DÉPARTEMENT DE GÉNIE CHIMIQUE

École Polytechnique de Montréal

MODÉLISATION NUMÉRIQUE EN GÉNIE CHIMIQUE (GCH2535)

Théorie des E.D.P : contrôle périodique 1

06 février 2019

Directives :

- Cet examen comporte **cinq (5) questions** sur un total de **vingt (20) points**.
- Vous avez **deux (2) heures** pour compléter ce contrôle.
- La documentation permise est **une feuille manuscrite** $8.5'' \times 11''$ **(recto verso)** préparée par l'étudiant.
- **Une réponse sans justifications se verra attribuer la note 0**.

---

1. Questions rapides

Les questions a, b, c et d sont indépendantes

$\left(\frac{1}{20}\right)$ (a) On désire déterminer les coefficients C_n de sorte que

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\sin(nx)}{x} = -2, \quad \text{pour } 0 < x < \pi.$$

Donner l'équation qui permet de déterminer les coefficients C_n pour $n = 1,2,3\ldots$.
On ne demande pas de calculer la valeur des coefficients.

$\left(\frac{1}{20}\right)$ (b) Déterminer la plus petite période de la fonction

$$f(x) = \pi^2 + 2\cos\left(\frac{2x}{3}\right)\sin(2x).$$

Justifier votre réponse

$\left(\frac{1}{20}\right)$ (c) On considère la fonction périodique définie par : $f(x) = 1 - x$ pour $0 < x < 2$ et $f(x+2) = f(x)$. Calculer $f(-25)$. **Justifier votre réponse**

$\left(\frac{1,5}{20}\right)$ (d) Soit la fonction $h(x)$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{pour} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{pour} \quad 1 \le x < 2. \end{cases}$$

On définit par prolongement la fonction impaire périodique de période $p = 4$ qui coïncide avec la fonction $h(x)$ sur l'intervalle $[0,2]$.
Tracer sur l'intervalle $[-6,6]$ le graphe de la fonction vers laquelle la série de Fourier du prolongement impair de la fonction $h(x)$ converge.

2. On considère une fonction périodique de période $p = 10$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad -5 \le x < -2; \\ 1 & \text{si} \quad -2 \le x < 2; \\ 2 & \text{si} \quad 2 \le x < 5; \end{cases}$$

$\left(\frac{1,5}{20}\right)$ (a) Tracer sur l'intervalle $[-10,10]$ le graphe de la fonction vers laquelle la série de Fourier de la fonction $g(x)$ converge.

$\left(\frac{1}{20}\right)$ (b) **Sans calculer la série de Fourier** de $g(x)$, trouver la valeur vers laquelle cette série converge pour $x = -102$.

3. Soit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -2 \leq x < 0; \\ x+2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

et on suppose que $f(x+4) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\left(\frac{3}{20}\right)$ (a) Trouver $S_F(x)$, la série de Fourier pour la fonction $f(x)$.

$\left(\frac{1}{20}\right)$ (b) Sachant que $S_F(20) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n - 1}{n^2}$, déterminer la valeur vers laquelle cette série converge. **Justifier votre réponse**.

4. Soit l'équation aux dérivées partielles et la condition initiale suivantes

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\cos(2x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } t > 0. \tag{1}$$

$\left(\frac{1}{20}\right)$ (a) Si $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} C_n(t)\cos(2nx)$, montrer que les fonctions $C_n(t)$ vérifie le problème

$$\begin{cases} C_n'(t) + 4n^2 C_n(t) = 0 \text{ si } n \neq 1 \text{ et} \\ C_n(0) = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} C_1'(t) + 4C_1(t) = 4 \\ C_1(0) = 0. \end{cases}$$

$\left(\frac{2}{20}\right)$ (b) Déterminer les fonctions $C_n(t)$ pour $n = 1,2,\ldots$ et en déduire la solution $u(x,t)$ du problème (1).

5. Soit $u(x,y)$, la solution de l'équation de Laplace dans la plaque carrée $0 < x < \pi, 0 < y < \pi$ qui satisfait aux conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} u(0,y) = 0, \quad \text{pour} \quad 0 \leq y \leq \pi; \\ u(\pi,y) = -3\cos\left(\dfrac{3y}{2}\right) + 4\cos\left(\dfrac{5y}{2}\right), \quad \text{pour} \quad 0 \leq y \leq \pi; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq \pi; \\ u(x,\pi) = 0, \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \tag{2}$$

$\left(\frac{2}{20}\right)$ (a) Soit $u(x,y) = F(x)G(y)$. En utilisant la méthode de séparation des variables, montrer que la fonction $G(y)$ satisfait au problème de fonctions propres

$$G''(y) - \lambda G(y) = 0, \quad G'(0) = 0 \text{ et } G(\pi) = 0. \tag{3}$$

et que

$$F''(x) + \lambda F(x) = 0, \quad F(0) = 0,$$

où λ est une constante réelle de séparation.

$\left(\frac{3}{20}\right)$ (b) Résoudre le problème de fonctions et de valeurs propres (3).
On demande une solution complète où chaque étape est justifiée.

$\left(\frac{1}{20}\right)$ (c) En vous servant des résultats obtenus en (a) et (b), trouver la solution du problème (2).

*Les professeurs du cours GCH*2535.