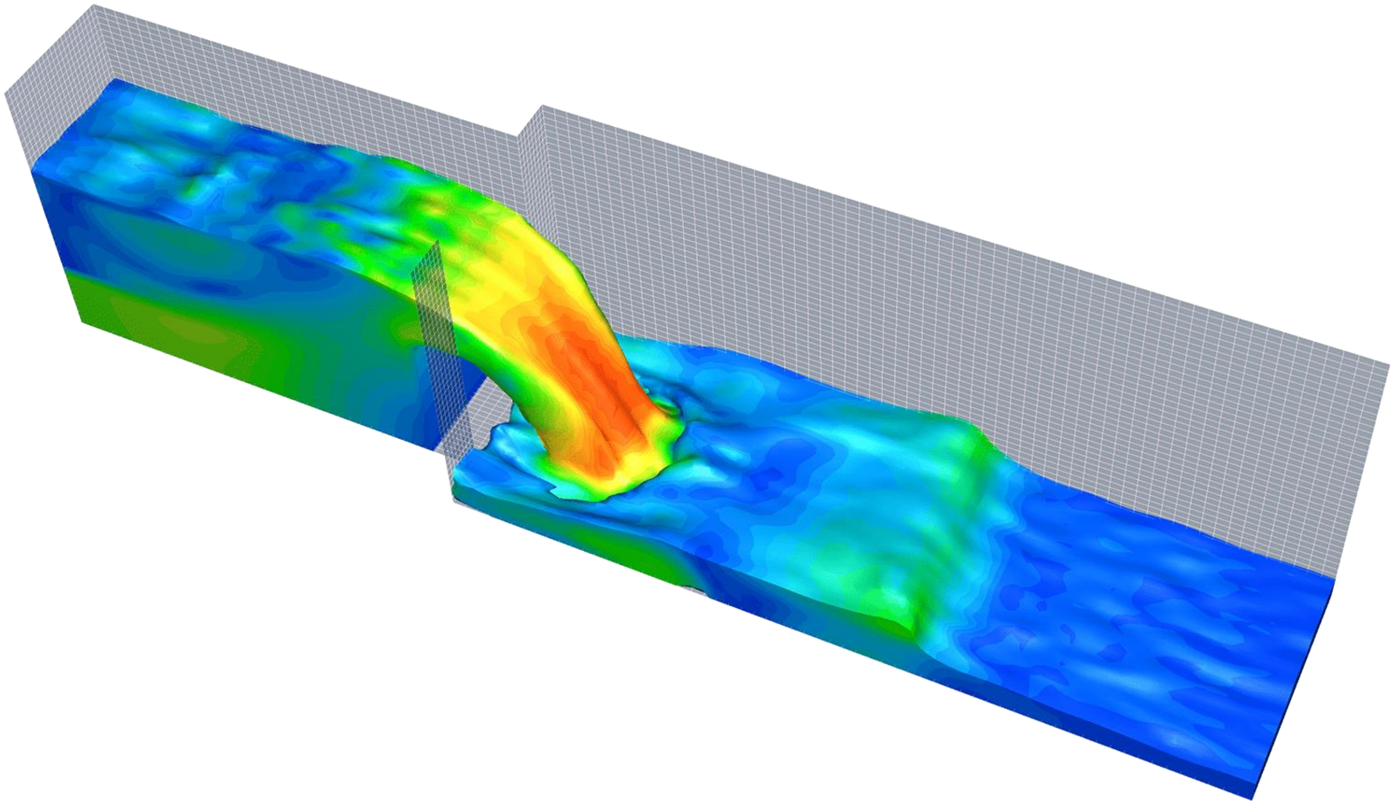
Modélisation numérique en génie chimique
GCH2535
Équations aux dérivées ordinaires (EDO)



POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

Diapositives adaptées de :
David Vidal
Bruno Blais
François Bertrand

Génie chimique POLYTECHNIQUE

Plan de cours

Semaine	Date	Séance	Notes	Sujet
2	Mercredi 8 Jan	1		EDP
2	Jeudi 9 Jan	2		EDP
3	Mercredi 15 Jan	3		EDP
3	Jeudi 16 Jan	4	Départ Devoir 1 (EDP)	EDP
4	Mercredi 22 Jan	5		EDP
4	Jeudi 23 Jan	6		TD#1
5	Mercredi 29 Jan	7	Remise Devoir 1 (EDP)	Intro
5	Jeudi 30 Jan	8		Intro / EDO
6	Mercredi 5 Fév	9	Partiel 1 (EDP)	CP#1
6	Jeudi 6 Fév	10		EDO
7	Mercredi 12 Fév	11	Départ Devoir 2 (MDF)	TD#2
7	Jeudi 13 Fév	12		MDF
8	Mercredi 19 Fév	13		MDF
8	Jeudi 20 Fév	14		MEF
9	Mercredi 26 Fév	15		TD#3 (LAB-MDF)
9	Jeudi 27 Fév	16		MEF
10	Mercredi 4 Mar		Relâche	
10	Jeudi 5 Mar		Relâche	
11	Mercredi 11 Mar	17	Remise Devoir 2 (MDF)	TD#4 (LAB-MEF)
11	Jeudi 12 Mar	18	Partiel 2 (EDO-MDF-MEF)	CP#2
12	Mercredi 18 Mar	19		Données exp.
12	Jeudi 19 Mar	20	Départ Devoir 3	Données exp.
13	Mercredi 25 Mar	21		Bilans
13	Jeudi 26 Mar	22		TD#5
14	Mercredi 1 Avr	23		Bilans
14	Jeudi 2 Avr	24		Opt./Rec.
15	Mercredi 8 Avr	25	Remise Devoir 3	Opt./Rec.
15	Jeudi 9 Avr	26		TD#6

Équations différentielles ordinaires avec conditions initiales

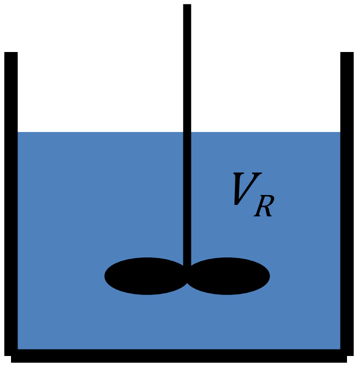
- Comment résoudre une équation différentielle ordinaire du type :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$$

Problème de Cauchy
OU
problème de valeur initiale

pour laquelle $x(t=0)$ est connu.

- Utilisons un exemple :
  - Soit le réacteur semi-continu suivant



  - La réaction qui s'y déroule est donnée par :

$$A \xrightarrow{r} B$$
$$r = kC_A \quad [=] \ \mathrm{mol/(l.}s)$$

  - Initialement, le réacteur contient un volume connu égal à V_0 d'un liquide inerte.
  - Le bilan de matière non stationnaire <u>sur A</u> s'écrit donc :

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{entrée} & - & \text{consommation} & + & \text{génération} & = & \text{sortie} & + & \text{accumulation} \\ 0 & - & kC_A \ V_R(t) & + & 0 & = & 0 & + & \dfrac{dn_A}{dt} \end{array}$$

Équations différentielles ordinaires avec conditions initiales

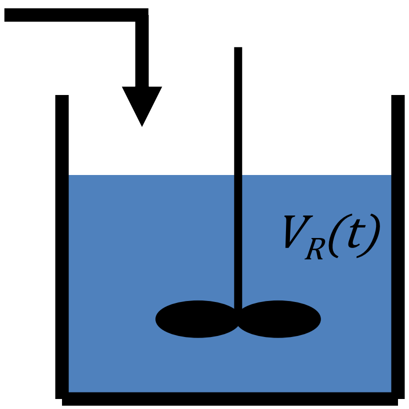
- Comment résoudre une équation différentielle ordinaire du type :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$$

Problème de Cauchy
OU
problème de valeur initiale

pour laquelle $x\,(t{=}0)$ est connu.

$$Q_0 \;[=]\; \mathrm{l}/s$$
$$C_{A0} \;[=]\; \mathrm{mol/l}$$



- Utilisons un exemple :
  - Soit le réacteur semi-continu suivant
  - La réaction qui s'y déroule est donnée par :

$$A \xrightarrow{r} B$$
$$r = kC_A^2 \quad [=]\; \mathrm{gmol}/(\mathrm{l} \cdot s)$$

  - Initialement, le réacteur contient un volume connu égal à V_0 d'un liquide inerte. On alimente le réacteur d'un réactif à un débit Q_0 avec une concentration C_{A0}.
  - Le bilan de matière non stationnaire <u>sur A</u> s'écrit donc :

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{entrée} & - & \text{consommation} & + & \text{génération} & = & \text{sortie} & + & \text{accumulation} \\ Q_0 C_{A0} & - & kC_A^2\, V_R(t) & + & 0 & = & 0 & + & \dfrac{dn_A}{dt} \end{array}$$

- Ici,
  - $n_A = C_A \times V_R$ [=] mol
  - dn_A/dt [=] mol/s
- Le bilan peut se réécrire :

$$\frac{dn_A}{dt} = Q_0 C_{A_0} - \frac{k n_A^2}{V_R(t)} \qquad (1)$$

- Un bilan de masse <u>sur tout le réacteur</u> permet d'éliminer l'augmentation du volume dans le temps causé par l'ajout de réactif. Le bilan donne :

$$\frac{d}{dt}(\rho V_R) = \rho Q_0 \ avec\, comme\ condition\ initiale V_R(0) = V_0$$

- Avec l'hypothèse que la masse volumique ρ ne change pas en raison de l'ajout et de la réaction, on obtient :

$$\frac{d}{dt}(V_R) = Q_0 \longrightarrow V_R = V_0 + Q_o t$$

- L'équation (1) plus haut devient alors :

$$\frac{dn_A}{dt} = Q_0 C_{A_0} - \frac{k n_A^2}{V_0 + Q_0 t} \quad et \quad laquelle \quad n_A(0) = 0$$

- Avec les valeurs suivantes :
  - C_{A0} = 1 gmol/l
  - k = 0,1 l/(gmol · s)
  - Q_0 = 10 l/s
  - V_0 = 50 l
- On obtient la forme :

$$\frac{dn_A}{dt} = 10 - \frac{0{,}1 n_A^2}{50 + 10t} \quad (2)$$

avec $n_A(0) = 0$

- On a donc bien un problème de la forme :

$$\frac{dn_A}{dt} = f\left(t, n_A\right)$$

- Comment résoudre?

Développement en series de Taylor

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(a) + \ldots$$

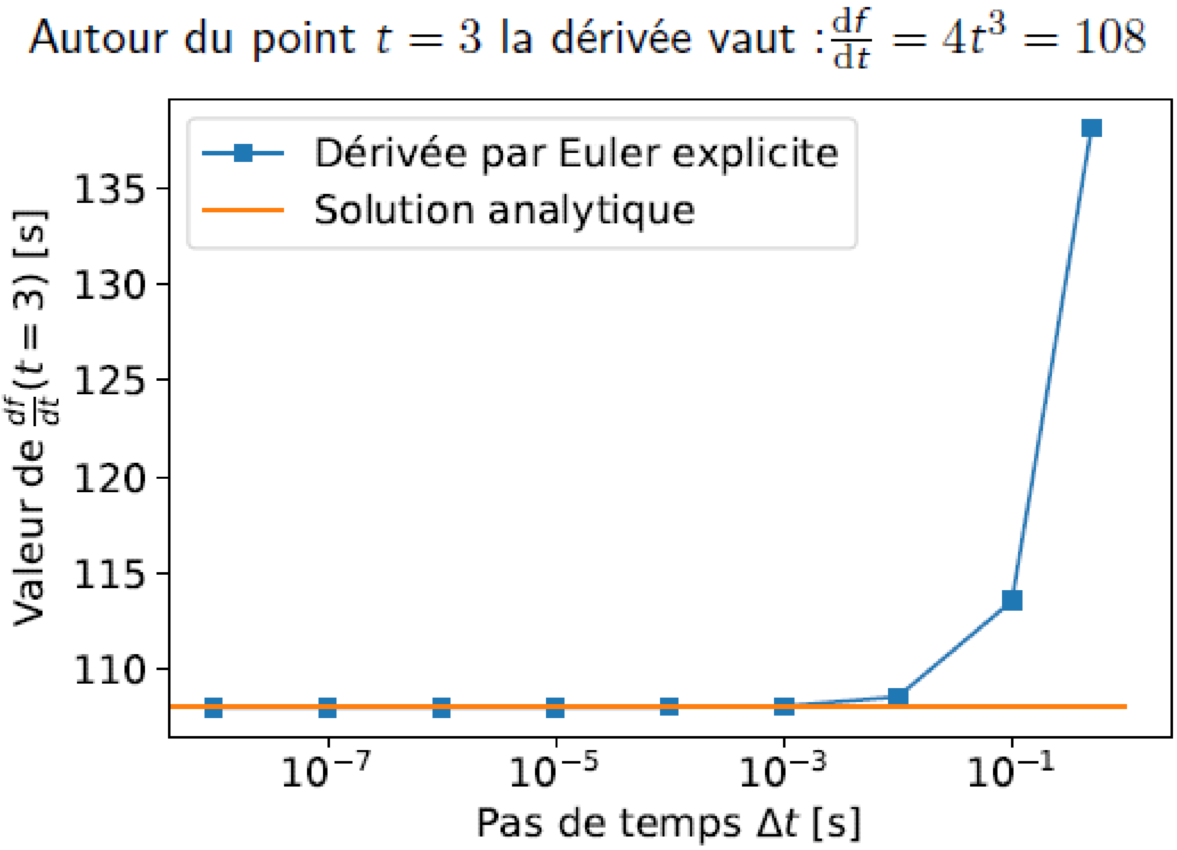
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(a)$$

Exemple sur une fonction simple:

$$f(t) = t^4$$
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 4t^3$$

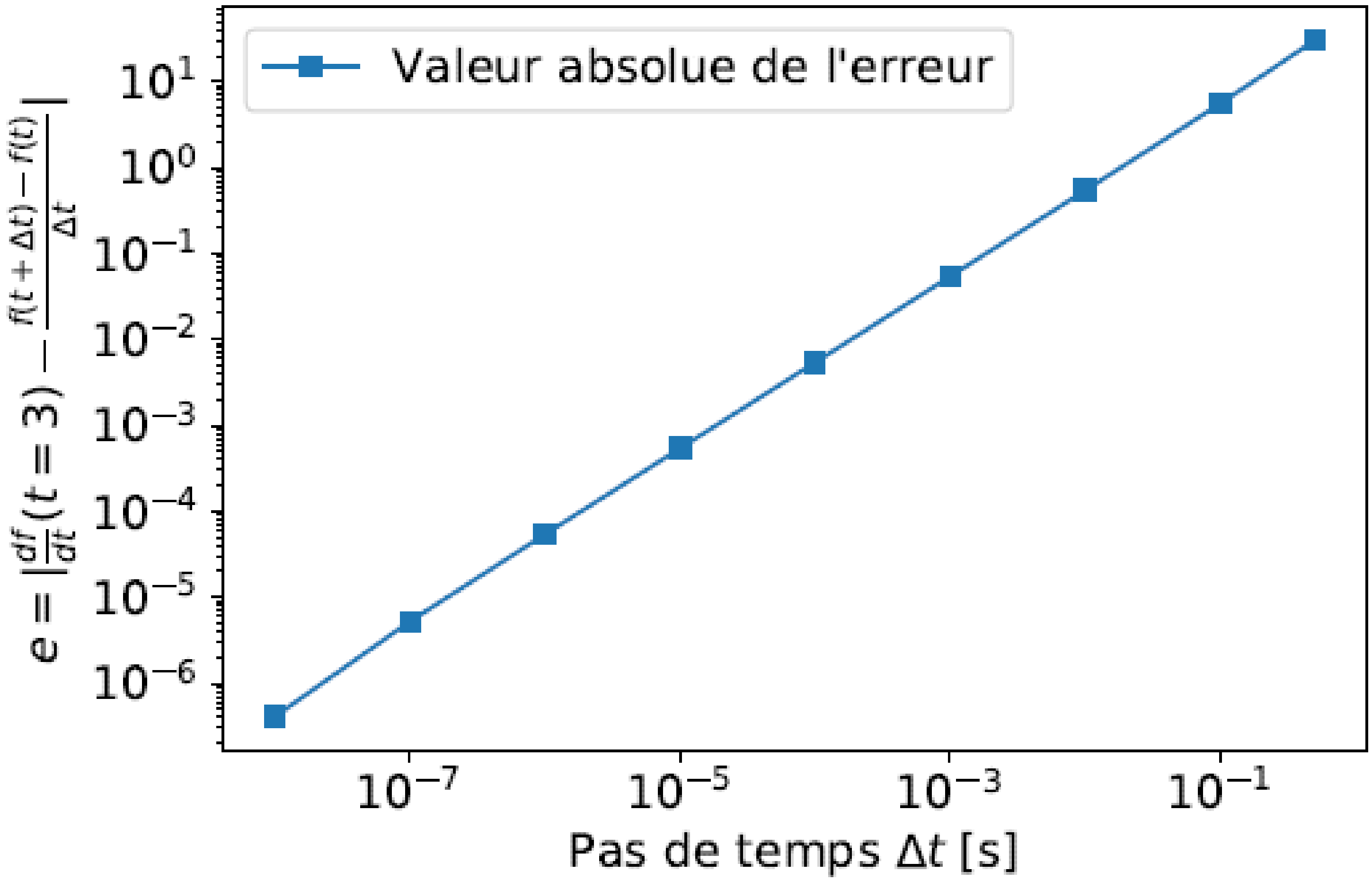
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \approx \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \approx \frac{(t+\Delta t)^4 - (t)^4}{\Delta t}$$

La precision depend du choix du pas de temps …



Erreur commise sur l'approximation à $t = 3$:

$$e(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}) = |\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(3) - \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}|$$



Les deux expressions suivantes sont équivalentes :

$$\frac{C(t+\Delta t)-C(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\mathrm{d}^2C}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\Delta t^2}{6}\frac{\mathrm{d}^3C}{\mathrm{d}t^3}(t) + \ldots$$
$$\frac{C(t+\Delta t)-C(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}(t) + \mathcal{O}(\Delta t)$$

La notation $\mathcal{O}$ indique que l'erreur est asymptotiquement dominée par un terme d'ordre Δt. Donc lorsque le pas de temps sera faible, l'erreur sera contrôlé par la valeur de Δt.

Donc diminuer Δt d'un facteur deux diminuera l'erreur d'un facteur deux.

L'exposant du terme dominant en Δt caractérise l'ordre de convergence du schéma

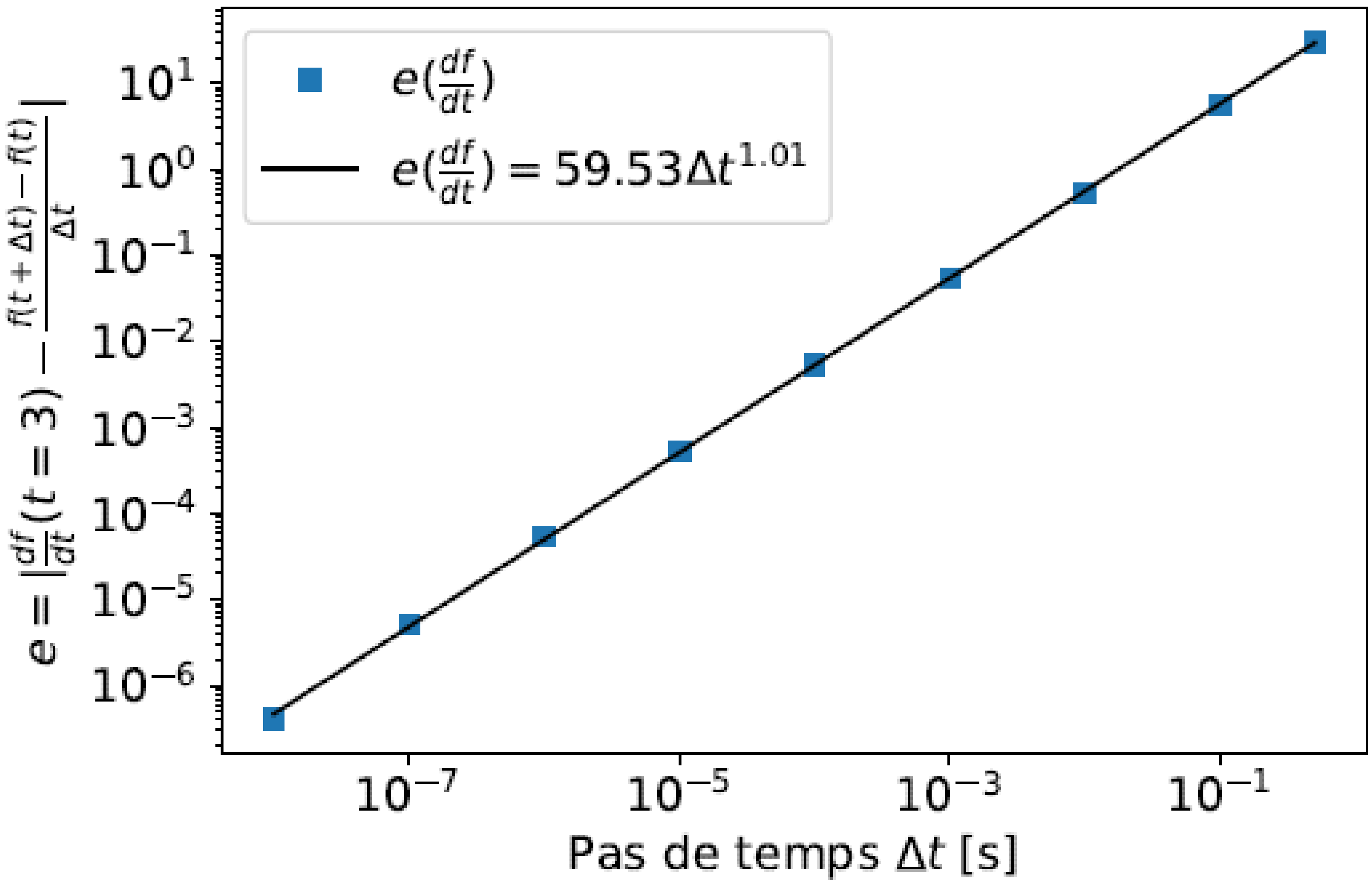
- Il existe des schémas ayant différents ordre n (ex : 1,2,3,4)
- Quand un schéma est d'ordre n, l'erreur e est : $e \propto \Delta t^n$
- Cela revient à dire que

$$e(f) = C_n \Delta t^n + \mathcal{O}(\Delta t^{n+1}) \tag{41}$$

En négligeant les termes en $\mathcal{O}(\Delta t^{n+1})$ on trouve que :

$$e(f) = C_n \Delta t^n$$
$$\ln(e(f)) = ln(C_n) + n \ln(\Delta t)$$

Donc, une régression linéaire en log-log nous donnera une pente qui correspond à l'ordre de convergence de notre schéma !



$e(\frac{df}{dt})$
$e(\frac{df}{dt}) = 59.53\Delta t^{1.01}$
$e = |\frac{df}{dt}(t=3) - \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}|$
10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-5}
10^{-3}
10^{-1}
Pas de temps Δt [s]

Algorithme d'Euler explicite

- Base: on exprime la dérivée en temps par l'expression simple suivante :

$$\left.\frac{dn_A}{dt}\right|_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{n_A(t+\Delta t) - n_A(t)}{\Delta t} \approx \frac{n_A(t+\Delta t) - n_A(t)}{\Delta t}$$

- On peut alors obtenir l'équation de récurrence (Euler) suivante pour l'expression (2) :

$$n_A(t+\Delta t) = n_A(t) + \Delta t \left[10 - \frac{0{,}1 n_A(t)^2}{50+10t} \right] \quad (3)$$

- Algorithme d'Euler explicite :
    1. t=0, $n_A(0) = 0$
    2. On calcule $n_A(t+\Delta t)$ avec (3)
    3. On pose $t = t + \Delta t$
    4. Retour à l'étape 2. si besoin

- Forme générale
    - Pour

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad x(0) = x_0$$

$$\Rightarrow \quad x_{i+1} = x_i + \Delta t\, f(t_i, x_i)$$

Algorithme d'Euler explicite (suite)

– On peut montrer que l'erreur E est donnée par :

$$E = |x(t_i) - x_i| \leq \frac{M\,\Delta t}{2\,L}\left[e^{L(t_i - t_0)} - 1\right]$$

avec

$$L = \max_{t \in [t_0, t_i]} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \qquad \text{et} \qquad M = \max_{t \in [t_0, t_i]} \left|\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right|$$

$t_i = i \times \Delta t$ et x_i est l'approximation de $x(t_i)$

- Avantage :
  – Simplicité

- Inconvénient :
  – Précision d'ordre 1 en temps: E ~ O(Δt) → peu précis!
    - Pour un x_i fixé, l'erreur diminue avec Δt
    - Pour Δt donné, l'erreur peut augmenter exponentiellement lorsqu'on s'éloigne de t_0.

- Comment améliorer la précision?
  – Runge-Kutta d'ordre 2
  – Runge-Kutta d'ordre 4
  – Méthodes faisant intervenir plusieurs pas

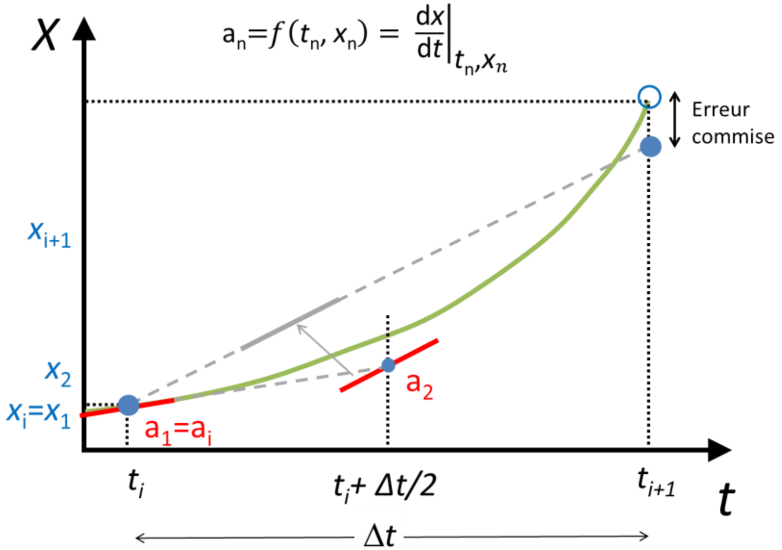
Méthodes de Runge-Kutta

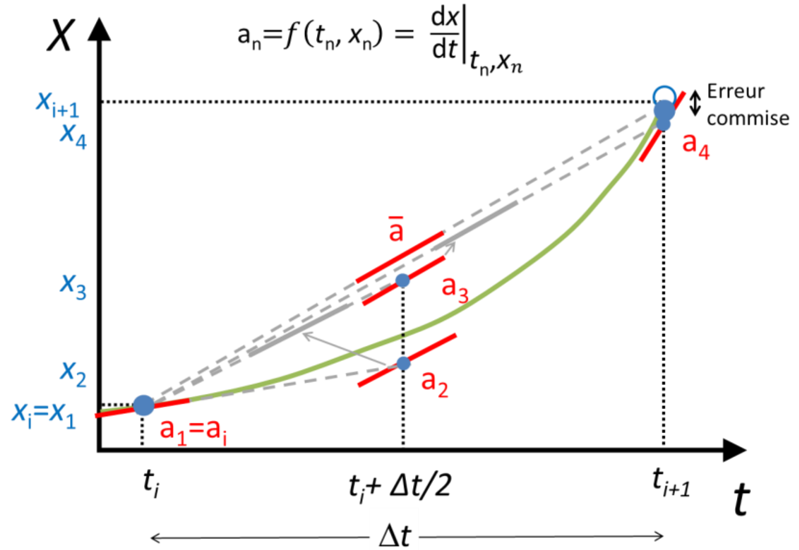
- Ordre 2

$$
\begin{array}{ll}
0. & i=0 \ et \ t_0=0\,;x_0 \ est\,connu \\
1. & k=\Delta t\ f\left(t_i,x_i\right) \\
2. & x_{i+1}=x_i+\Delta t\ f\left(t_i+\Delta t/2,x_i+k/2\right) \\
3. & t_{i+1}=t_i+\Delta t \\
4. & i=i+1 \\
5. & \text{on retourne à 1. au besoin}
\end{array}
$$

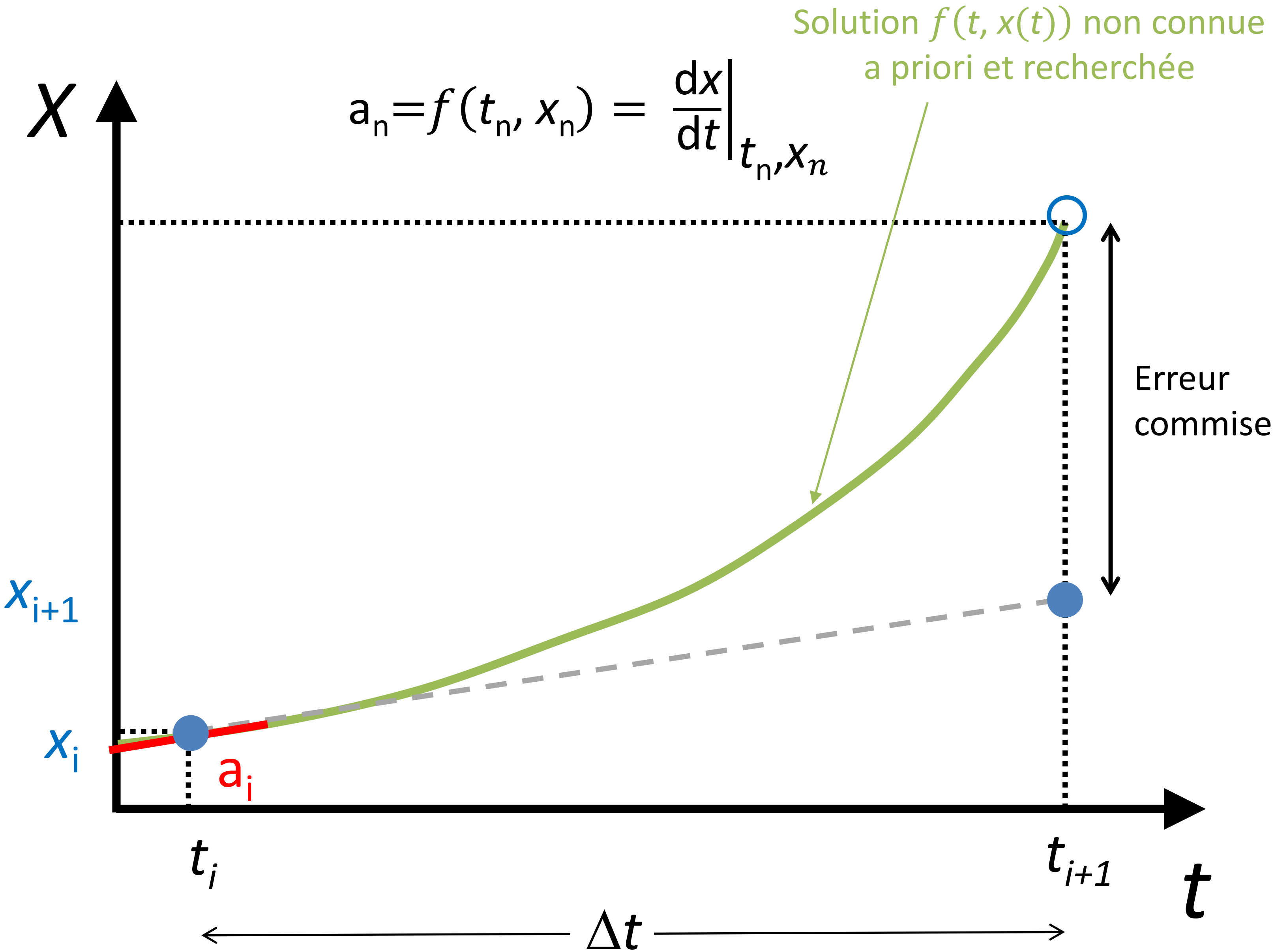
- Ordre 4

$$
\begin{array}{ll}
0. & i=0 \ et \ t_0=0\,;x_0 \ est\,connu \\
1. & \left|\begin{array}{l} k_1=\Delta t\ f\left(t_i,x_i\right) \\ k_2=\Delta t\ f\left(t_i+\Delta t/2,x_i+k_1/2\right) \\ k_3=\Delta t\ f\left(t_i+\Delta t/2,x_i+k_2/2\right) \\ k_4=\Delta t\ f\left(t_i+\Delta t,x_i+k_3\right)\end{array}\right. \\
2. & x_{i+1}=x_i+\dfrac{1}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right) \\
3. & t_{i+1}=t_i+\Delta t \\
4. & i=i+1 \\
5. & \text{on retourne à 1. au besoin}
\end{array}
$$

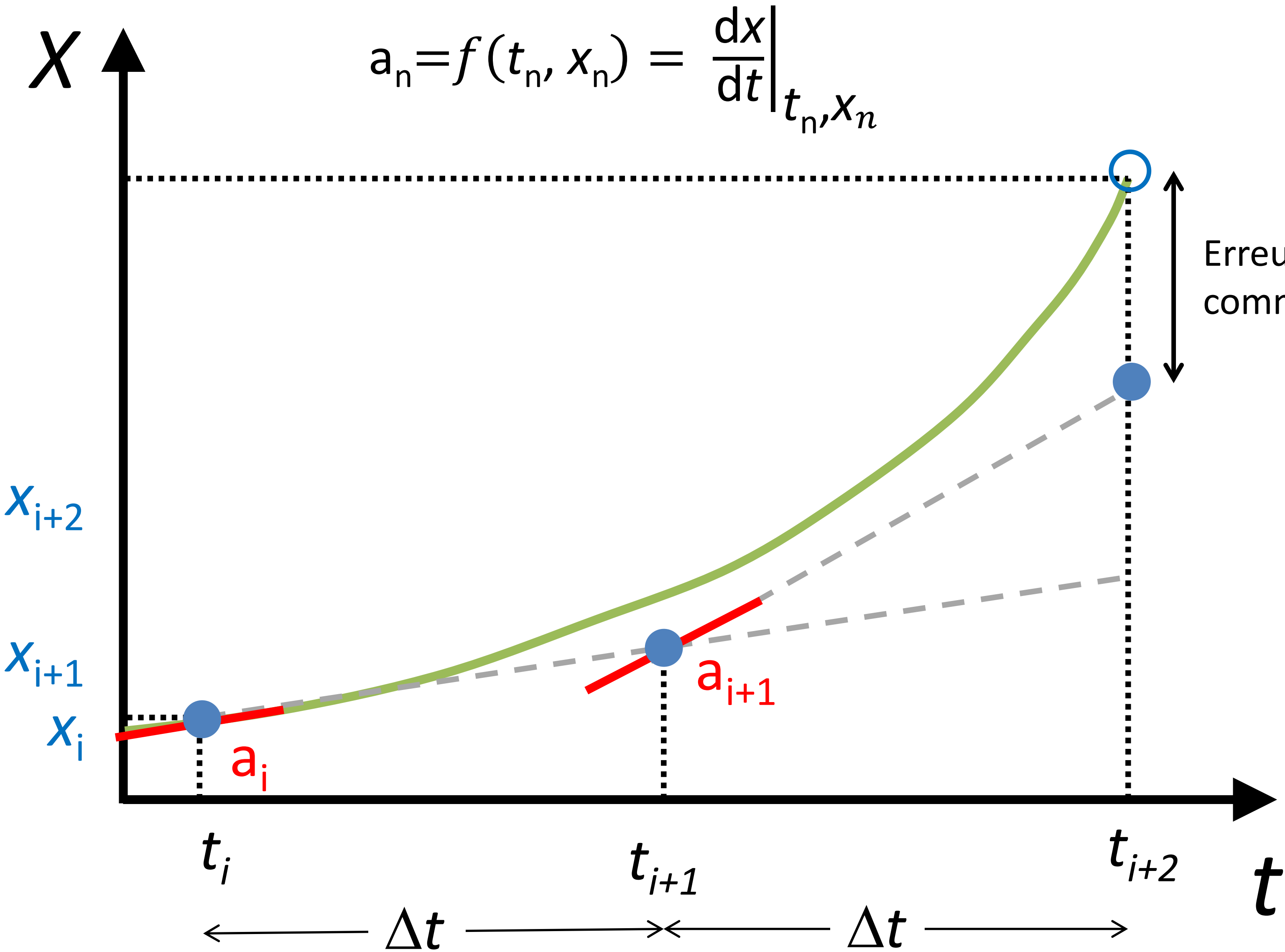




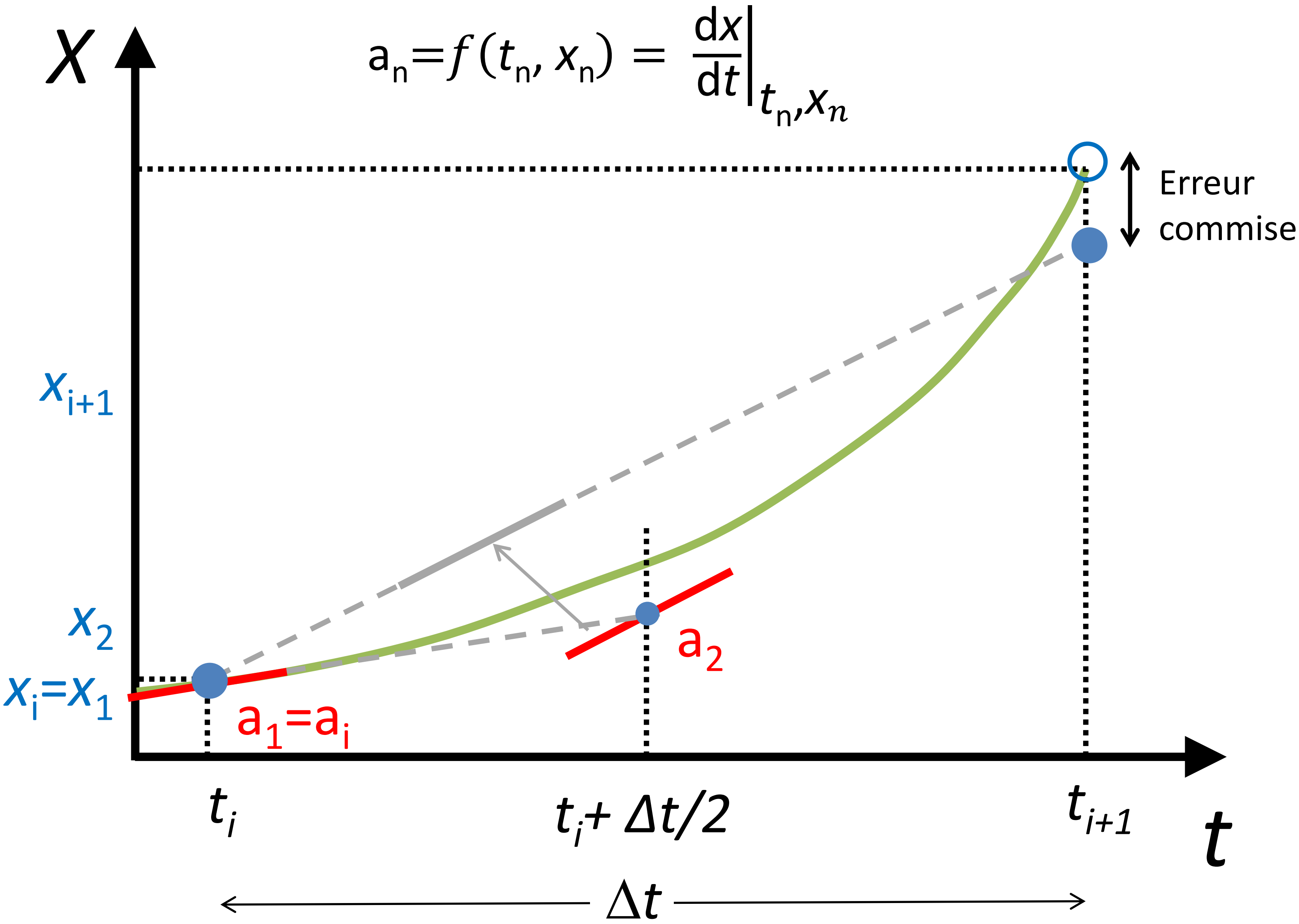
Euler explicite



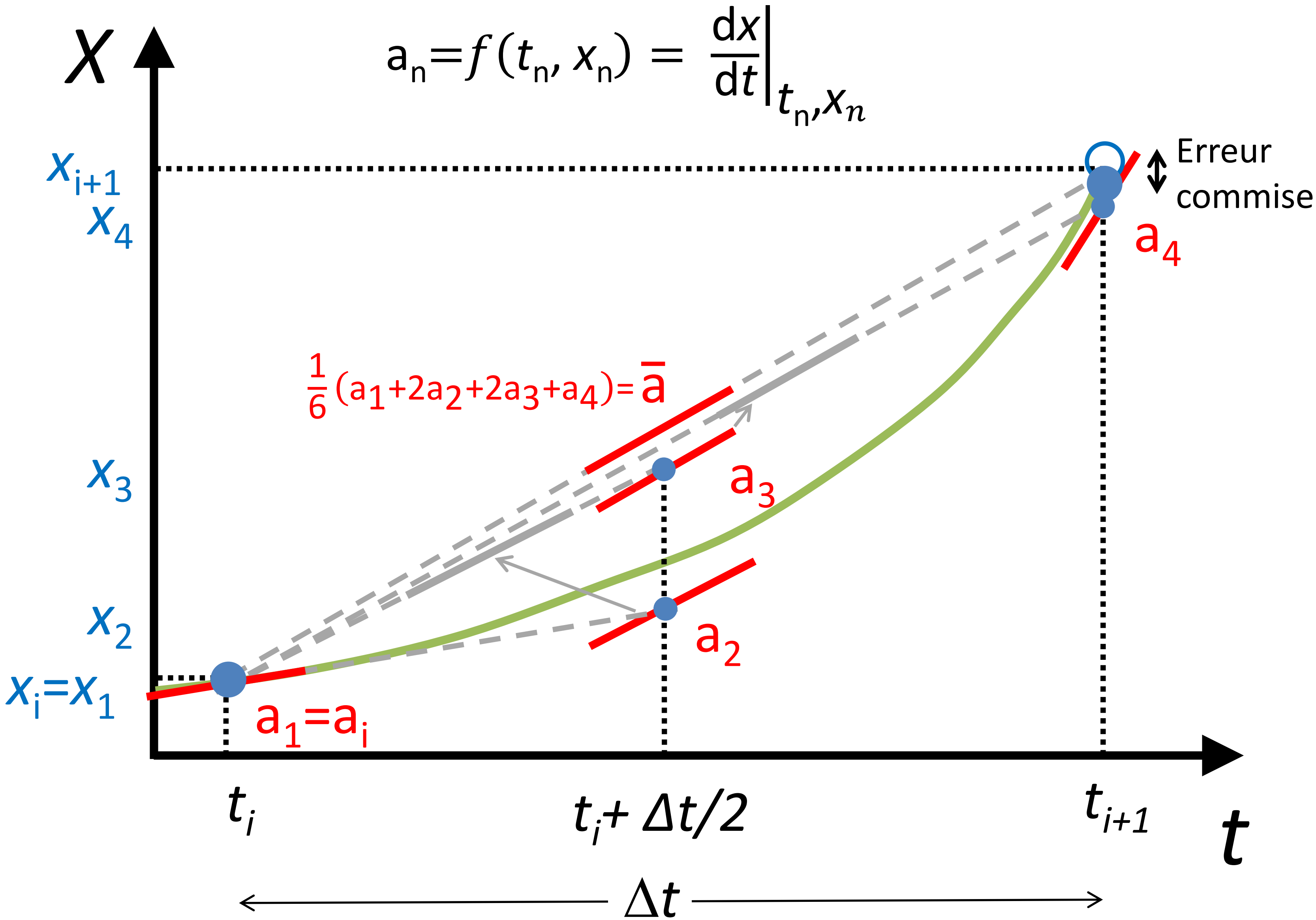
Euler explicite – réduction du pas de temps



Runge-Kutta d'ordre 2



Runge-Kutta d'ordre 4



Application des méthodes RK2 et 4 à l'exemple du réacteur semi-continu

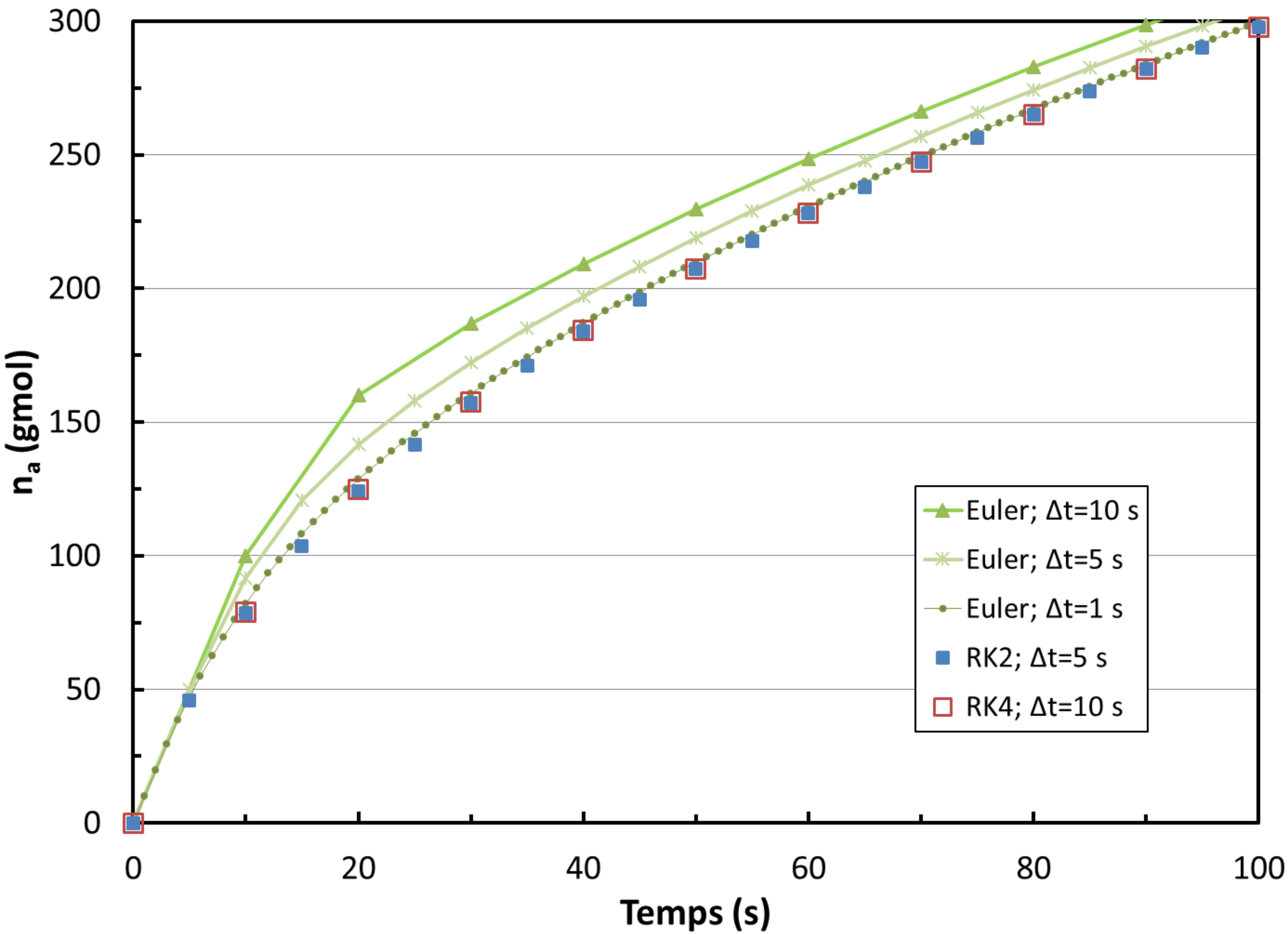
- RK2

0. $i = 0 \ et \ t_{i=0} = 0 \ ; n_{A(i=0)} = 0$
1. $k = \Delta t \left[Q_0 C_{A_0} - \dfrac{k n_{A(i)}{}^2}{V_0 + Q_0 t_i} \right]$
2. $x_{i+1} = x_i + \Delta t \left[Q_0 C_{A_0} - \dfrac{k \left(n_{A(i)} + k/2 \right)^2}{V_0 + Q_0 \left(t_i + \Delta t/2 \right)} \right]$
3. $t_{i+1} = t_i + \Delta t$
4. $i = i + 1$
5. on retourne à 1. au besoin

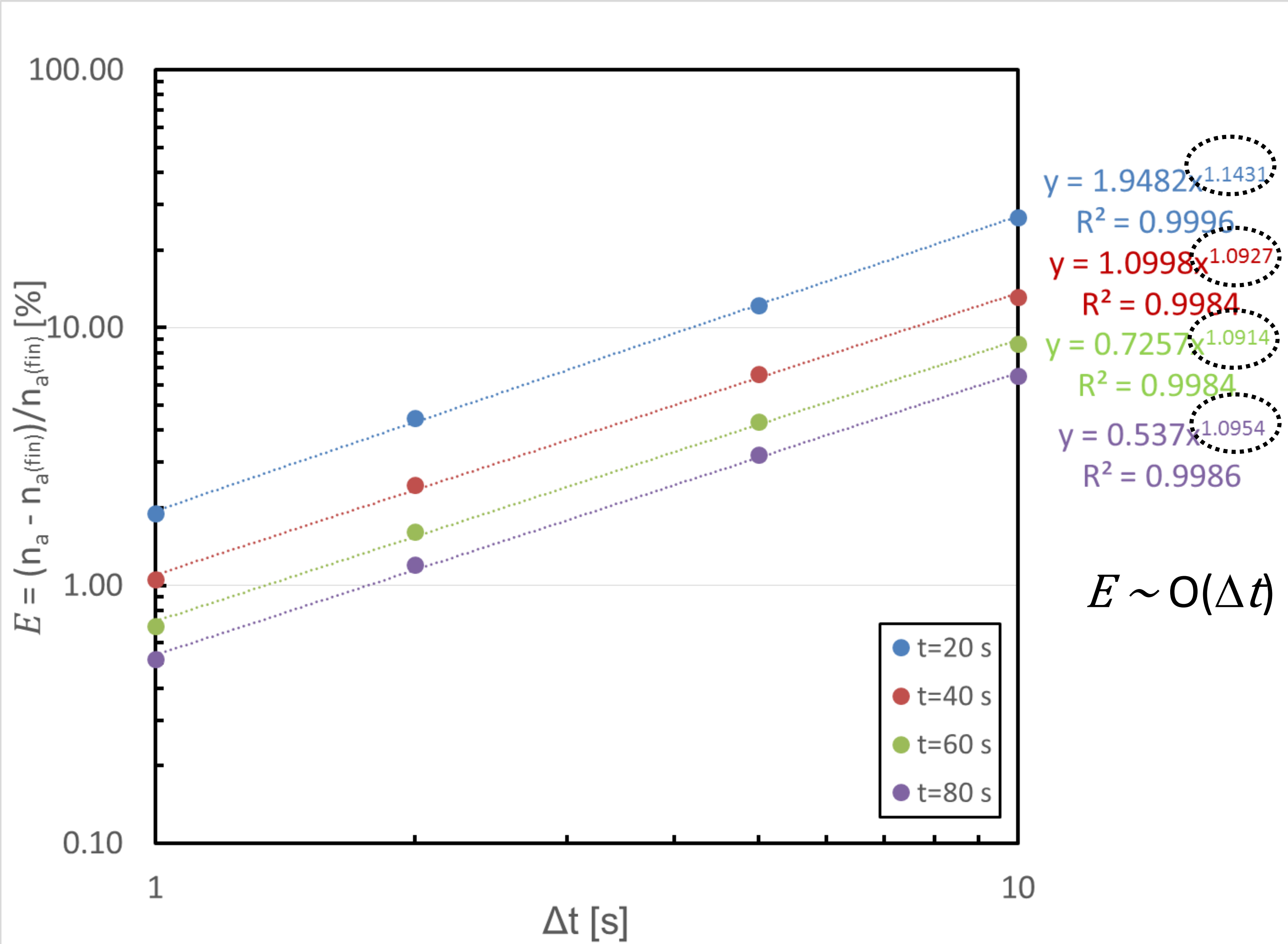
- Ordre 4

0. $i = 0 \ et \ t_0 = 0 \ ; n_{A0} = 0$
1. $$\left| \begin{array}{l} k_1 = \Delta t \left[Q_0 C_{A_0} - \dfrac{k n_{A(i)}^2}{V_0 + Q_0 \Delta t} \right] \\ k_2 = \Delta t \left[Q_0 C_{A_0} - \dfrac{k \left(n_{A(i)} + k_1/2 \right)^2}{V_0 + Q_0 \left(t_i + \Delta t/2 \right)} \right] \\ k_3 = \Delta t \left[Q_0 C_{A_0} - \dfrac{k \left(n_{A(i)} + k_2/2 \right)^2}{V_0 + Q_0 \left(t_i + \Delta t/2 \right)} \right] \\ k_4 = \Delta t \left[Q_0 C_{A_0} - \dfrac{k \left(n_{A(i)} + k_3 \right)^2}{V_0 + Q_0 \left(t_i + \Delta t \right)} \right] \end{array} \right.$$
2. $x_{i+1} = x_i + \dfrac{1}{6} \left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 \right)$
3. $t_{i+1} = t_i + \Delta t$
4. $i = i + 1$
5. on retourne à 1. au besoin

Comparaison de la prédiction



Ordre de précision du schéma d'Euler explicite



$$E \sim O(\Delta t)$$

Algorithme d'Euler implicite

- Base: on exprime la dérivée en temps par l'expression simple suivante :

$$\left.\frac{dn_A}{dt}\right|_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{n_A(t) - n_A(t-\Delta t)}{\Delta t} \approx \frac{n_A(t) - n_A(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

- On peut alors obtenir l'équation de non linéaire suivante pour l'expression :

$$n_A(t+\Delta t) = n_A(t) + \Delta t \left[10 - \frac{0{,}1 n_A(t+\Delta t)^2}{50 + 10(t+\Delta t)}\right]$$

à t fixé et connu →
On connait a,b,c

$$x = a + b\left[10 - \frac{0{,}1x^2}{50 + 10c}\right]$$

$$x - a - b\left[10 - \frac{0{,}1x^2}{50 + 10c}\right] = 0$$

$$F(x) = 0$$

On doit donc potentiellement résoudre une équation non-linéaire à chaque pas de temps

Exemple de méthode pour résoudre une équation non linéaire

Méthode de Newton

$$x = x^{(0)}$$

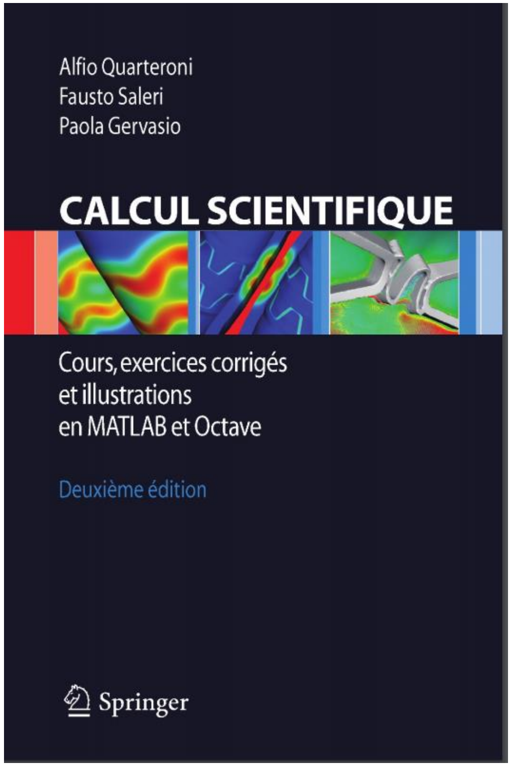
$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - \frac{F(x^{(i)})}{F'(x^{(i)})}$$

$$\left\| x^{(i+1)} - x^{(i)} \right\| \leq \varepsilon$$

$$x^{(i)} = x^{(i+1)}$$

Faiblesse de la méthode d’Euler implicite : on doit résoudre une équation non-linéaire à chaque pas de temps si F est non-linéaire
Avantage de la méthode d’Euler implicite : Plus grande stabilité → pas de restriction sur Δt

Autres méthodes de resolutions des équations non-linéaires dans :



Chapitre 2

Autres schémas numériques :

- Euler explicite:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t\, f(t_i, x_i) = x_i + \Delta t\, F_i$$

- Euler implicite:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t\, F_{i+1}$$

Solution obtenue par la résolution d'un problème inverse

- **Schémas avec discrétisation du terme source:**
  - Adams-Bashforth (explicite):

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\Delta t}{2}(3\, F_i - F_{i-1})$$ (ordre 2)

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\Delta t}{24}(55\, F_i - 59\, F_{i-1} + 37\, F_{i-2} - 9\, F_{i-3})$$ (ordre 4)

Autres schémas numériques (suite):

- **Schémas avec discrétisation du terme source (suite):**
  - Adams-Moulton (implicite):

$$x_{i+1} = x_i + \tfrac{1}{2}\Delta t\,(F_i + F_{i+1})$$ (ordre 2 – Crank-Nicolson)

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\Delta t}{24}(9\,F_{i+1} + 19\,F_i - 5F_{i-1} + F_{i-2})$$ (ordre 4)

- **Schémas prédicteur-correcteur :**

Schémas plus précis car ils utilisent un schéma explicite pour obtenir une approximation de F_{i+1} dans le schéma implicite

1. Prédiction:

$$\tilde{x}_{i+1} = x_i + \Delta t\, f(t_i, x_i)$$

2. Correction:

$$x_{i+1} = x_i + \tfrac{1}{2}\Delta t\Big(f(t_i, x_i) + f(t_{i+1}, \tilde{x}_{i+1})\Big)$$ (Crank-Nicolson)

ou

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t\, f(t_{i+1}, \tilde{x}_{i+1})$$ (Euler implicite)

Autre exemple : Les matériaux granulaires dans l'industrie

Pharmaceutical Industry

Food Industry

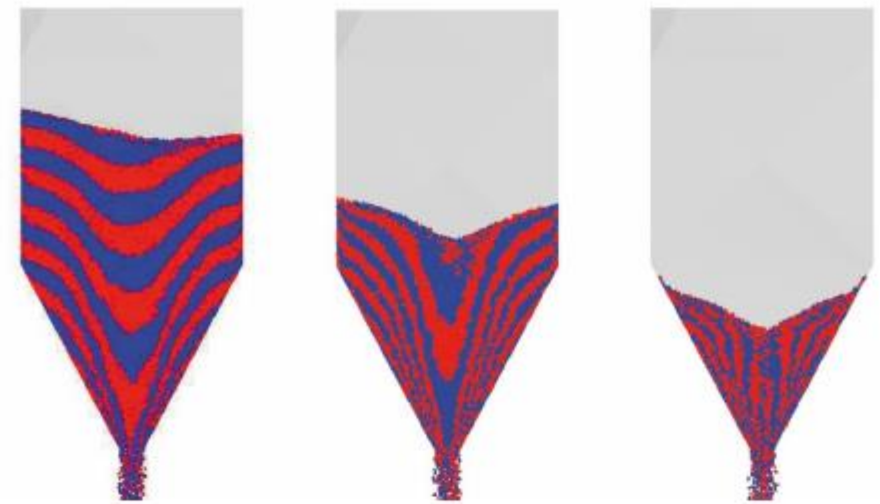
Catalyser – Chemical reactors

Mineral powders

Autre exemple: Discrete Element Method (DEM)

Mélange solide-liquide

Vidange de silots



Principe de la DEM (pour votre information)

$$\underbrace{m_i \frac{d^2\mathbf{x}_i}{dt^2}}_{\text{Acceleration}} = \mathbf{F}_{total,i} = \mathbf{F}_{hydrodynamic,i} + \mathbf{F}_{\mathrm{body},i} + \mathbf{F}_{\mathrm{long-range},i} + \underbrace{\mathbf{F}_{contact,i}}_{\text{Core of the DEM}}$$

Euler explicite

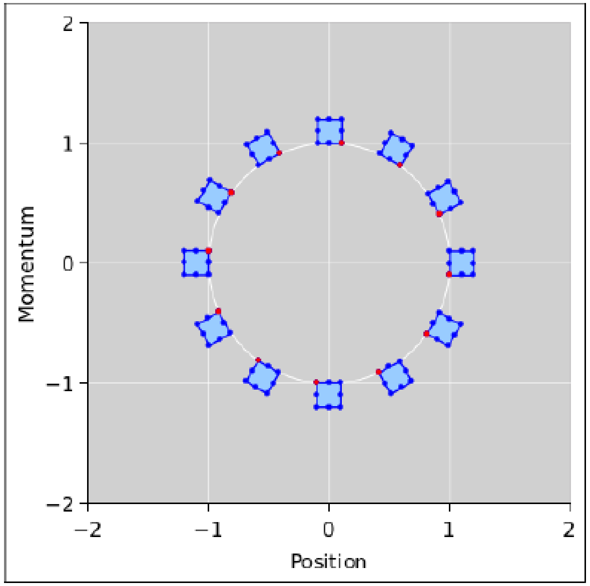
$$m_i \frac{\mathbf{v}_i^{t+\Delta t} - \mathbf{v}_i^t}{\Delta t} = \mathbf{F}_{total,i}$$

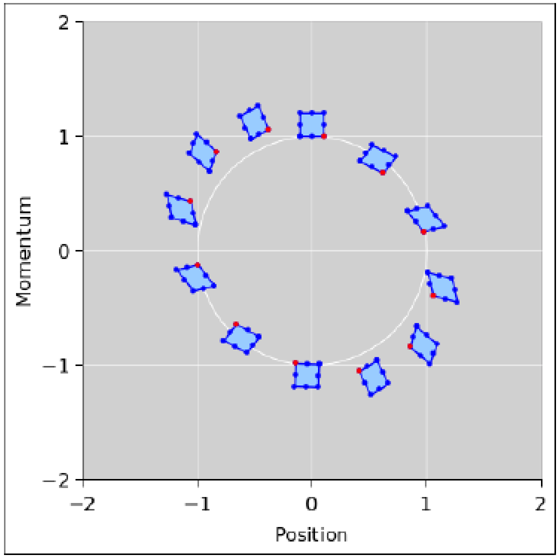
$$\frac{\mathbf{x}_i^{t+\Delta t} - \mathbf{x}_i^t}{\Delta t} = \mathbf{v}_i^t$$

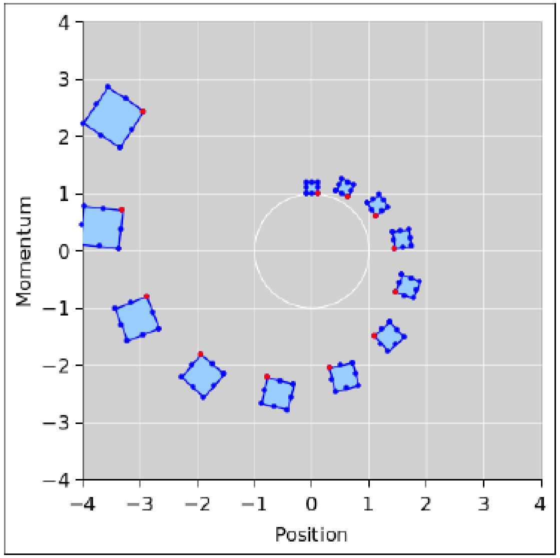
Problème : Euler excplicite n’est pas sympléctique

Principe de la DEM (toujours pour votre information)

$$\underbrace{m_i \frac{d^2\mathbf{x}_i}{dt^2}}_{\text{Acceleration}} = \mathbf{F}_{total,i} = \mathbf{F}_{hydrodynamic,i} + \mathbf{F}_{\mathrm{body},i} + \mathbf{F}_{\mathrm{long-range},i} + \underbrace{\mathbf{F}_{contact,i}}_{\text{Core of the DEM}}$$







Principe de la DEM (encore pour votre information)

$$m_i \underbrace{\frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2}}_{\text{Acceleration}} = \mathbf{F}_{total,i} = \mathbf{F}_{hydrodynamic,i} + \mathbf{F}_{\text{body},i} + \mathbf{F}_{\text{long-range},i} + \underbrace{\mathbf{F}_{contact,i}}_{\text{Core of the DEM}}$$

Euler explicite

$$m_i \frac{\mathbf{v}_i^{t+\Delta t} - \mathbf{v}_i^{t}}{\Delta t} = \mathbf{F}_{total,i}$$

$$\frac{\mathbf{x}_i^{t+\Delta t} - \mathbf{x}_i^{t}}{\Delta t} = \mathbf{v}_i^{t}$$

Verlet

$$\mathbf{v}_i^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \mathbf{v}_i^{t-\frac{\Delta t}{2}} + \Delta t \frac{\mathbf{F}_{total,i}}{m_i}$$

$$\mathbf{x}_i^{t+\Delta t} = \mathbf{x}_i^{t} + \Delta \mathbf{v}_i^{t+\frac{\Delta t}{2}}$$

Schéma explicite vs. Implicite (à retenir !!!)

- Un schéma est dit ***explicite*** lorsque le **champ** d'intérêt (p.ex. la température), peut être **calculé au temps $t + \Delta t$ à partir** de la valeur du champ **exprimée au temps t**.
- Un schéma est dit ***implicite*** lorsque ce même **champ** d'intérêt est **calculé au temps $t + \Delta t$**, au moins en partie, **à partir** de **la valeur** du champ mais ici **exprimée** non plus à t mais **à $t + \Delta t$**. Ce type de schéma requiert **potentiellement la résolution d'une équation non-linéaire**.

Type de schéma	Avantages	Inconvénients
Explicite	▪ Facile à programmer (marche en temps) ▪ Précis (selon l'ordre)	▪ Stable sous condition
Implicite	▪ Inconditionnellement stable	▪ Système potentiellement non-linéaire à résoudre ▪ Souvent moins précis

Notion de stabilité

- **Stabilité d'un modèle physique**

Un problème est dit chaotique si une petite variation des données initiales entraîne une variation totalement imprévisible des résultats. Cette notion de chaos, liée à la physique d'un problème, est indépendante du modèle mathématique utilisé et encore plus de la méthode numérique utilisée pour résoudre ce problème mathématique. De nombreux problèmes sont chaotiques, par exemple la turbulence des fluides.

- **Stabilité d'un modèle mathématique**

Un problème est dit très sensible ou mal conditionné si une petite variation des données ou des paramètres entraîne une grande variation des résultats. Cette notion de conditionnement, liée au problème mathématique, est indépendante de la méthode numérique utilisée pour le résoudre. Pour modéliser un problème physique qui n'est pas chaotique, on construira un modèle mathématique qui sera le mieux conditionné possible.

- **Stabilité d'une méthode numérique**

Une méthode est dite instable si elle est sujette à une propagation importante des erreurs numériques de discrétisation et d'arrondi. Un problème peut être bien conditionné alors que la méthode numérique choisie pour le résoudre
est instable. Dans ce cas, il est impératif de changer de méthode numérique. Par contre, si le problème de départ est mal conditionné, aucune méthode numérique ne pourra y remédier. Il faudra alors essayer de trouver une formulation mathématique différente du même problème, si on sait que le problème physique sous-jacent est stable.

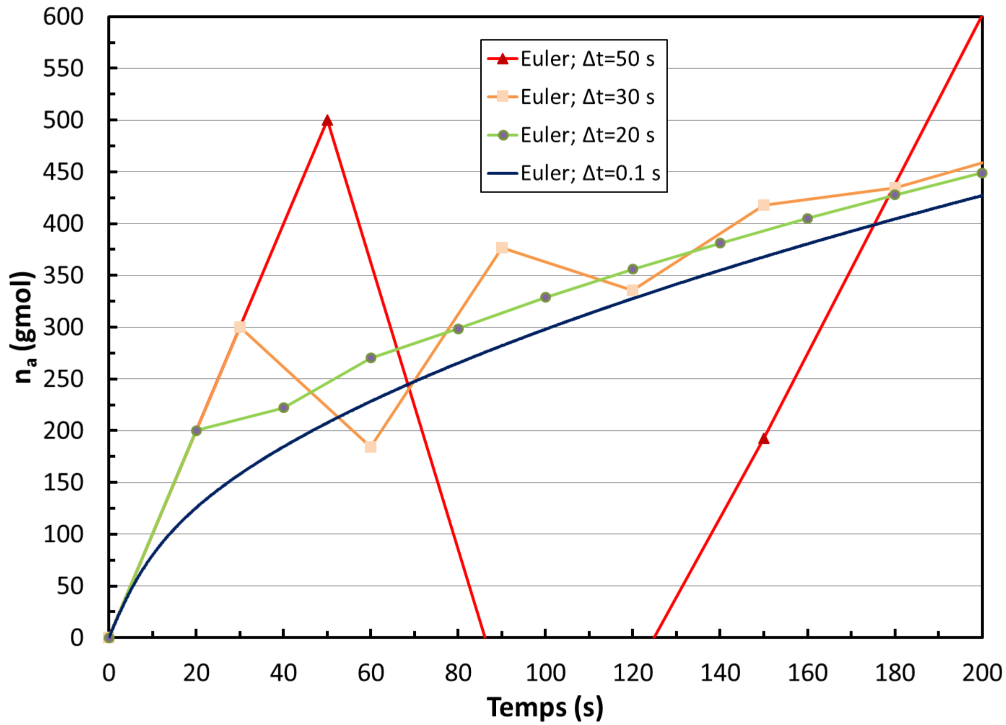
Instabilité du schéma Euler explicite et choix du Δt

Ecriture générale d'un schéma récurrent :

$$x_{i+1} = \mathbf{G}\, x_i + \; \ldots$$

Coefficient d'amplification

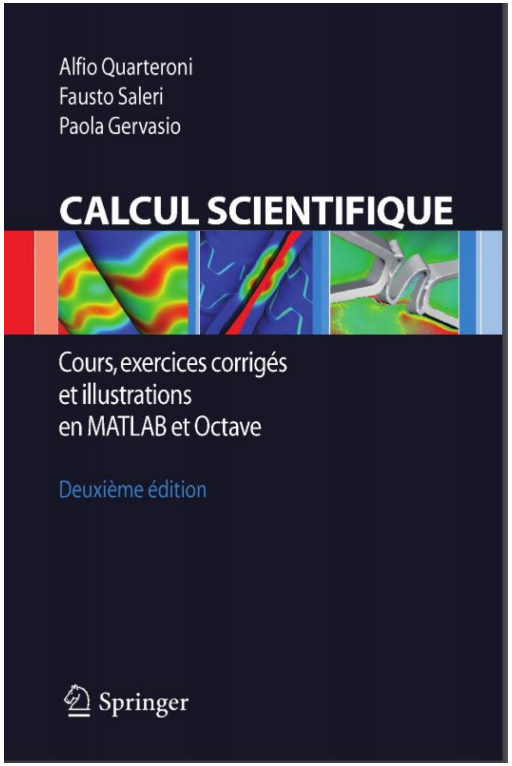
Euler explicite:



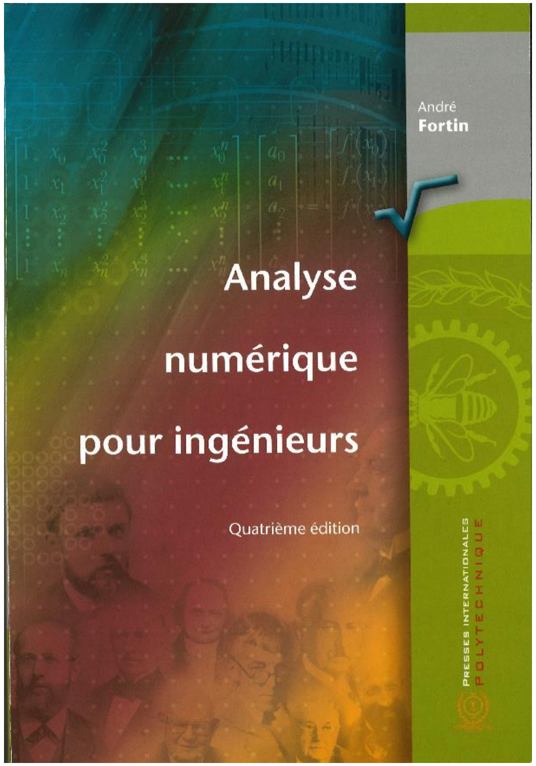
- Stable sans oscillation si : $0 < \mathbf{G} \leq 1$
- Stable avec oscillation si : $-1 \leq \mathbf{G} \leq 0$
- Instable si : $\mathbf{G} < -1$

En déduire un Δt maximal afin d'assurer la stabilité numérique du schéma

Lectures complémentaires



Chapitre 7



Chapitre 7