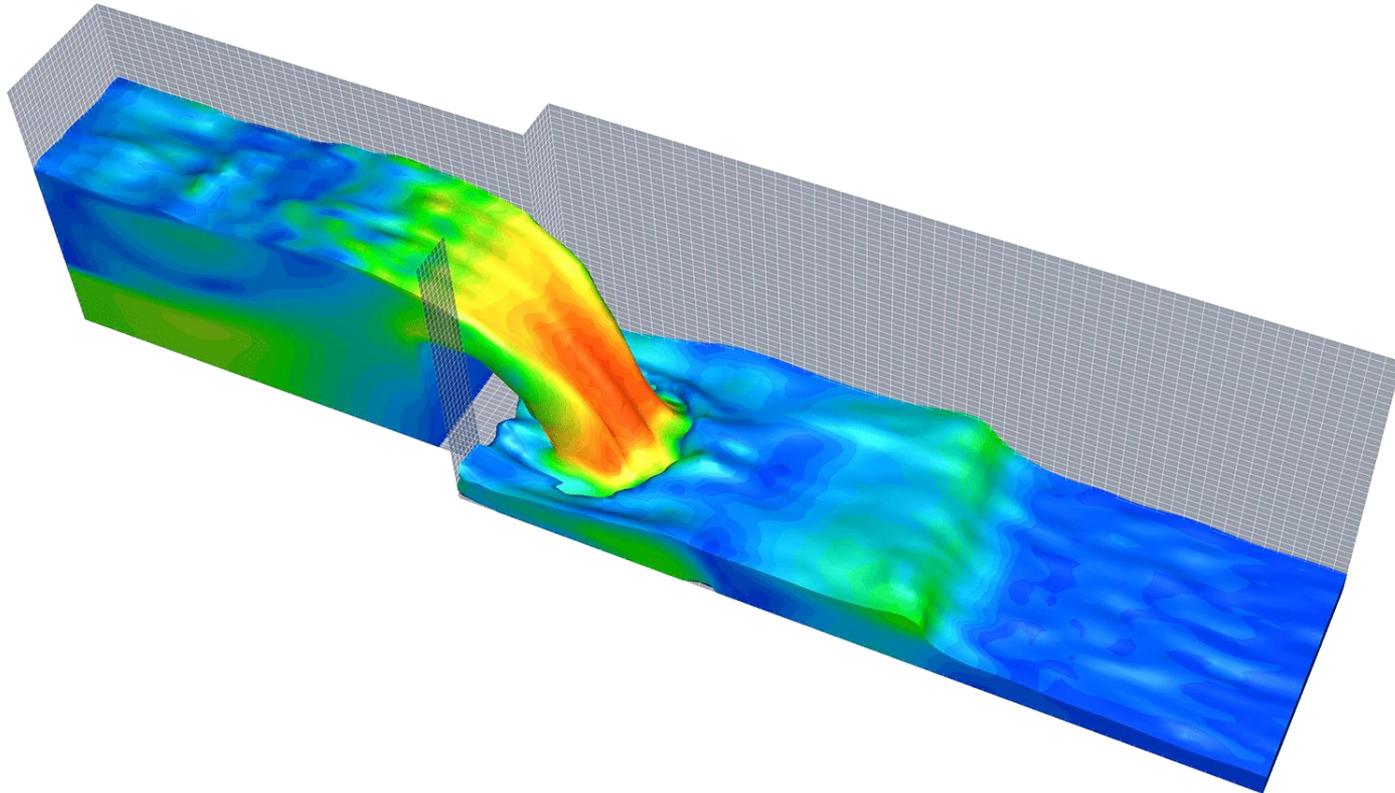


# Modélisation numérique en génie chimique

## GCH2535

### Méthode des éléments finis (MEF)



**POLYTECHNIQUE  
MONTRÉAL**

LE GÉNIE  
EN PREMIÈRE CLASSE

Diapositives adaptées de :  
David Vidal  
Bruno Blais  
François Bertrand



# Plan de cours

Semaine	Date	Séance	Notes	Sujet
2	Mercredi 8 Jan	1		EDP
2	Jeudi 9 Jan	2		EDP
3	Mercredi 15 Jan	3		EDP
3	Jeudi 16 Jan	4	Départ Devoir 1 (EDP)	EDP
4	Mercredi 22 Jan	5		EDP
4	Jeudi 23 Jan	6		TD#1
5	Mercredi 29 Jan	7	Remise Devoir 1 (EDP)	Intro
5	Jeudi 30 Jan	8		Intro / EDO
6	Mercredi 5 Fév	9	Partiel 1 (EDP)	CP#1
6	Jeudi 6 Fév	10		EDO
7	Mercredi 12 Fév	11	Départ Devoir 2 (MDF)	TD#2
7	Jeudi 13 Fév	12		MDF
8	Mercredi 19 Fév	13		MDF
8	Jeudi 20 Fév	14		MEF
9	Mercredi 26 Fév	15		TD#3 (LAB-MDF)
9	Jeudi 27 Fév	16		MEF
10	Mercredi 4 Mar		Relâche	
10	Jeudi 5 Mar		Relâche	
11	Mercredi 11 Mar	17	Remise Devoir 2 (MDF)	TD#4 (LAB-MEF)
11	Jeudi 12 Mar	18	Partiel 2 (EDO-MDF-MEF)	CP#2
12	Mercredi 18 Mar	19		Données exp.
12	Jeudi 19 Mar	20	Départ Devoir 3	Données exp.
13	Mercredi 25 Mar	21		Bilans
13	Jeudi 26 Mar	22		TD#5
14	Mercredi 1 Avr	23		Bilans
14	Jeudi 2 Avr	24		Opt./Rec.
15	Mercredi 8 Avr	25	Remise Devoir 3	Opt./Rec.
15	Jeudi 9 Avr	26		TD#6

# Les tenseurs : objet mathématique utile à la physique

- Ordre 0 : scalaire

→ Température

→ Concentration

- Ordre 1 : vecteur

→ Vitesse

→ Force

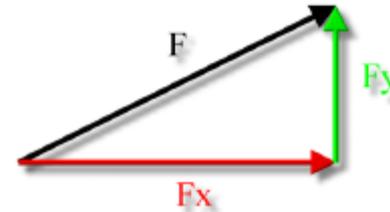
→ Déplacement

- Ordre 2 : matrice

→ Contraintes

→ Permeabilité

- Ordre 3 : essayez d'imaginer ça si vous le pouvez ...



$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \delta_{ij}$$

## Notation des tenseurs

$$f = 3$$

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T = u_i$$

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \delta_{ij}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = u_i v_j \mathcal{E}_{ijk}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{e}_x - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \mathbf{e}_y + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{e}_z$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} ( ) \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} ( ) \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} ( ) \mathbf{e}_z$$

# Utilisation du vecteur nabla

Usage of $\nabla$	Scalar – Cartesian coordinates f	Vector – Cartesian coordinates u
<b>Gradient</b>	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}(f)\mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}(f)\mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}(f)\mathbf{e}_z$	$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$
<b>Divergence</b>	-----	$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$

# Utilisation du vecteur nabla

Usage of $\nabla$	Scalar – Cartesian coordinates $f$	Vector – Cartesian coordinates $\mathbf{u}$
<b>Curl</b>	-----	$\nabla \times \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{bmatrix}$
<b>Laplacian</b>	$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\nabla^2 \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2}$

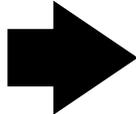
# Méthode des éléments finis - Objectif

## Objectif :

- **Transformer** une **équation aux dérivées partielles** continue valable sur un domaine continu en un **système linéaire à N équations pour N inconnues**, dont les équations sont associées à un domaine discret appelé maillage.

$$L \left( u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t}, \dots \right) + f = 0$$

+ Conditions Frontières  
+ Conditions Initiales (transitoire)



$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}$$

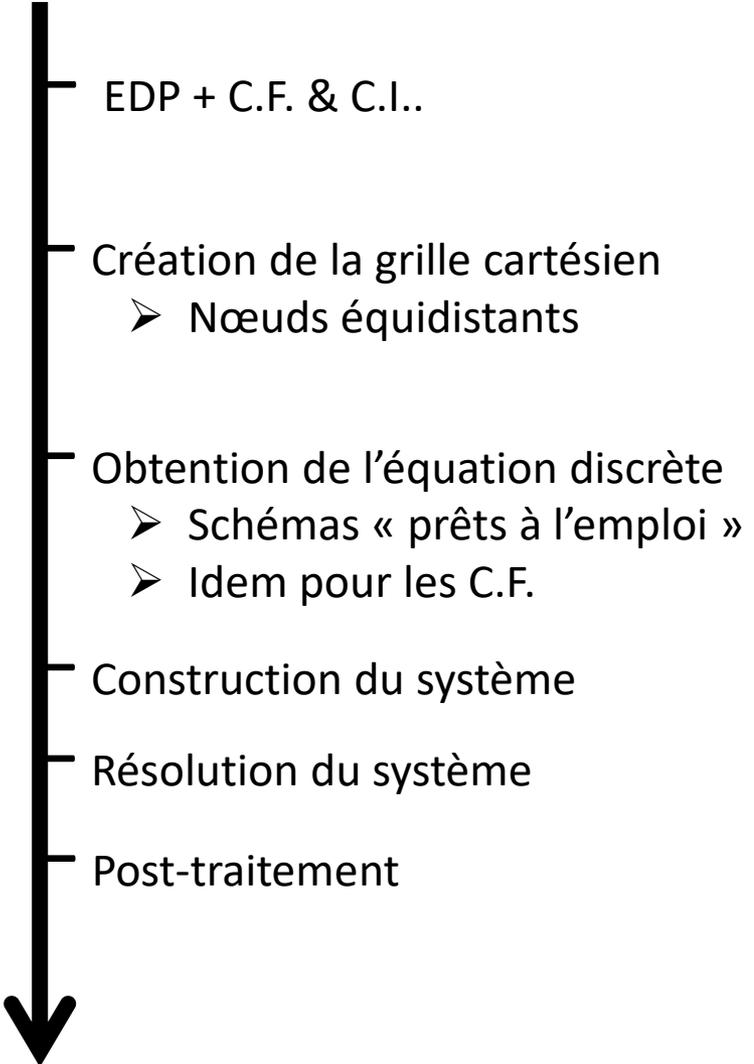
Les inconnues ne sont plus nécessairement associées à un maillage cartésien structuré (grille)

## Méthode :

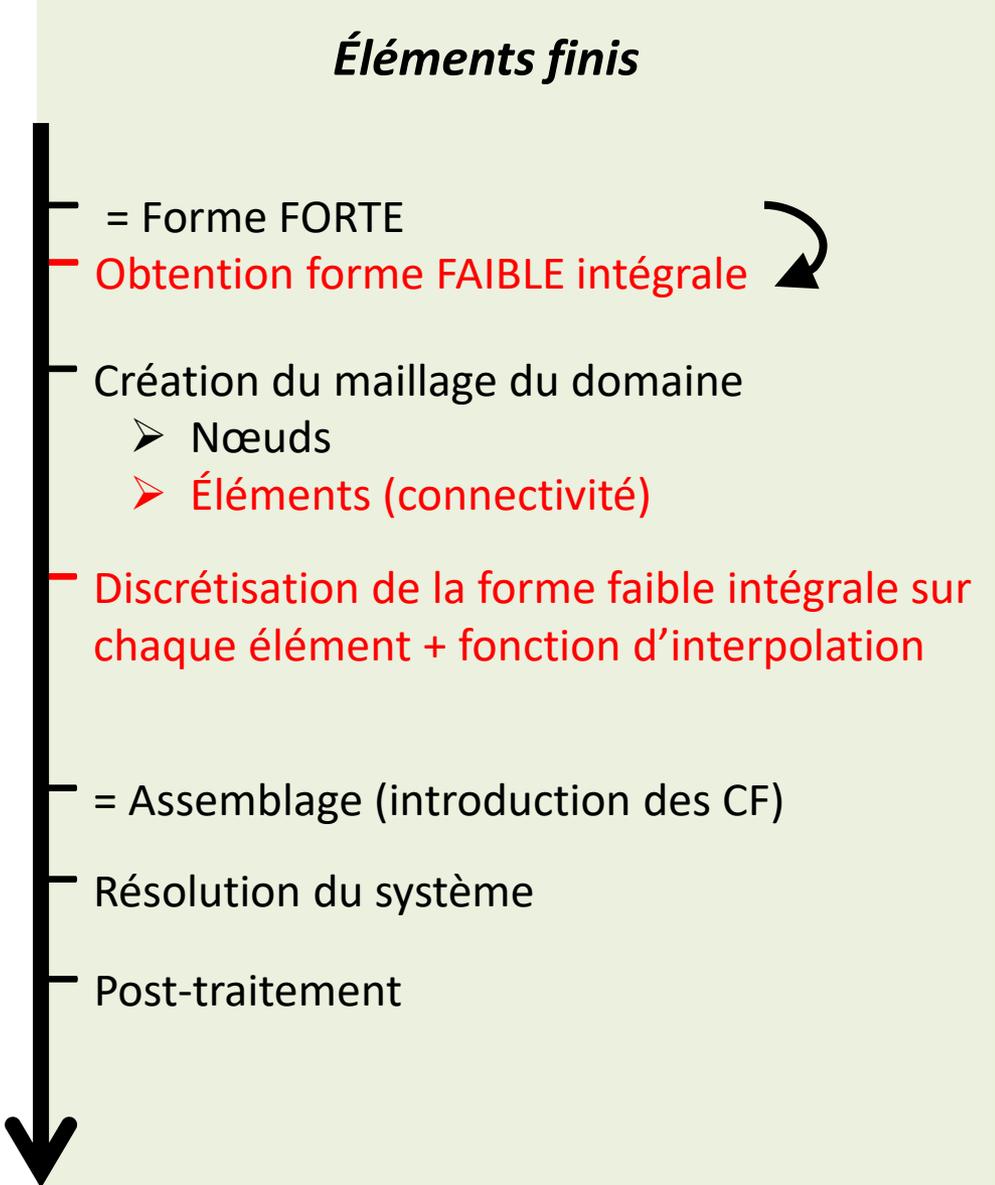
- **Écrire sous forme discrète** ( $i-1, i, i+1 \dots$ ), non plus l'EDP, mais une **forme « affaiblie »** de cette équation par l'entremise de fonctions d'interpolation exprimées en chaque élément du maillage

# Comparaison MDF vs. MEF

## *Différences finies (rappel)*

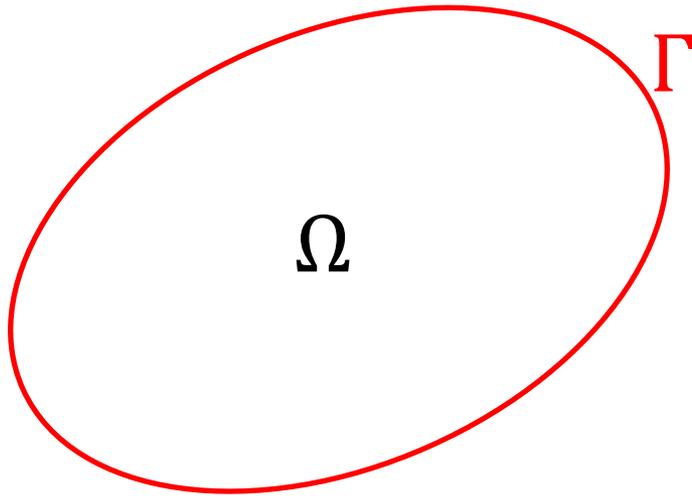


## *Éléments finis*



# Technique d'affaiblissement par la méthode des résidus pondérés

- Prenons l'exemple en conduction thermique suivant:



$$-\kappa \nabla^2 T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

avec

$$T(\mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma$$

$$\frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n} = \alpha, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma$$

ou

Définition : nous appelons résidu (noté  $Res$ ), l'expression mathématique suivante liée au problème étudié :

$$Res(T) = k \nabla^2 T(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})$$

Ce résidu s'annule quand  $T(\mathbf{x})$  est la solution.

# Méthode des résidus pondérés

1. Pondération du résidu par une fonction-test :

$$\underbrace{\varphi(\mathbf{x})}_{\text{fonction-test}} \times \underbrace{(\kappa \nabla^2 T(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}))}_{\text{résidu}} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } \forall \varphi(\mathbf{x})$$

2. Intégration sur le domaine :

$$\int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot (\kappa \nabla^2 T(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})) d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } \forall \varphi(\mathbf{x})$$
$$-\kappa \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla^2 T(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) d\Omega$$

**Formulation intégrale FORTE**

# Méthode des résidus pondérés

3. Intégration par parties (formule de Green en 2D et 3D) :

$$-\kappa \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla^2 T(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) d\Omega, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } \forall \varphi(\mathbf{x})$$

$$\kappa \left( \int_{\Omega} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla T(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma \right) = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) d\Omega$$

**Formulation intégrale FAIBLE**

## Motivations :

1. Réduction de l'ordre maximum des dérivées présentes
2. Introduction « naturelle » des conditions frontières

*Rappel* : intégration par parties en 1D

$$\int_0^L \psi(x) \frac{dT(x)}{dx} dx = - \int_0^L \frac{d\psi(x)}{dx} T(x) dx + [\psi(x) T(x)]_0^L$$

$$\int_0^L \psi(x) \frac{d^2T(x)}{dx^2} dx = - \int_0^L \frac{d\psi(x)}{dx} \frac{dT(x)}{dx} dx + \left[ \psi(x) \frac{dT(x)}{dx} \right]_0^L$$

# Formes forte et faible

## Particularité de la méthode des éléments finis (MEF) :

*Discrétiser, non pas l'EDP associée au problème (forme forte), mais une forme « affaiblie » de cette équation*

### Vocabulaire :

cette forme est dénommée diversement :

- Forme/formulation faible
- Forme/formulation intégrale
- Forme/formulation variationnelle
- ...

### Motivation :

affaiblir pour réduire certaines contraintes mathématiques (p.ex. discontinuités) empêchant l'utilisation d'outils classiques pour sa résolution

### Conséquence :

la solution d'une forme faible correspond à une solution approchée ou « faible » en termes de continuité

# Méthode des résidus pondérés

## 4. Introduction des conditions frontières :

$$\kappa \left( \int_{\Omega} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla T(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma \right) = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) d\Omega$$

- Traitement des conditions de **Neumann**:



$$\frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n} = \alpha, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma$$

$$\kappa \left( \int_{\Omega} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla T(\mathbf{x}) d\Omega - \alpha \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{x}) d\Gamma \right) = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) d\Omega$$

- Traitement des conditions de **Dirichlet**, deux possibilités:

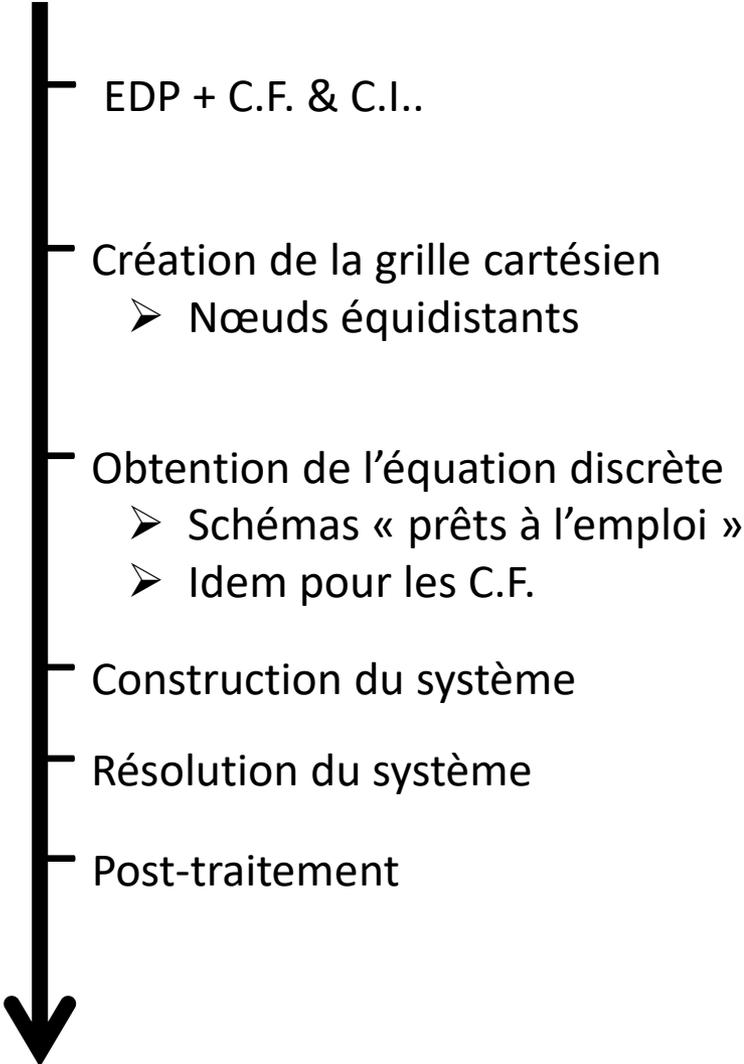
1. Introduction d'un flux inconnu  $q(\mathbf{x})$  pour  $\forall \mathbf{x} \in \Gamma$ :  $-k\varphi(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n} = \varphi(\mathbf{x})q(\mathbf{x})$

$$\kappa \int_{\Omega} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla T(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) d\Omega$$

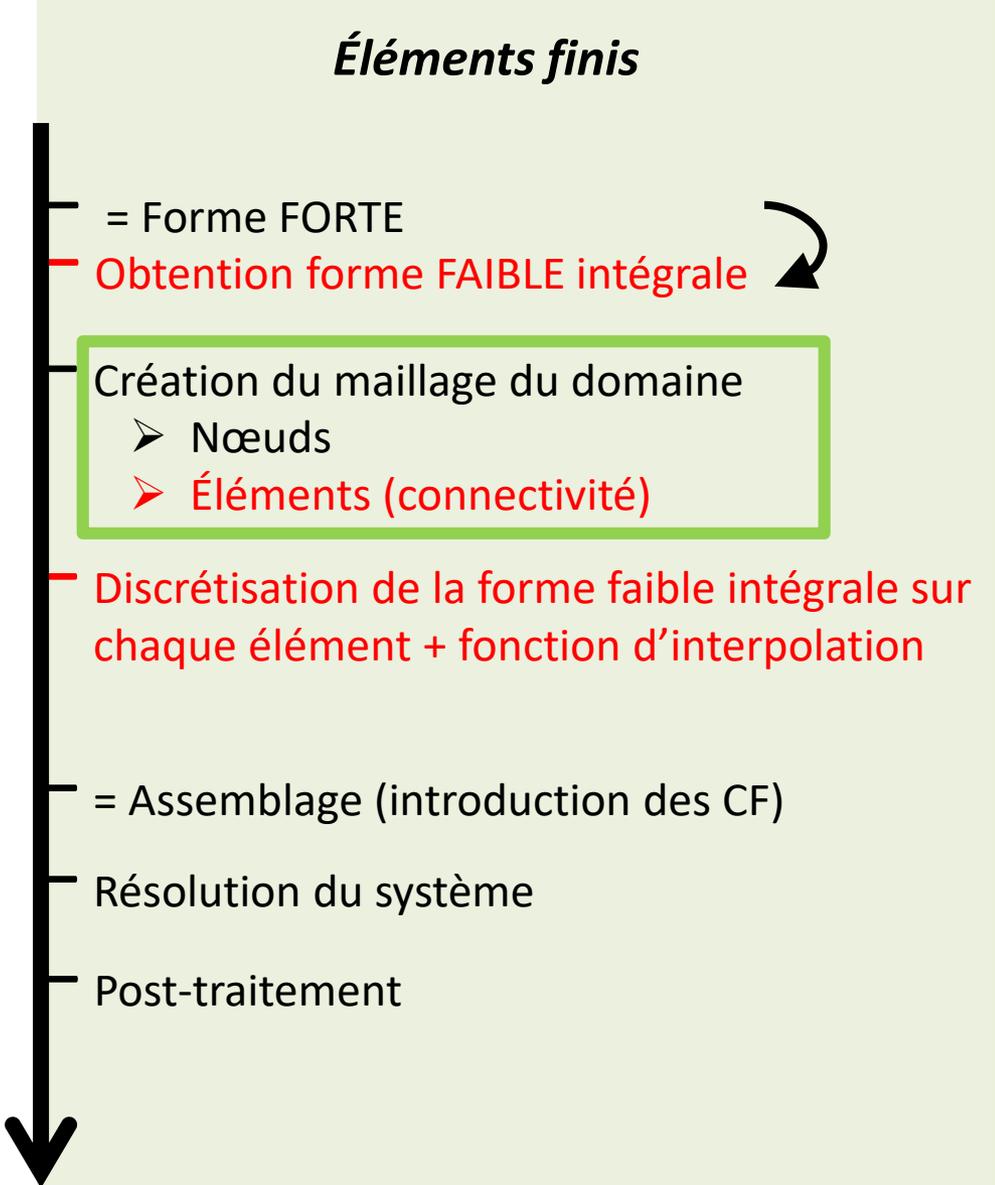
2. Élimination pure et simple du terme et réintroduction manuelle lors de la phase d'assemblage (voir plus loin)

# Comparaison MDF vs. MEF

## *Différences finies (rappel)*

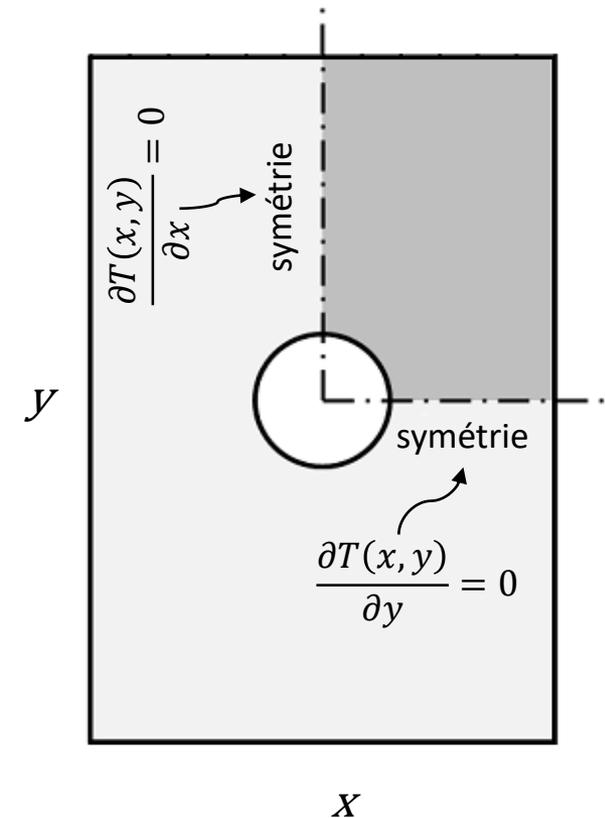


## *Éléments finis*



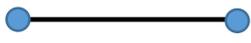
## Bonne préparation de la géométrie

- Elle permet de faciliter la réalisation du maillage et d'abaisser le coût des calculs
- Quatre points sont à examiner :
  - le **choix de la dimensionnalité** du domaine considéré et/ou du maillage
  - l'**exploitation des symétries** des modèles (p.ex. axisymétrie?)
  - la **suppression des détails géométriques superflus**
  - la **délimitation des régions** où seront affectés des modèles de comportements ou d'environnements différents (p.ex. matériau multicouche)



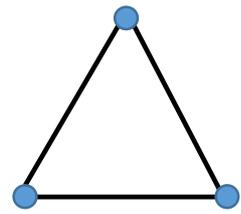
# Types d'éléments finis (linéaires)

1D

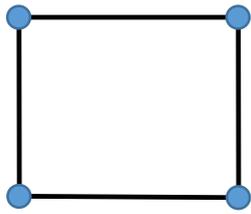


Barre

2D



Triangle



Rectangle

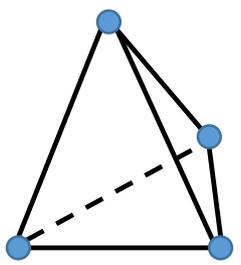
Nomenclature

nœud

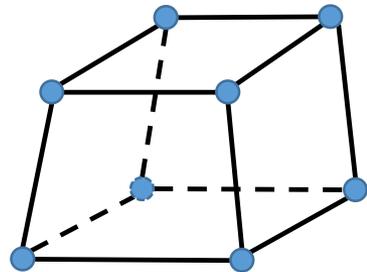
face

arête

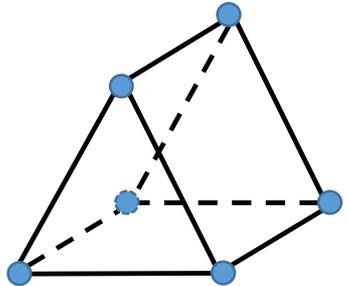
3D



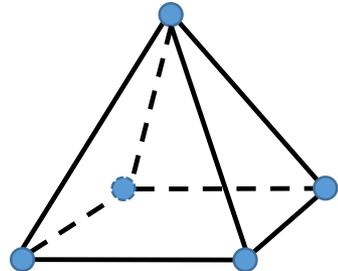
Tétraèdre



Hexaèdre



Pentaèdre  
ou prisme



Pyramide

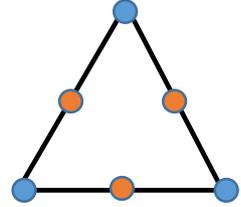
# Types d'éléments finis (quadratiques)

1D

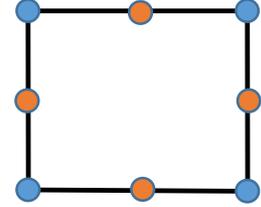


Barre

2D



Triangle

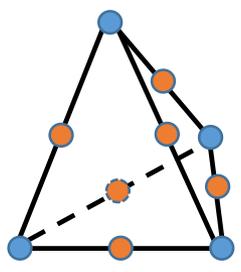


Rectangle

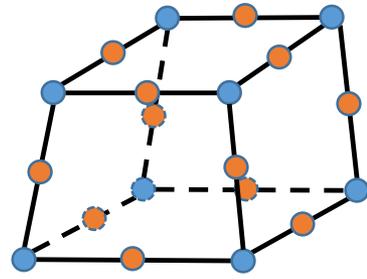
Nomenclature

nœud d'arête  
utilisé pour  
l'interpolation  
quadratique

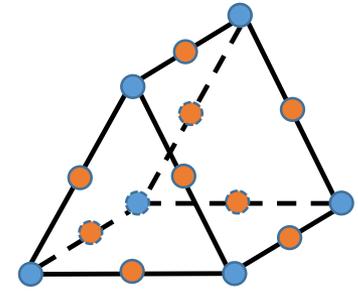
3D



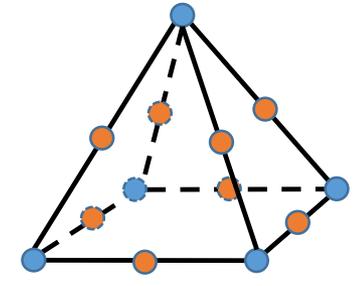
Tétraèdre



Hexaèdre



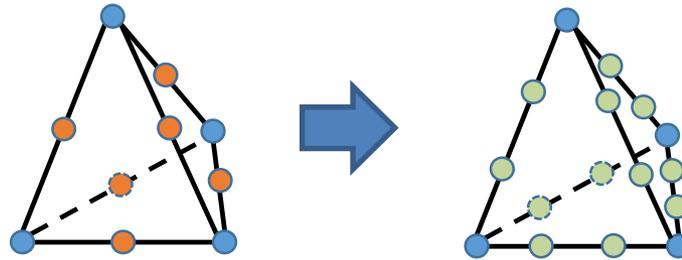
Pentaèdre  
ou prisme



Pyramide

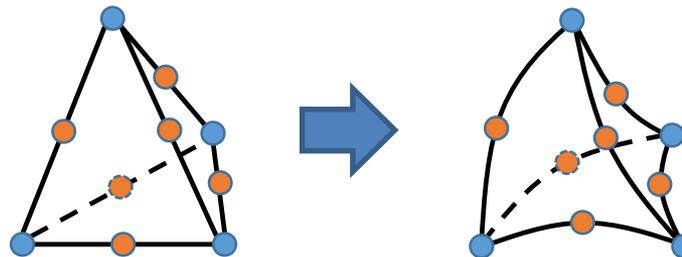
## Autres types d'éléments finis

- **Éléments finis cubiques** : plus riches contenant 2 nœuds par arête (en plus des nœuds aux coins) – utilisation plus rare



Exemple pour un tétraèdre

- **Éléments finis quadratiques à arêtes curvilignes** pour mieux épouser les géométries courbes :

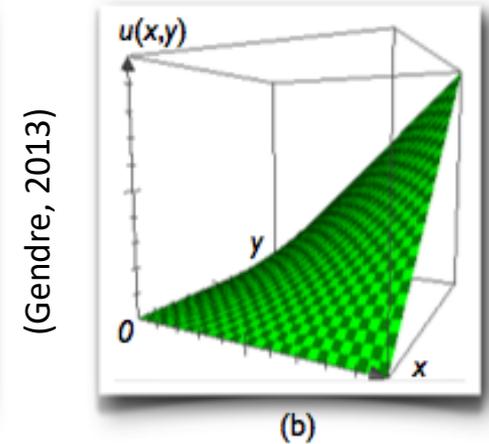
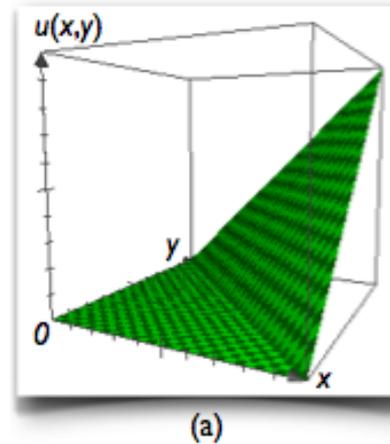


Exemple pour un tétraèdre

# Choix du type et de la richesse des éléments

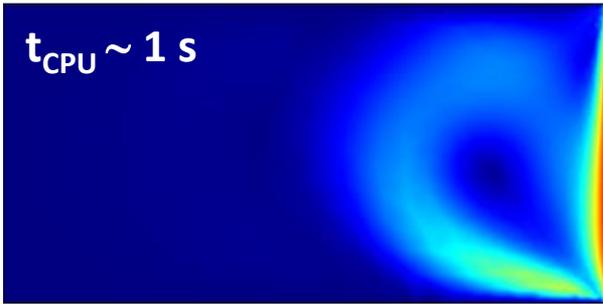
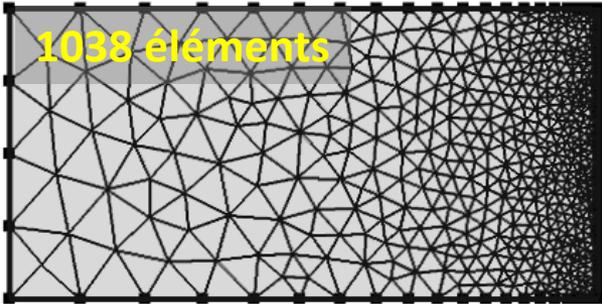
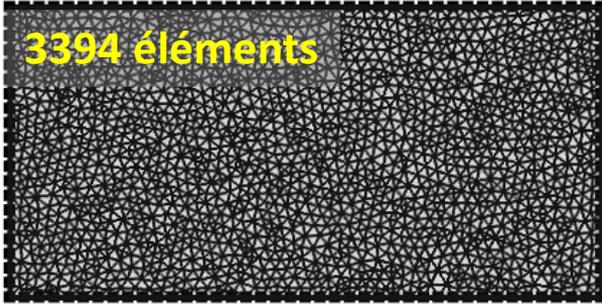
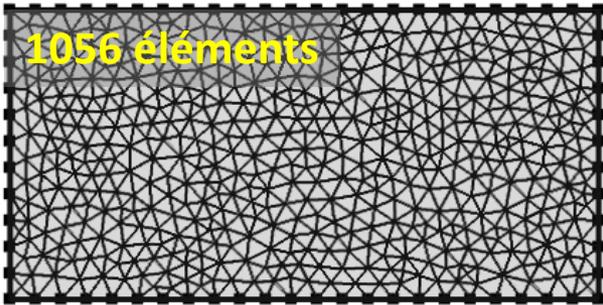
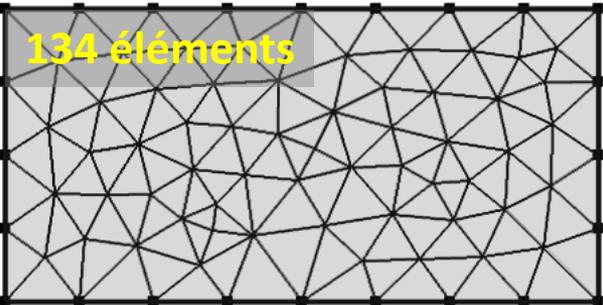
1. De façon générale, les **rectangles et hexaèdres sont plus précis** que les triangles, tétraèdres et prismes à nombre de nœuds égal, car leurs fonctions d'interpolation sont plus riches et peuvent donc représenter les gradients de façon plus régulière

Interpolation d'un champ  $u(x,y)$  par deux éléments triangulaires linéaires (a) et par un élément rectangulaire linéaire (b)



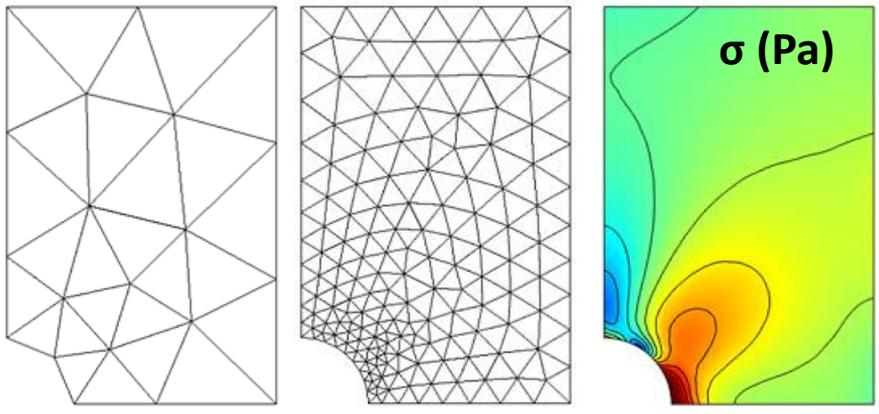
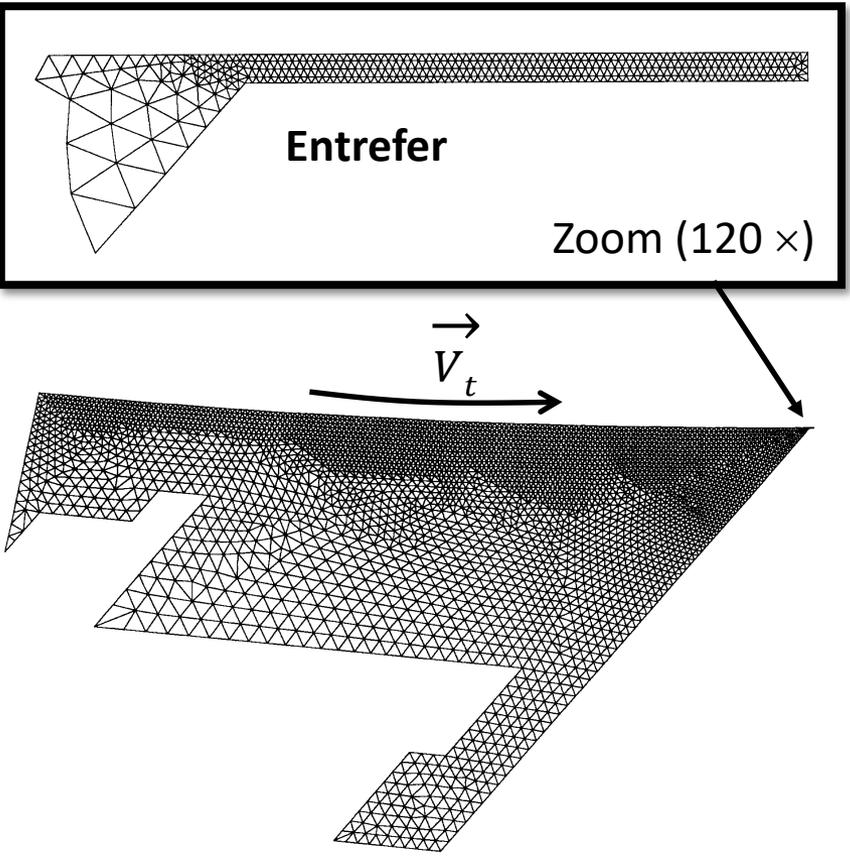
2. En revanche, les **triangles et tétraèdres permettent de créer des maillages mieux adaptés aux géométries complexes** à l'aide d'algorithmes de génération de maillage automatisée plus performants (p.ex. triangulation de Delaunay)
3. Les **éléments quadratiques** représentent un **bon compromis** entre **precision** et **temps de calcul**
  - par défaut, COMSOL (version 4) utilise des éléments quadratiques pour la plupart des types de problèmes physiques (modules)
  - deux exceptions: les modules **Fluid Flow** et **Chemical Species Transport** qui utilisent par défaut des éléments linéaires → problèmes dominés par l'advection

# Raffinement du maillage requis par la physique du problème

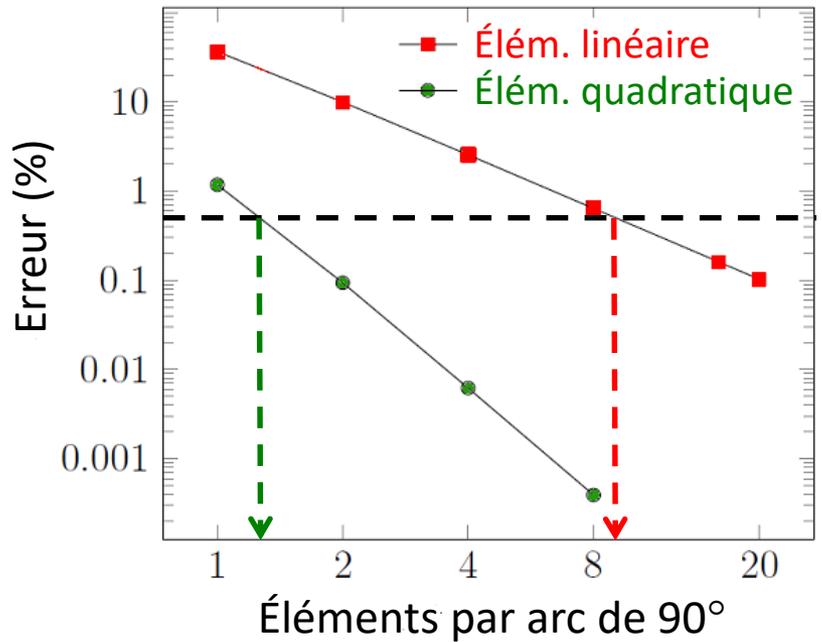


- Il convient de **raffiner le maillage** dans les zones de **forts gradients** du champ d'intérêt (ici la vitesse du fluide dans une cavité entraînée) pour améliorer la précision à faible coût

# Raffinement/enrichissement du maillage requis par la géométrie du problème

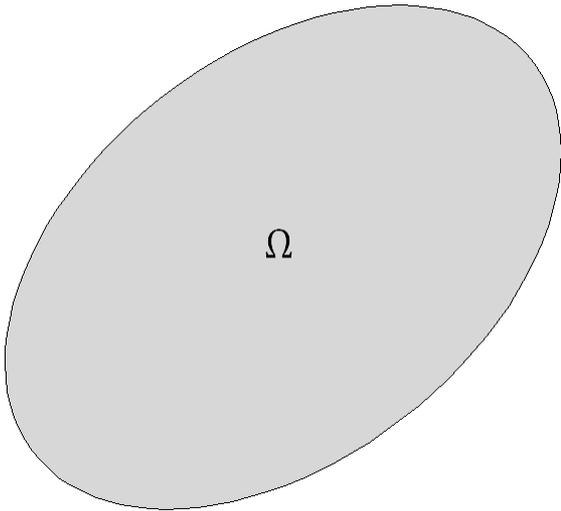


(Comsol, 2013)

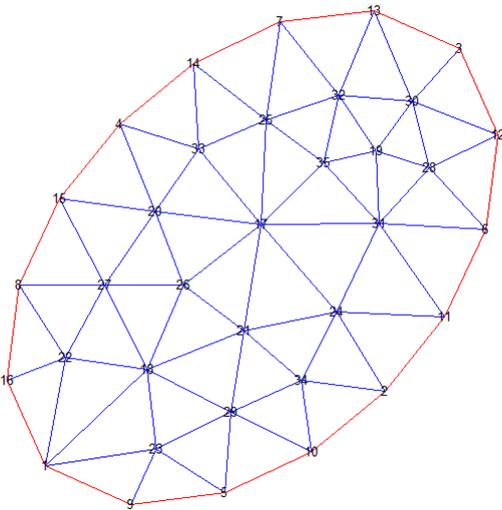


# Table des connectivités des éléments

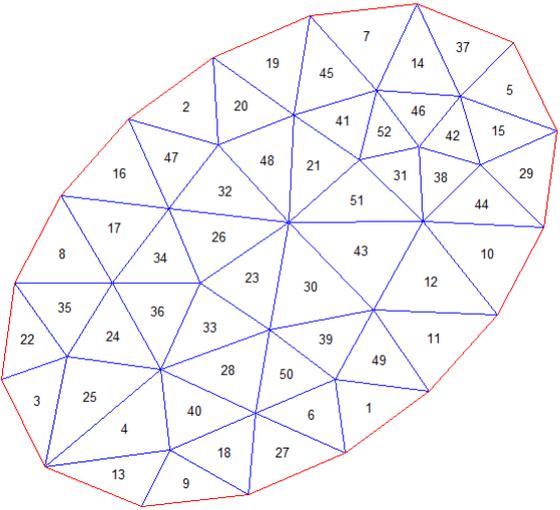
- Les numéros de nœuds globaux associés à chaque élément sont stockés dans la table des connectivités (liste de voisins)



Domaine



Numérotation des nœuds

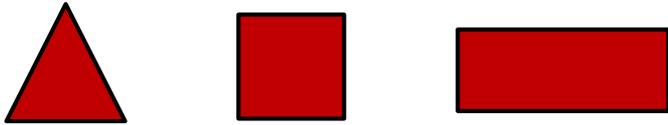


Numérotation des éléments

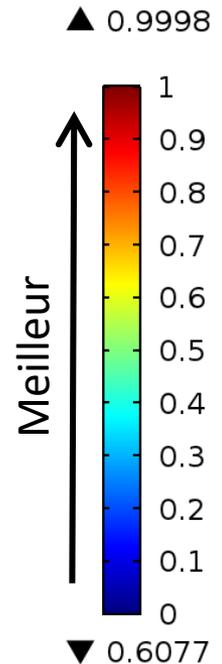
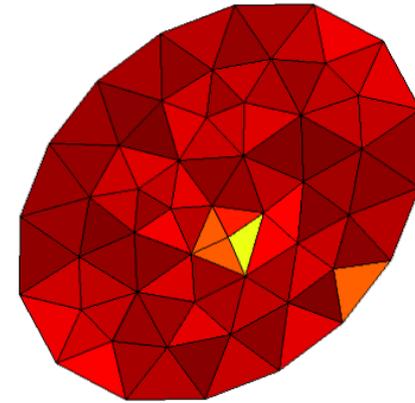
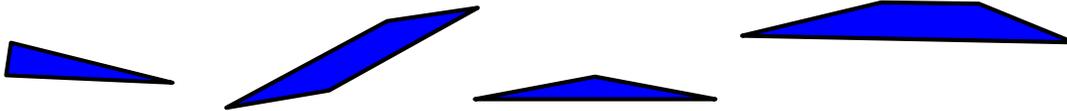
<u>No. élément</u>	<u>No. des nœuds</u>		
1	10	2	34
2	4	33	14
3	1	22	16
...	...	...	...
52	35	19	32

# Qualité des éléments – éviter les éléments distordus!

✓ Éléments de bonnes proportions



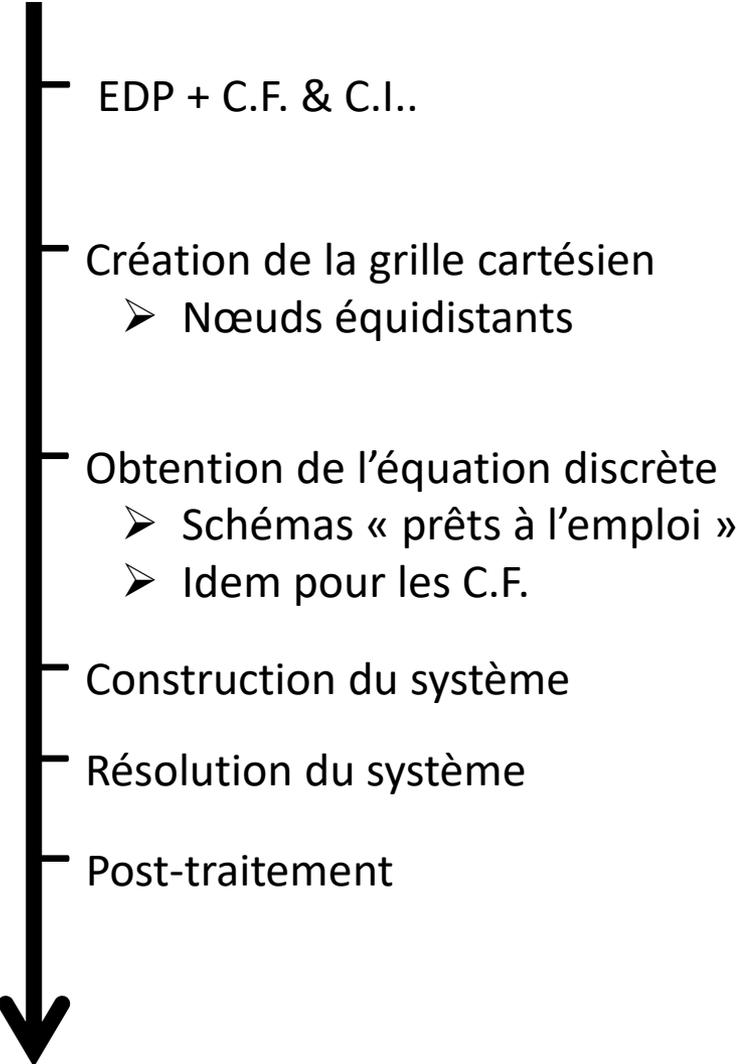
✗ Éléments trop aplatis ou étirés



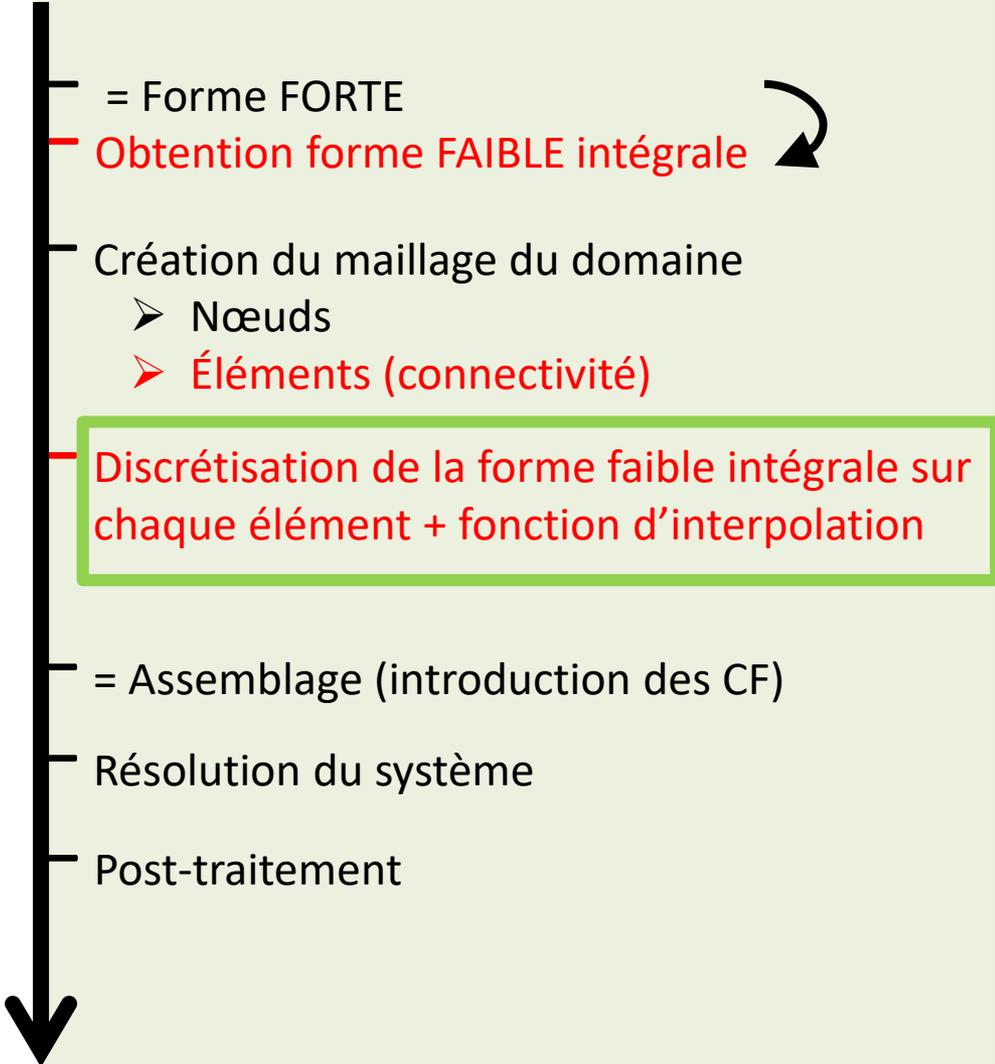
- Surviennent souvent lorsque l'on tente de **mailler des détails géométriques de petite taille** avec des éléments trop grands
- Peuvent nuire à la pertinence du résultat de plusieurs façons :
  - fonctions de base d'allure irrégulière → polarisation du champ d'intérêt selon certaines directions
  - possible dégradation du conditionnement du système d'équations résolu

# Comparaison MDF vs. MEF

## *Différences finies (rappel)*



## *Éléments finis*



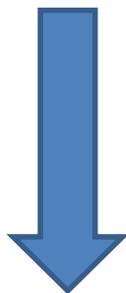
# Discrétisation de la forme faible intégrale par un ensemble d'éléments

$$\kappa \left( \int_{\Omega} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla T(\mathbf{x}) \, d\Omega - \alpha \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{x}) \, d\Gamma \right) = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) \, d\Omega$$



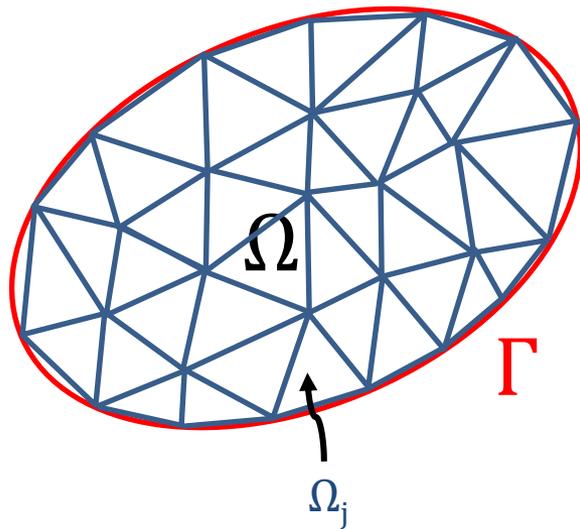
Supposons ici pour simplifier  $\alpha = 0$

$$\kappa \left( \int_{\Omega} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla T(\mathbf{x}) \, d\Omega \right) = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) \, d\Omega$$



$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{N_e} \Omega_j$$

$$\Omega_l \cap_{l \neq m} \Omega_m = \emptyset$$



$N_e =$  nombre d'éléments finis

$$\kappa \left( \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Omega_j} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla T(\mathbf{x}) \, d\Omega_j \right) = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Omega_j} \varphi(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) \, d\Omega_j$$

On souhaite maintenant se "débarrasser" de ce gradient...

$\forall \mathbf{x} \in \Omega$  et  $\forall \varphi(\mathbf{x})$

Formulation intégrale faible discrétisée

# Introduction des fonctions d'interpolation en chaque élément

- En chaque élément contenant  $N_n$  nœuds, nous pouvons interpoler le champ d'intérêt par :

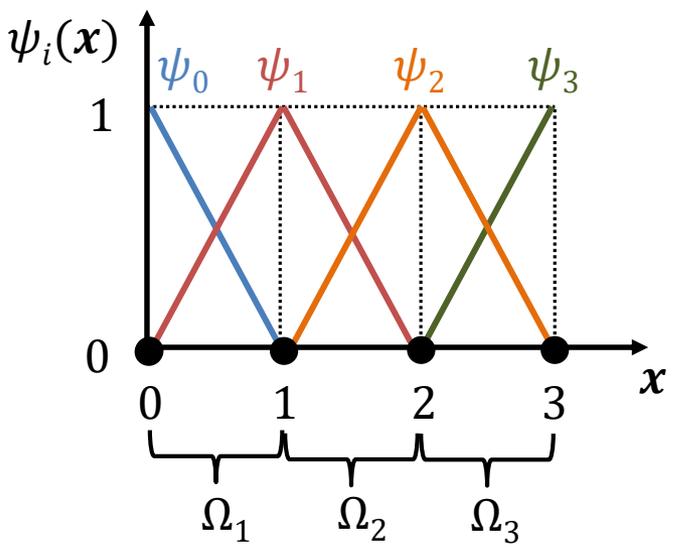
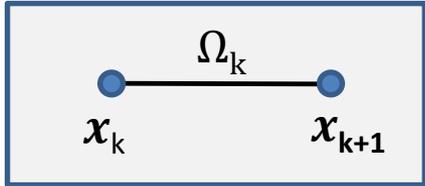
Polynôme de Lagrange

$$T(x) = \sum_{i=1}^{N_n} T_i \psi_i(x)$$

Température au nœud  $i$   
Fonctions de base

$$\psi_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

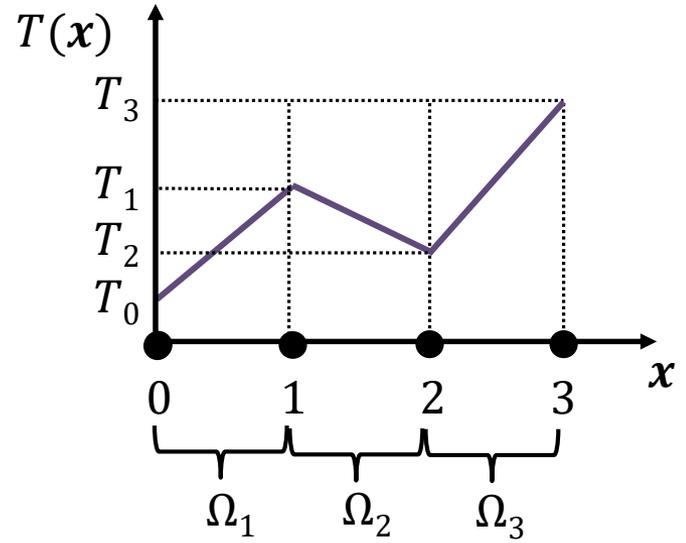
## 1) Polynôme de Lagrange de degré 1 - exemple 1D:



$$\psi_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{1 - x}{1 - 0}$$

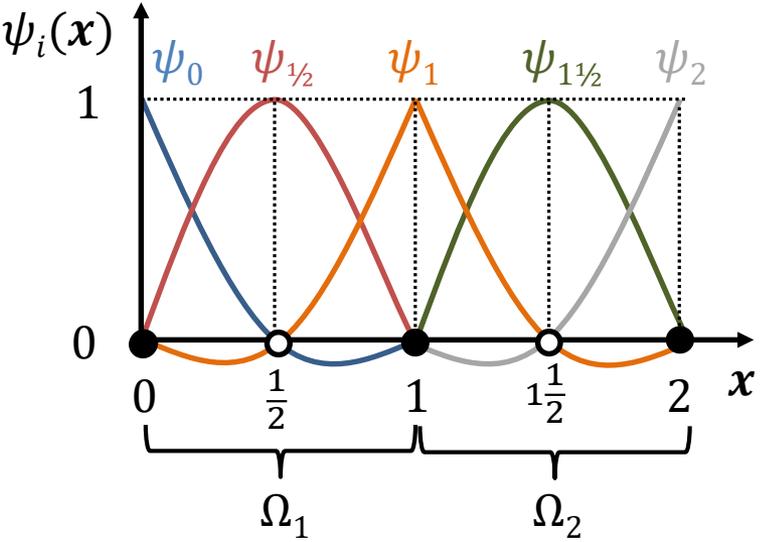
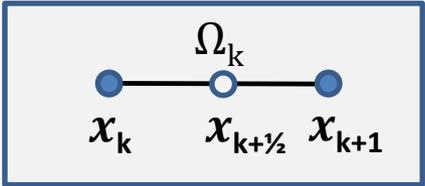
$$\psi_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - 0}{1 - 0}$$

etc...



# Introduction des fonctions d'interpolation en chaque élément

## 2) Polynôme de Lagrange de degré 2 - exemple 1D:

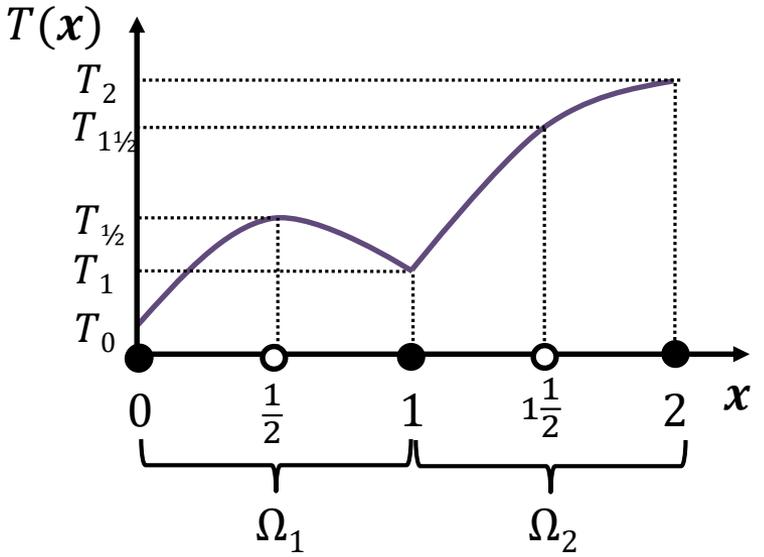


$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \left( \frac{x - x_{1/2}}{x_0 - x_{1/2}} \right) \left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \\ &= 2 \left( x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{1/2}(x) &= \left( \frac{x - x_0}{x_{1/2} - x_0} \right) \left( \frac{x - x_1}{x_{1/2} - x_1} \right) \\ &= -4(x^2 - x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left( \frac{x - x_{1/2}}{x_1 - x_{1/2}} \right) \\ &= 2 \left( x^2 - \frac{1}{2}x \right) \end{aligned}$$

etc...



# Propriétés de l'interpolation de Lagrange

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_n} T_i \psi_i(\mathbf{x})$$

$$\psi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$$

1

$$\rightarrow T(\mathbf{x}_i) = T_1 \times (0) + \dots + T_i \times (1) + \dots + T_{N_n} \times (0) = T_i$$

$$\sum_{i=1}^{N_n} \psi_i(\mathbf{x}) = 1$$

2

$$\nabla T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_n} T_i \nabla \psi_i(\mathbf{x})$$

3

Constantes!

# Introduction des fonctions d'interpolation dans la formulation intégrale faible discrétisée + remplacement de fonctions-test (Méthode de Galerkinge)

$$\kappa \left( \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Omega_j} \nabla \varphi \cdot \nabla T \, d\Omega_j \right) = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Omega_j} \varphi \cdot f \, d\Omega_j$$

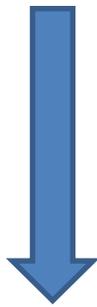
Pour un élément  $\Omega_j$  fixé



$$\nabla T = \sum_{i=1}^{N_n} T_i \nabla \psi_i$$

$$\kappa \left( \int_{\Omega_j} \left( \nabla \varphi \cdot \sum_{i=1}^{N_n} T_i \nabla \psi_i \right) d\Omega_j \right) = \int_{\Omega_j} \varphi \cdot f \, d\Omega_j$$

On choisit  $\varphi$  tel que...  
(méthode de Galerkinge)



$$\varphi = \{\psi_1, \dots, \psi_{N_n}\}$$

$$\nabla \varphi = \{\nabla \psi_1, \dots, \nabla \psi_{N_n}\}$$

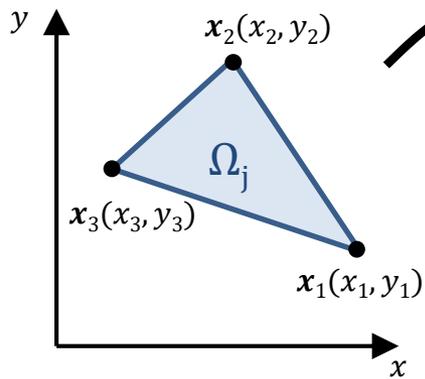
$$\kappa \left( \int_{\Omega_j} \left( \{\nabla \psi_1, \dots, \nabla \psi_{N_n}\} \cdot \sum_{i=1}^{N_n} T_i \nabla \psi_i \right) d\Omega_j \right) = \int_{\Omega_j} \{\psi_1, \dots, \psi_{N_n}\} \cdot f \, d\Omega_j$$

# Évaluations des fonctions d'interpolation sur un élément de référence

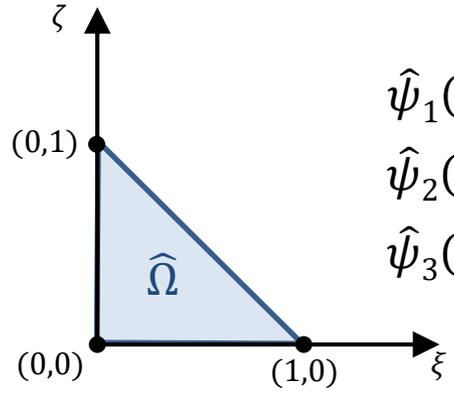
**Motivation :**

afin d'éviter l'évaluation de chacune des fonctions de base pour chaque élément, on préfère les évaluer dans un élément de référence pour lequel ses fonctions sont toujours les mêmes

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N_n} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j}{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}$$



Élément réel



Élément de référence

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1(\xi, \zeta) &= 1 - \xi - \zeta \\ \hat{\psi}_2(\xi, \zeta) &= \xi \\ \hat{\psi}_3(\xi, \zeta) &= \zeta \end{aligned}$$

**Comment ?**

le changement de base s'obtient de la façon suivante:

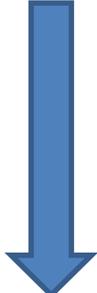
$$\begin{aligned} x(\xi, \zeta) &= x_1 \hat{\psi}_1(\xi, \zeta) + x_2 \hat{\psi}_2(\xi, \zeta) + x_3 \hat{\psi}_3(\xi, \zeta) = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\zeta \\ y(\xi, \zeta) &= y_1 \hat{\psi}_1(\xi, \zeta) + y_2 \hat{\psi}_2(\xi, \zeta) + y_3 \hat{\psi}_3(\xi, \zeta) = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\zeta \end{aligned}$$

# Formulation intégrale faible discrétisée avec fonctions d'interpolation exprimées sur l'élément de référence

$$\kappa \left( \int_{\Omega_j} \left( \{\nabla\psi_1, \dots, \nabla\psi_{N_n}\} \cdot \sum_{i=1}^{N_n} T_i \nabla\psi_i \right) d\Omega_j \right) = \int_{\Omega_j} \{\psi_1, \dots, \psi_{N_n}\} \cdot f d\Omega_j$$



$$\kappa \left( \int_{\Omega_j} \left( \nabla\psi_k \cdot \sum_{i=1}^{N_n} T_i \nabla\psi_i \right) d\Omega_j \right) = \int_{\Omega_j} \psi_k \cdot f d\Omega_j \quad \forall k \in \{1, \dots, N_n\}$$



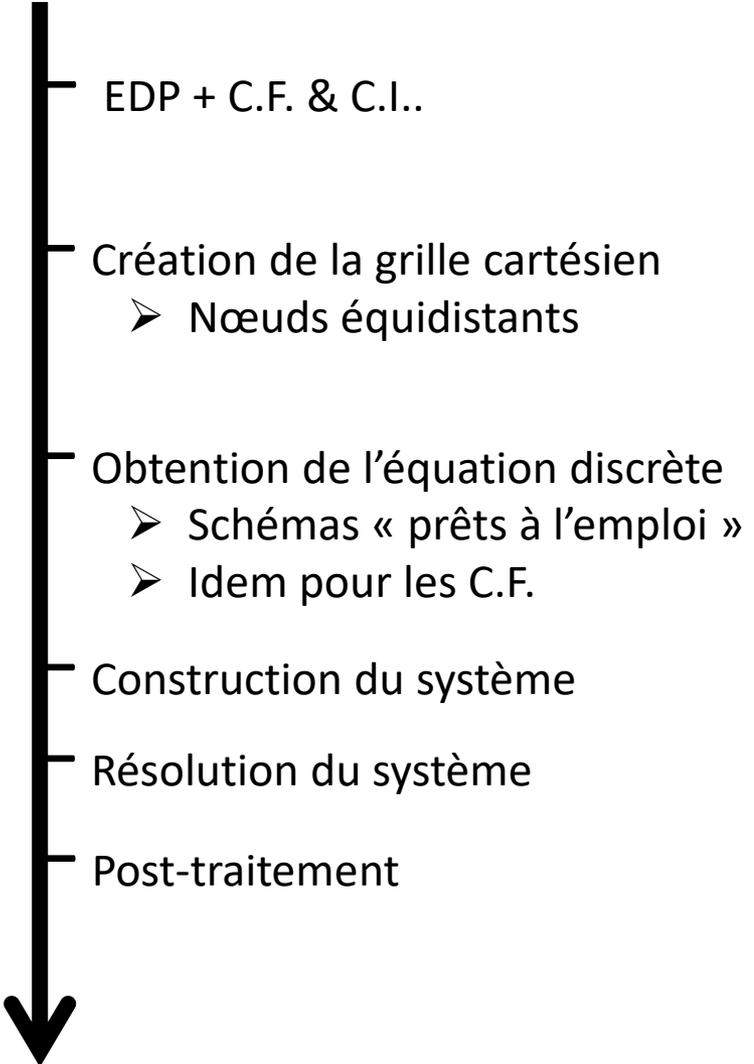
$$\begin{aligned} \Omega_j &\longrightarrow \hat{\Omega} \\ d\Omega_j &= \det[\mathbf{J}] d\hat{\Omega} \\ \nabla\psi_i &= \nabla\hat{\psi}_i[\mathbf{J}]^{-1} \end{aligned}$$

$$\kappa \left( \int_{\hat{\Omega}} \left( \nabla\hat{\psi}_k[\mathbf{J}]^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{N_n} T_i \nabla\hat{\psi}_i[\mathbf{J}]^{-1} \right) \det[\mathbf{J}] d\hat{\Omega} \right) = \int_{\hat{\Omega}} \hat{\psi}_k \cdot f \det[\mathbf{J}] d\hat{\Omega} \quad \forall k \in \{1, \dots, N_n\}$$

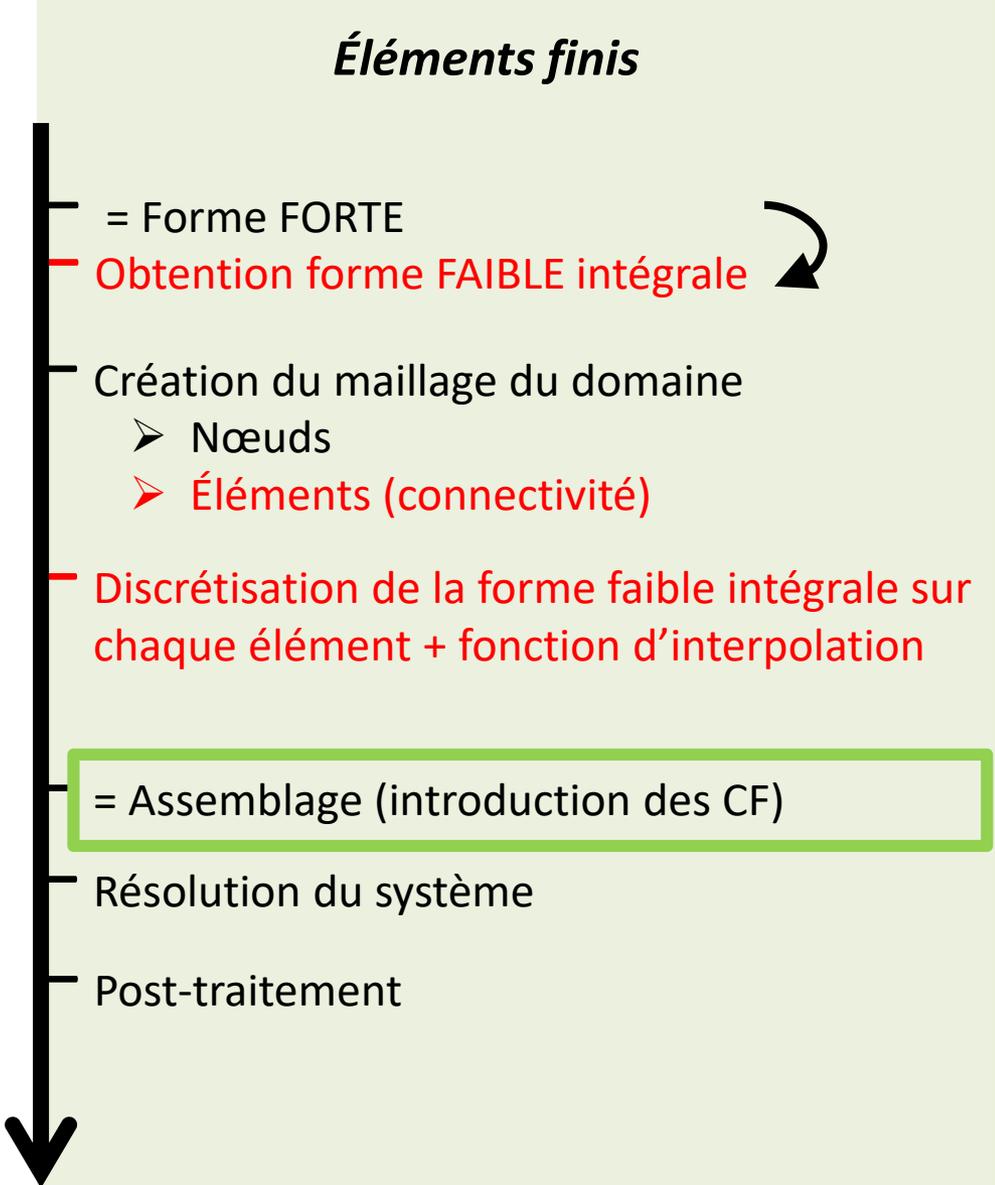
$[\mathbf{J}]$ : matrice Jacobienne de transformation de l'élément  $j$   
 $\det[\mathbf{J}]$ : déterminant de  $[\mathbf{J}]$

# Comparaison MDF vs. MEF

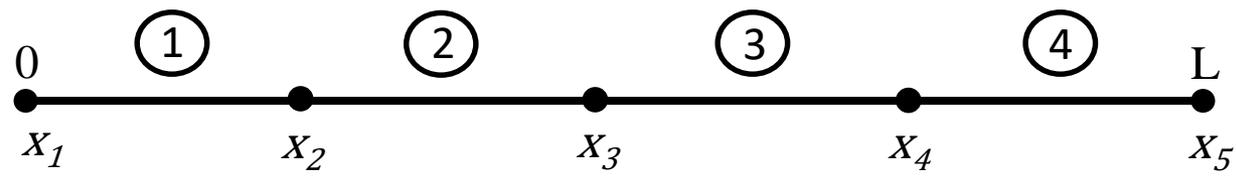
## *Différences finies (rappel)*



## *Éléments finis*



# Assemblage du système matriciel - Prenons un exemple avec $N_n=2$ et $N_e = 4...$



$$\kappa \left( \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\hat{\Omega}} \left( \nabla \hat{\psi}_k [\mathbf{J}]^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{N_n} T_i \nabla \hat{\psi}_i [\mathbf{J}]^{-1} \right) \det[\mathbf{J}] d\hat{\Omega} \right) = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\hat{\Omega}} \hat{\psi}_k \cdot f \det[\mathbf{J}] d\hat{\Omega}$$

valable sur tout le domaine  $\Omega$

$\forall k \in \{1, \dots, N_n\}$

Maintenant, pour un élément  $j$  donné

$$\det[\mathbf{J}] = x_k - x_{k+1} = h$$

$$[\mathbf{J}]^{-1} = \frac{1}{h}$$

$$\kappa \left( \int_{\hat{\Omega}} \left( \frac{1}{h} \nabla \hat{\psi}_k \cdot \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{N_n} T_i \nabla \hat{\psi}_i \right) h d\hat{\Omega} \right) = \int_{\hat{\Omega}} \hat{\psi}_k \cdot f h d\hat{\Omega} \quad \forall k \in \{1, \dots, N_n\}$$

$N_n = 2$

$$\frac{\kappa}{h} \left( \int_{\hat{\Omega}} \nabla \hat{\psi}_k \sum_{i=1}^2 T_i \nabla \hat{\psi}_i d\hat{\Omega} \right) = h \int_{\hat{\Omega}} \hat{\psi}_k \cdot f d\hat{\Omega} \quad , \quad \forall k \in \{1, 2\}$$

# Assemblage du système matriciel (suite)

$$\frac{\kappa}{h} \left( \int_{\hat{\Omega}} \nabla \hat{\psi}_k \sum_{i=1}^2 T_i \nabla \hat{\psi}_i d\hat{\Omega} \right) = h \int_{\hat{\Omega}} \hat{\psi}_k \cdot f d\hat{\Omega} \quad , \quad \forall k \in [1,2]$$

Nous avons:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1 &= 1 - \xi & \nabla \hat{\psi}_1 &= -1 \\ \hat{\psi}_2 &= \xi & \nabla \hat{\psi}_2 &= 1 \end{aligned}$$

Prenons:

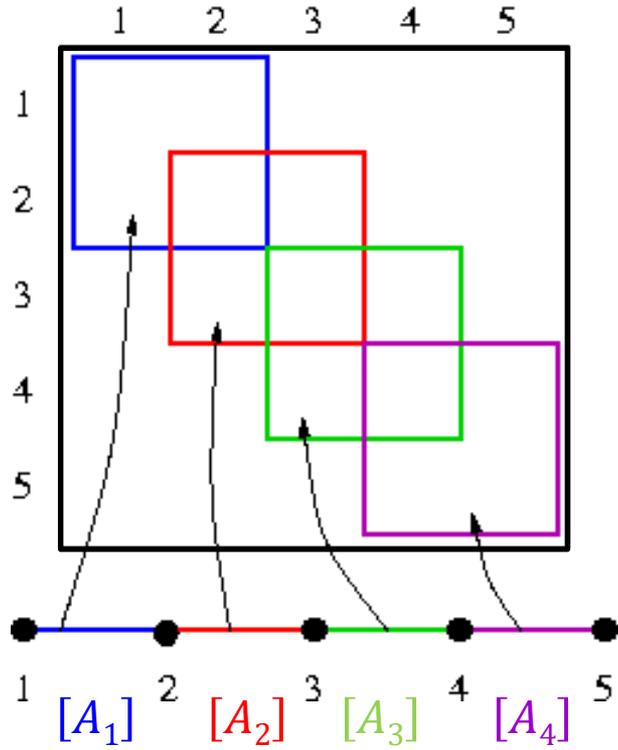
$$[A_j] = \frac{\kappa}{h^2} \int_{\hat{\Omega}} \nabla \hat{\psi}_k \nabla \hat{\psi}_i d\hat{\Omega} = \frac{\kappa}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{b_j\} = \int_{\hat{\Omega}} \hat{\psi}_k \cdot f d\hat{\Omega} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{\xi} (1 - \xi) \cdot f(\xi) d\xi \\ \int_{\xi} \xi \cdot f(\xi) d\xi \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Disons: } f = 0 \text{ c-à-d } k\nabla^2 T = 0} \{b_j\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Donc à l'élément  $j$ , nous pouvons écrire:

$$[A_j] \begin{Bmatrix} T_j \\ T_{j+1} \end{Bmatrix} = \{b_j\}$$

# Assemblage final – Matrice diffuse



$$[A_j] = \frac{\kappa}{h^2} \int_{\hat{\Omega}} \nabla \hat{\psi}_k \nabla \hat{\psi}_i d\hat{\Omega} = \frac{\kappa}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

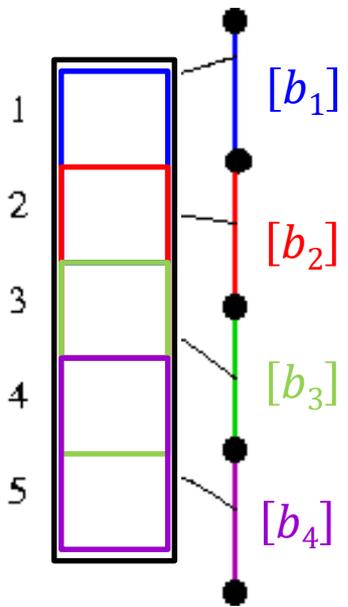


$$[A] = \frac{\kappa}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$[A] = \frac{\kappa}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Assemblage final – Vecteur élémentaire



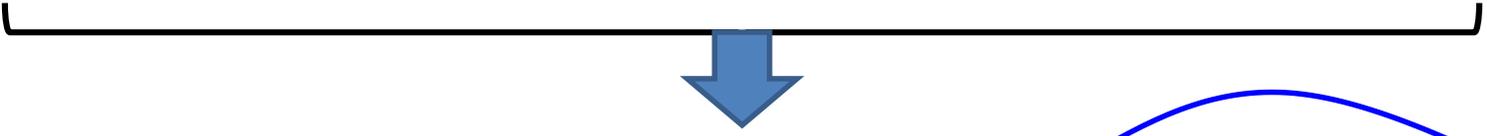
$$\{b_j\} = \begin{Bmatrix} b_{j,1} \\ b_{j,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\{b\} = \begin{Bmatrix} b_{1,1} \\ b_{1,2} + b_{2,1} \\ b_{2,2} + b_{3,1} \\ b_{3,2} + b_{4,1} \\ b_{4,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

# Assemblage final – Système matriciel et imposition des conditions de Dirichlet

$$[A] = \frac{\kappa}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} b_{1,1} \\ b_{1,2} + b_{2,1} \\ b_{2,2} + b_{3,1} \\ b_{3,2} + b_{4,1} \\ b_{4,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**Supposons:**

- $T_1 = T_a$
- $T_5 = T_b$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_b \end{Bmatrix}$$

Pour les conditions de Neumann, cf. diapo 9

# Assemblage final – Système matriciel et imposition des conditions de Dirichlet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_b \end{Bmatrix}$$

Forme non-compacte



$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_a \\ 0 \\ T_b \end{Bmatrix}$$

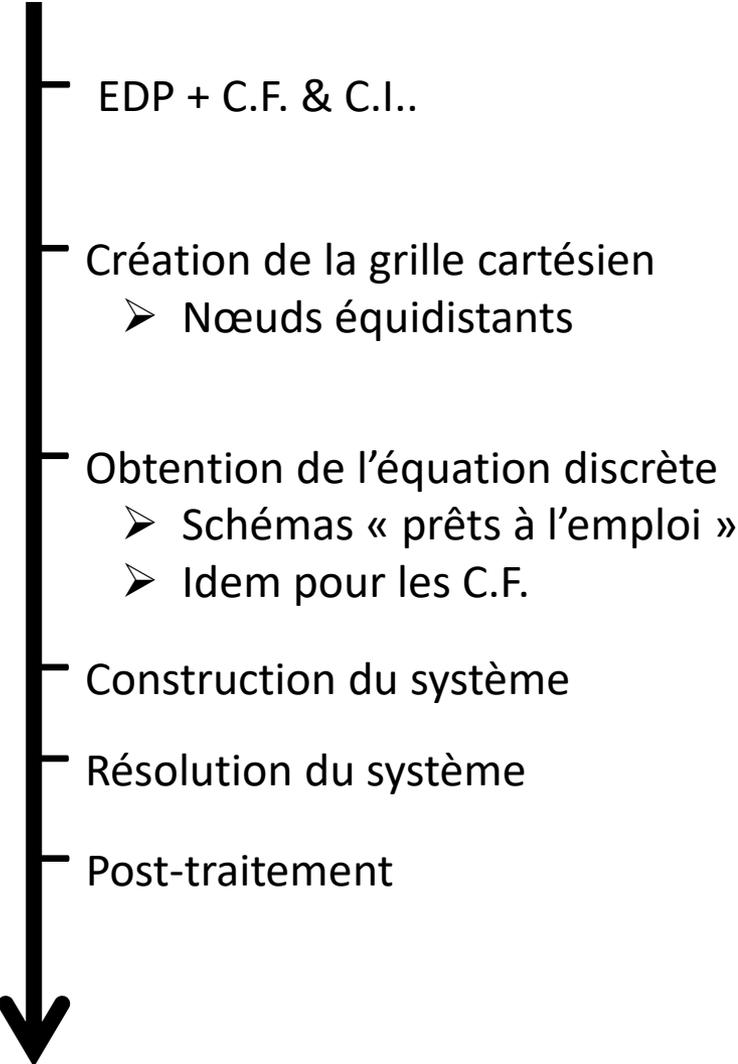
Forme compacte

**Rappel:**

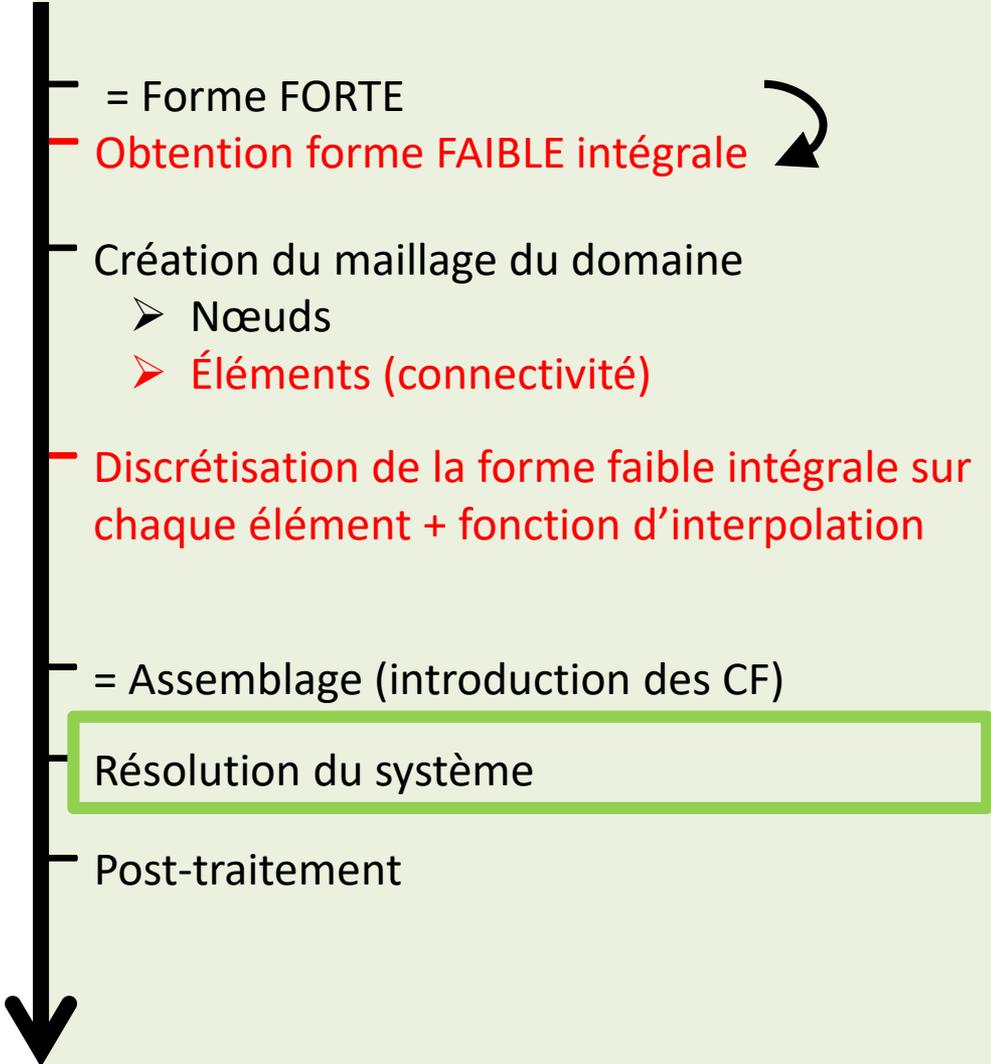
$$\left\| \begin{array}{l} -\kappa \frac{d^2 T}{dx^2} = f \text{ dans } \Omega \\ T(x=a) = T_a \\ T(x=b) = T_b \end{array} \right. \xrightarrow{\text{MDF}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_a + (h^2/\kappa)f_2 \\ (h^2/\kappa)f_3 \\ T_b + (h^2/\kappa)f_4 \end{Bmatrix}$$

# Comparaison MDF vs. MEF

## *Différences finies (rappel)*



## *Éléments finis*



# Quel algorithme doit-on choisir pour résoudre un système linéaire?

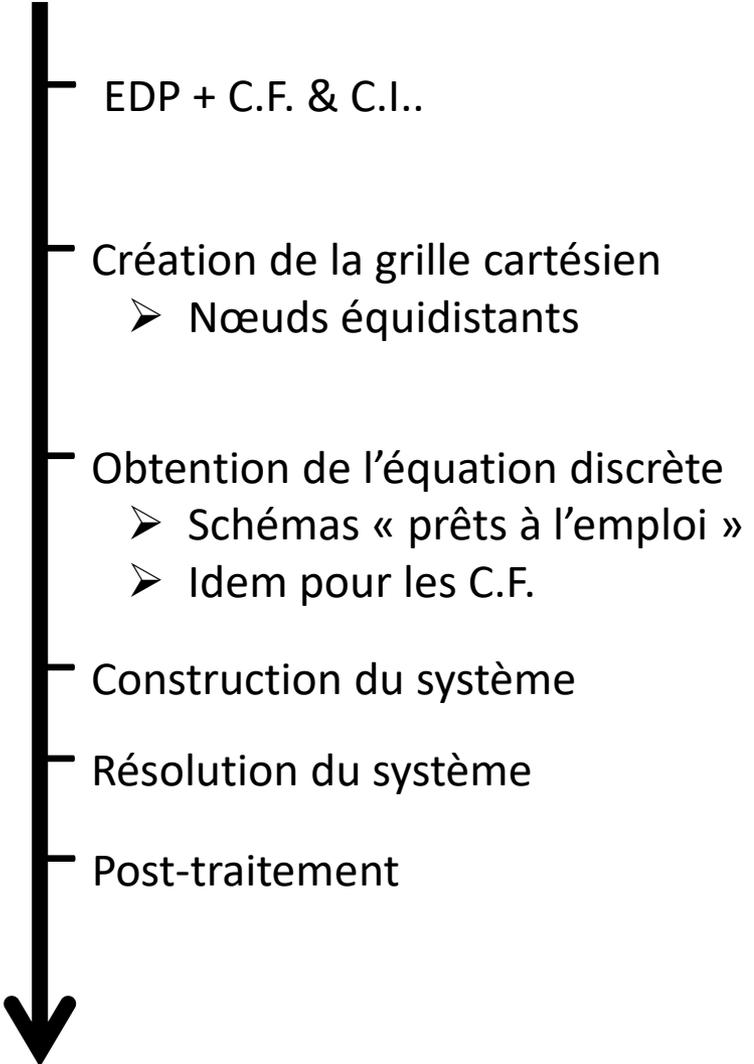
## Réponse:

- On choisit l'algorithme en fonction de la taille  $N$  du système et du type de matrice (p.ex. diagonale, creuse,...) à résoudre.
- Méthodes disponibles:
  - Inversion de matrice et formule de Cramer (calculs de déterminant)
  - Méthodes directes "avancées" (p.ex. factorisation LU, algorithme de Thomas,...)
  - Méthodes itératives (p.ex. méthodes de gradient conjugué, Gauss-Seidel, GMRES, BiCGStab...)

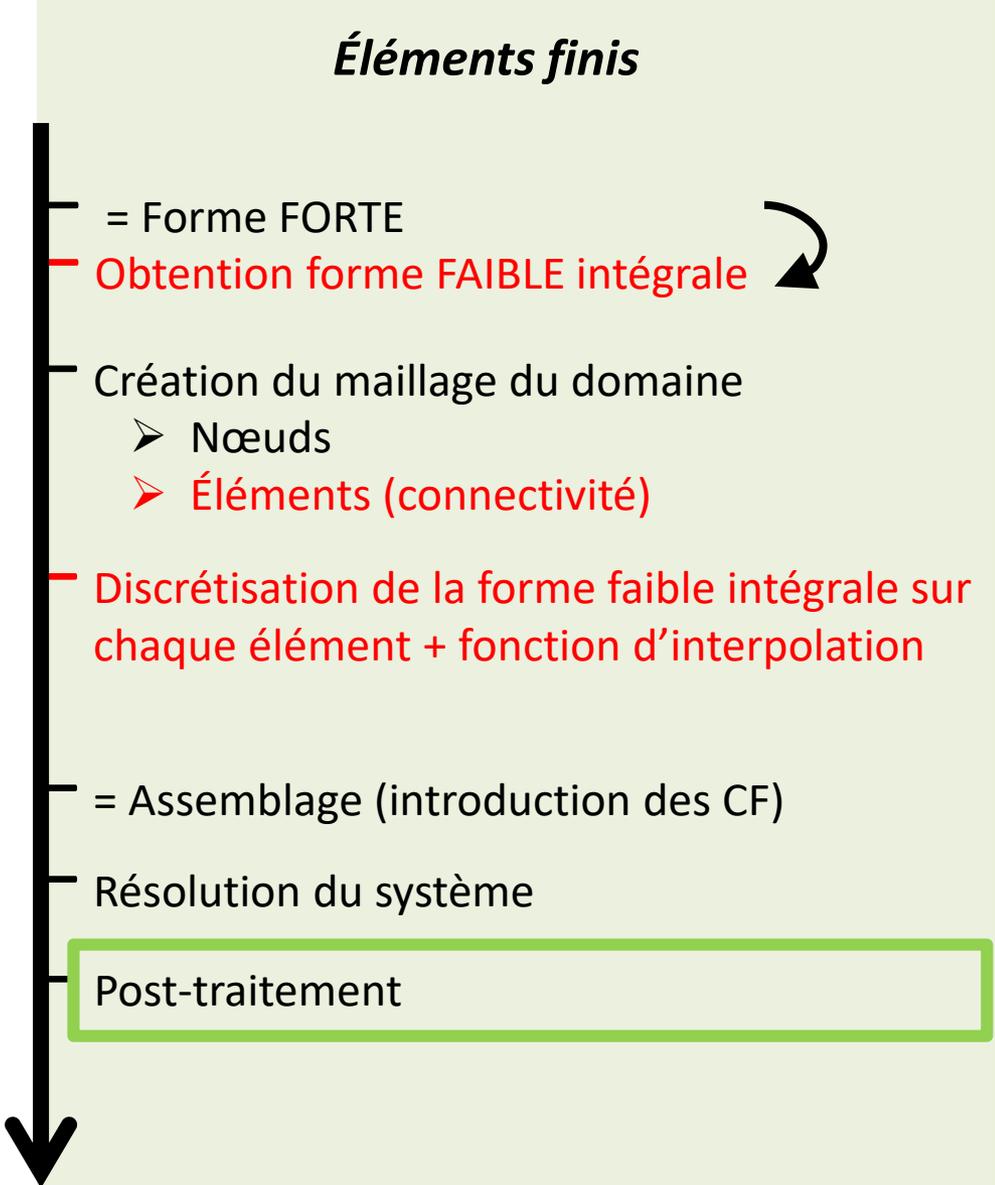
N=	5	10	25	$10^5$	$10^6$
Formule de Cramer	1300 flops	$4 \times 10^8$ flops	$10^{15}$ ans	$\infty$	$\infty$
Factorisation LU	100 flops	900 flops	$\sim O(\text{msec})$	$\sim O(\text{heure})$	$\sim O(\text{mois})$
Méthode itérative	-	-	-	$\sim O(\text{min})$	$\sim O(\text{heure})$

# Comparaison MDF vs. MEF

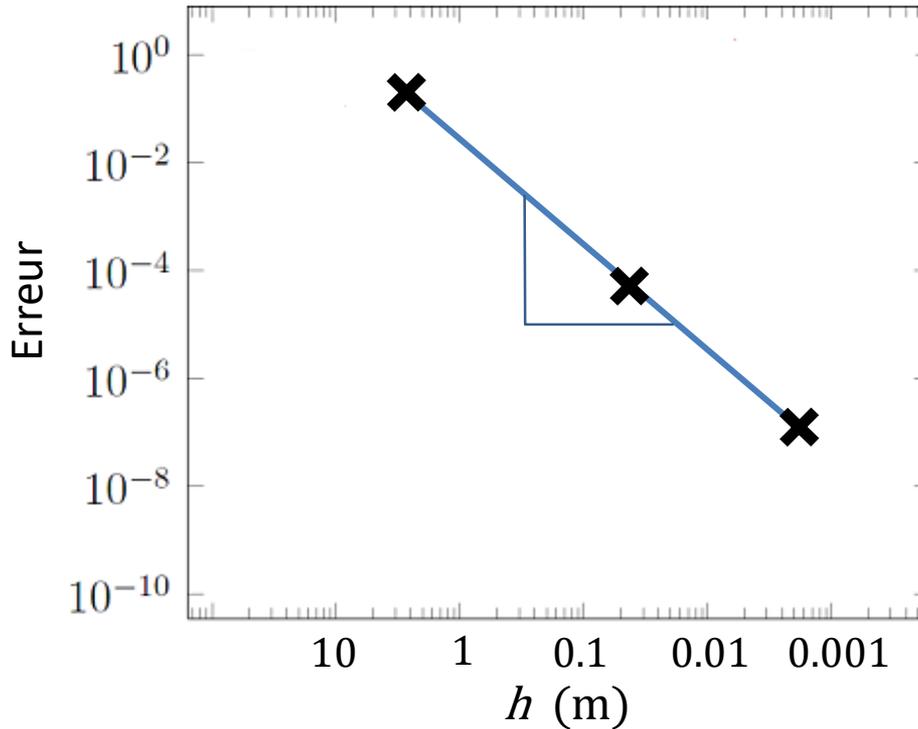
## *Différences finies (rappel)*



## *Éléments finis*



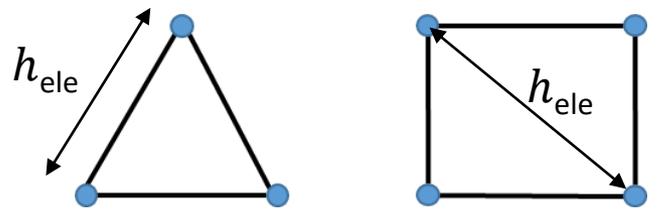
# Toujours vérifier la convergence de son schéma numérique!!!



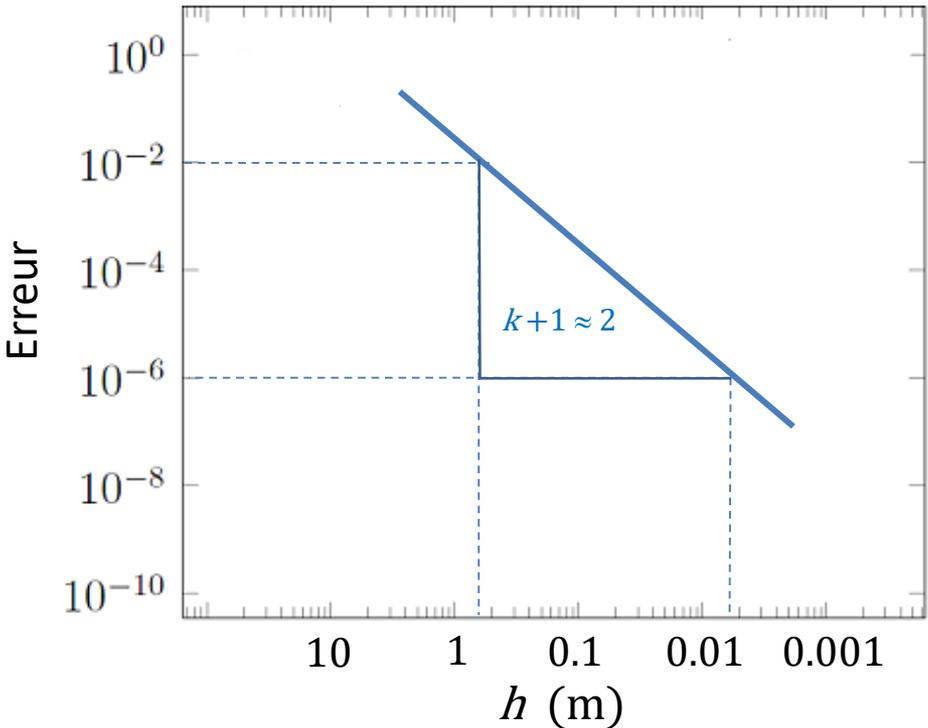
- Utiliser 3 maillages de tailles de maille différentes (grossier, moyen & fin)
- Pour calculer l'erreur, si vous n'avez pas de solution analytique, comparez alors les résultats obtenus par rapport au maillage le plus fin ou à l'extrapolation de Richardson
- Un ordre 2 est souhaitable

# Précision des éléments finis

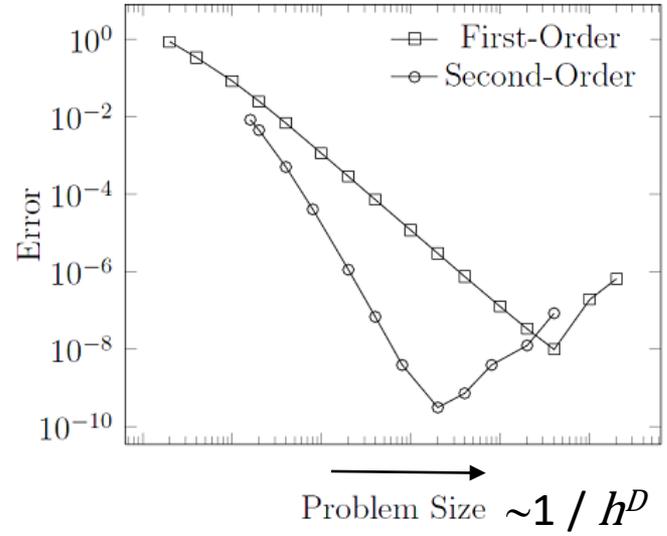
$$\begin{aligned} \text{Erreur } L_2 &= \sqrt{\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} |T_i - T(x_i)|^2 d\Omega} = \|T_i - T(x_i)\|_2 \\ &= \sqrt{\frac{1}{N_{ele}} \sum_{i=1}^{N_{ele}} |T_i - T(x_i)|^2} \leq Ch^{k+1} \end{aligned}$$



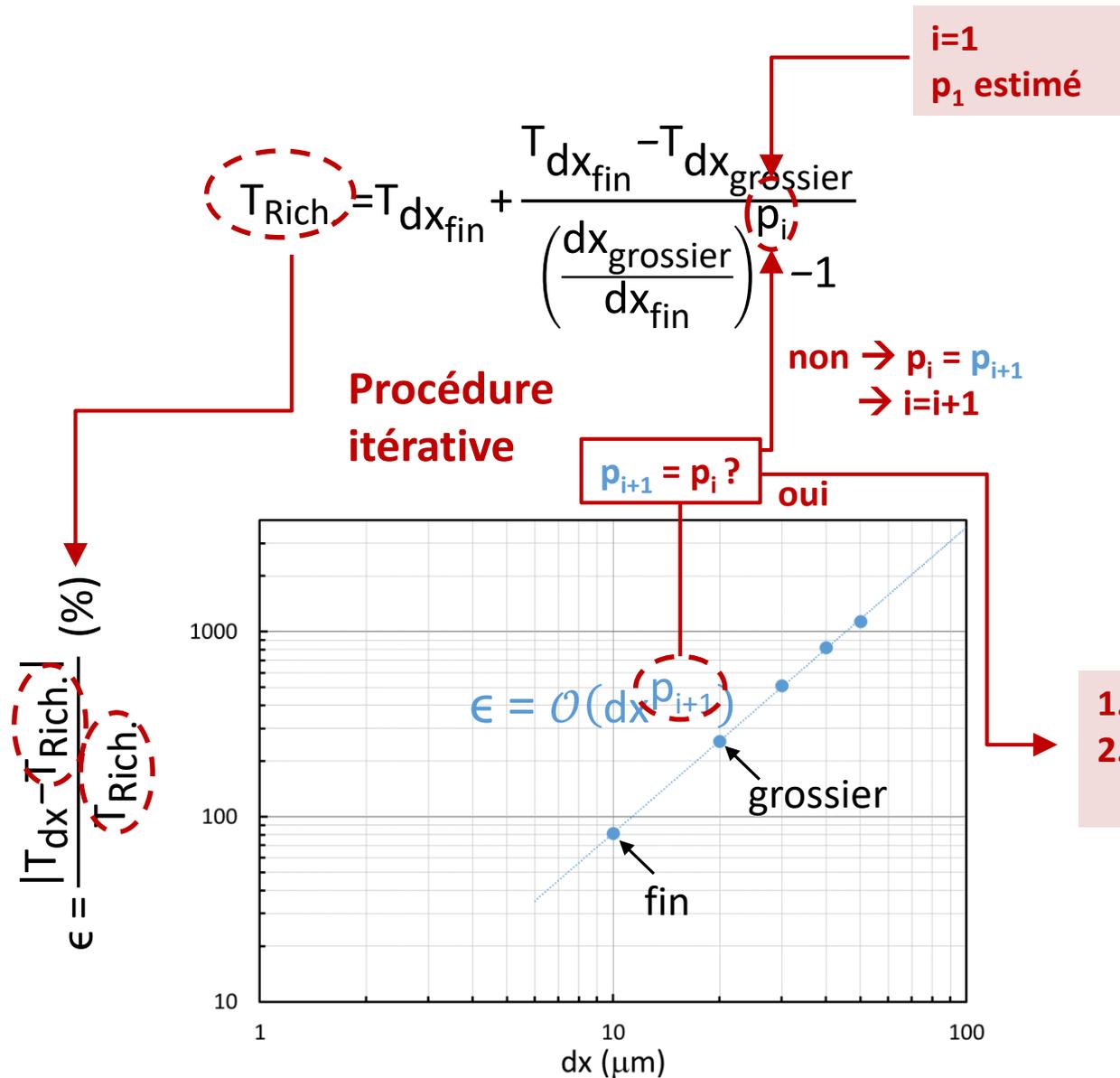
avec  $h = \max_{ele} h_{ele}$  (taille de maille) et  $k = \text{ordre des éléments utilisés}$



Exemple:



# Extrapolation de Richardson généralisée (lorsque la solution analytique n'est pas connue)



**Hypothèse principale :**  
Les solutions obtenues avec les maillages fin et grossier tendent de façon asymptotique vers une solution

↓

Autrement, la procédure itérative ne converge pas !

1. Ordre de convergence "p"
2. Estimé  $T_{Rich.}$  de la solution numérique pour  $dx \rightarrow 0$

## Remarques finales sur la méthode des éléments finis

- Permet de résoudre une variété d'EDP:

- elliptique (probl. stationnaire de diffusion):

$$\alpha \nabla^2 U + f = 0$$

- parabolique (probl. instationnaire de diffusion):

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \alpha \nabla^2 U + f = 0$$

- hyperbolique (probl. instationnaire d'advection):

$$\frac{\partial U}{\partial t} - v \cdot \nabla U + f = 0$$

- mixte transport (probl. instationnaire d'advection-diffusion):

$$\frac{\partial U}{\partial t} - (v \cdot \nabla U + \alpha \nabla^2 U) + f = 0$$

- **Avantages:**

1. Flexibilité → maillages non-structurés
2. Prise en compte "naturelle" des conditions frontières
3. Contrôle de l'erreur

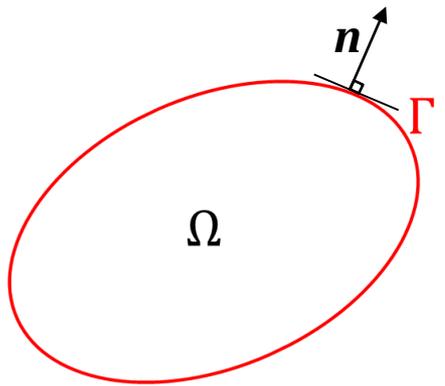
- **Inconvénients:**

1. Mise en place et programmation plus ardues que MDF
2. Parallélisation par décomposition de domaines ardue → système matriciel
3. Génération de maillage pour des géométries 3D peut devenir compliquée

# Méthode des Volumes Finis (MVF)

## Théorème de flux-divergence (ou de Green-Ostrogradski):

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d\Omega = \oiint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{n}$$



La divergence d'un champ vectoriel  $\mathbf{F}$  sur un volume  $\Omega$  est égale au flux de ce champ à travers la frontière  $\Gamma$  de ce volume (intégrale de surface).

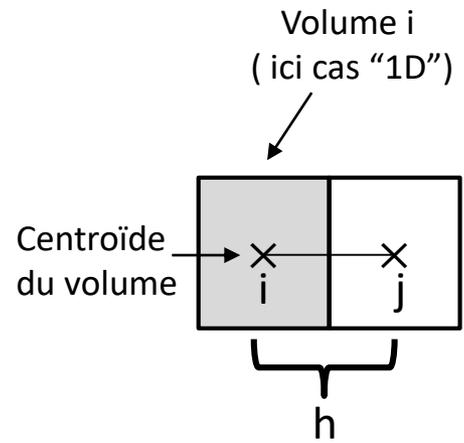
Prenons maintenant:  $\mathbf{F} = k\nabla T \rightarrow$

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot k\nabla T \, d\Omega = \oiint_{\Gamma} k\nabla T \cdot d\mathbf{n}$$

$$\iiint_{\Omega} k\nabla^2 T \, d\Omega = \oiint_{\Gamma} k\nabla T \cdot d\mathbf{n}$$

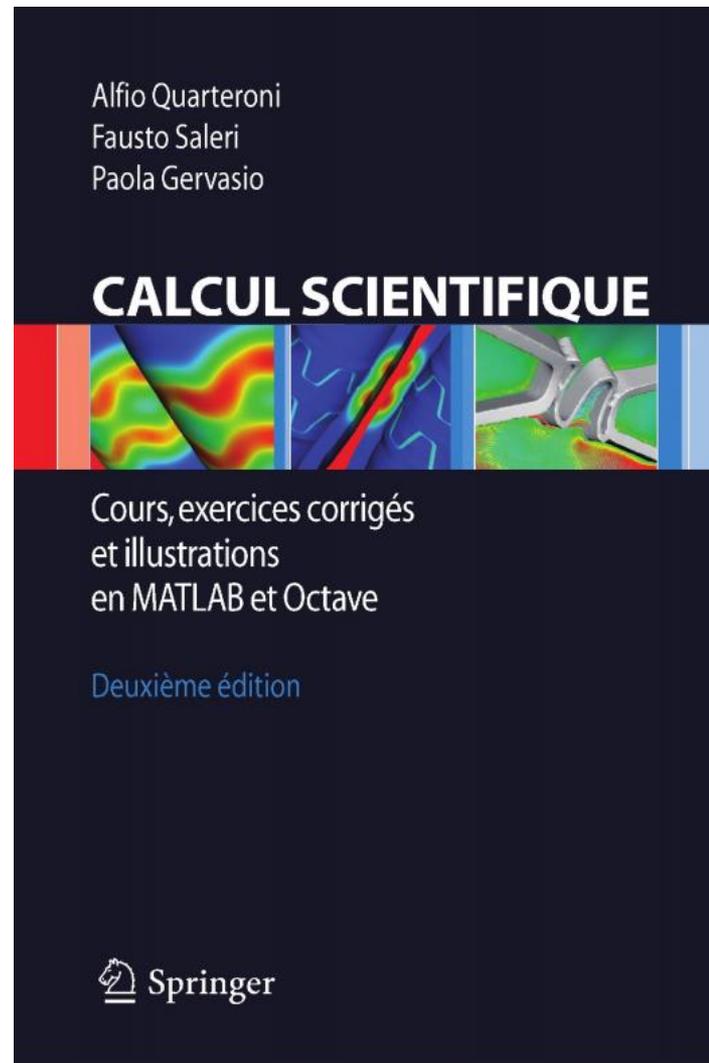
$$\iiint_{\Omega} k\nabla^2 T \, d\Omega = \oiint_{\Gamma} k \frac{T_i - T_j}{h} \cdot d\mathbf{n}$$

$\downarrow$   $k=\text{constante}$   
 $\downarrow$  Discrétisation du flux par une différence finie



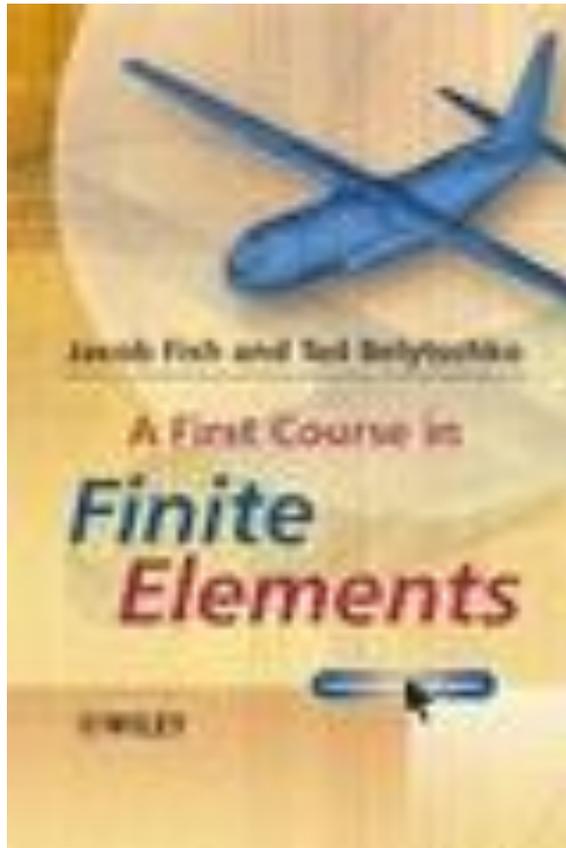
$$\nabla T = \frac{T_i - T_j}{h}$$

La méthode consiste donc à sommer tous les flux entrant par toutes les frontières d'un volume et de discrétiser ce flux au moyen d'un schéma de différences finies

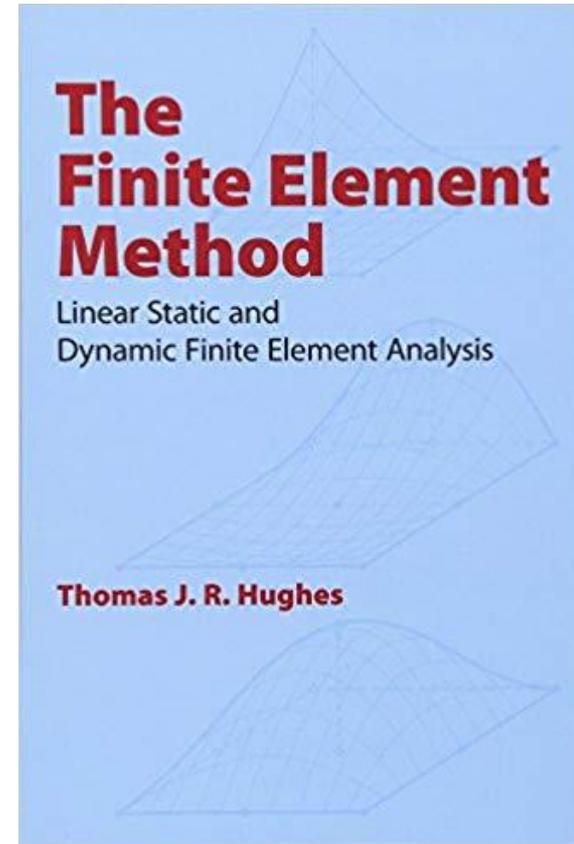


## Chapitre 8

## Autres lectures pour les plus passionnés



<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/9780470510858>



<https://www.amazon.com/The-Finite-Element-Method-Engineering/dp/0486411818>