École Polytechnique de Montréal

ELE8401, Machines électriques et entraînements électriques, Hiver 2019
Solutions de Devoir#1

Problème 1 (sol):

Voir le code Matlab sur Moodle.

Solution question 5 problème 1:

Si on a seulement deux phases qui portent le courant, le courant de phase serait alors égal et opposé (couplage en étoile). Donc :

$$\begin{aligned}
F_{a1} &= F_m \cos(\theta)\cos(\omega t) \\
F_{a2} &= -F_m \cos(\theta - 120°)\cos(\omega t) \\
F_{net} &= F_{a1} + F_{a2} = F_m[\cos(\theta)\cos(\omega t) - \cos(\theta - 120)\cos(\omega t)] \\
&= F_m(\cos(\theta) - \cos(\theta - 120°))\cos(\omega t) \\
&= 2F_m[\sin(\theta - 60°)\sin(-60°)]\cos(\omega t) \\
&= \sqrt{3}\, F_m \cos(\theta + 30°)\cos(\omega t)
\end{aligned}$$

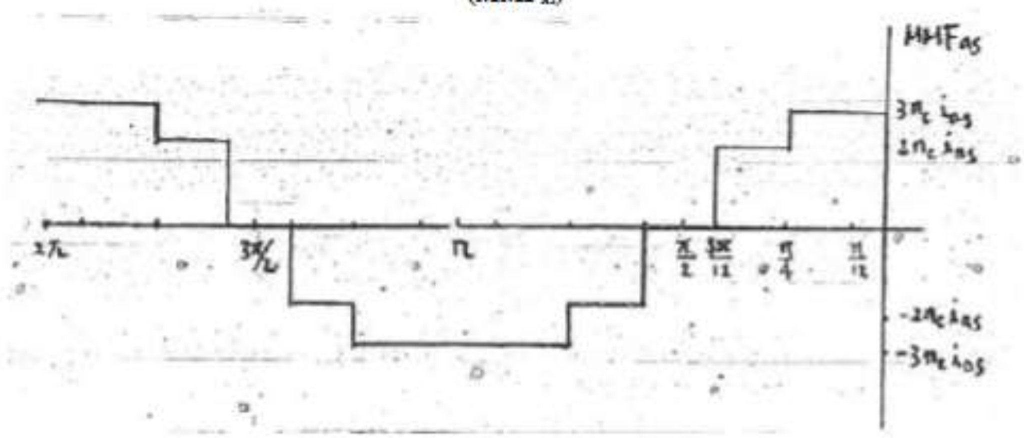
Donc on peut écrire :

$$\begin{aligned}
F_{net} &= \frac{\sqrt{3}}{2} F_m \cos(\theta + 30° - \omega t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta + 30° + \omega t) \\
&= \vec{F}^{+} + \vec{F}^{-}
\end{aligned}$$

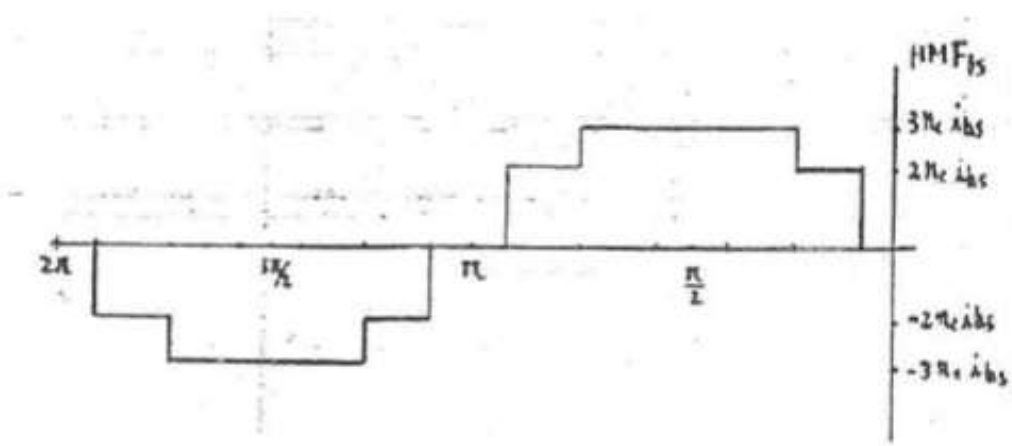
On a alors une somme de deux ondes qui évoluent en sens inverse et d'amplitude différente; $\vec{F}^{+}$ d'amplitude $\frac{\sqrt{3}}{2} F_m$ tourne dans le sens des θ positifs alors que $\vec{F}^{-}$ d'amplitude $\frac{\sqrt{3}}{2}$ tourne dans le sens des θ négatifs. On se ramène ainsi à un cas similaire à celui de la question 2.

Problème 2 (sol):

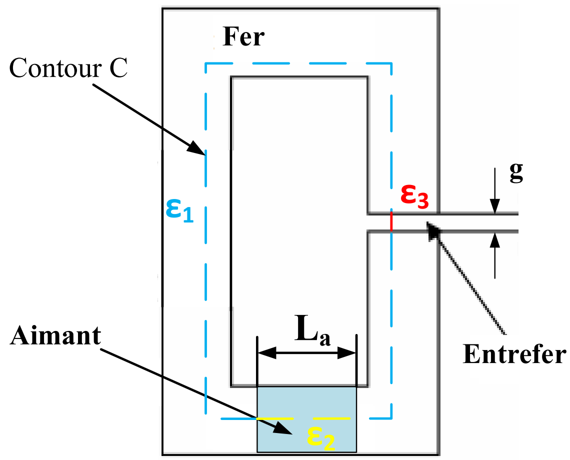
(MMF$_{as}$)



MMF$_{bs}$



Problème 3 (sol)*) Soit le contour fermé C (en ligne interrompue). On applique le théorème d'Ampère à ce contour (slide 24 de ''session 1-2.pdf''):



$\oint_C H.dl = 0$ (car pas de courants)

Donc :

$$\oint_{\epsilon_1} H.dl + \oint_{\epsilon_2} H.dl + \oint_{\epsilon_3} H.dl = 0$$

→ $H_f L_f + H_a L_a + H_g g = 0$ (1)

*) On sait que $\oiint B\ dS = 0$ (Slide 8 de ''session 1-2.pdf''). Or la section est la même partout dans le circuit donc la densité de flux B est égale partout dans le circuit.

Ce qui équivaut à : $B_f = B_a = B_g = B$

Méthodologie de résolution: Puisqu'on a toutes les densités de flux $B_f, B_a\ et\ B_g$ sont égaux, il suffit donc de trouver la valeur d'une seule pour déduire les autres. On choisit alors de déterminer la valeur de B_a car on a déjà la courbe de B_a en fonction de H_a pour l'aimant donc il suffit d'obtenir une autre relation entre B_a et H_a . On trace alors cette relation dans le même graphe avec la courbe d'aimantation et ensuite, par simple lecture de l'ordonnée du point d'intersection, on trouve alors la valeur de B_a.

*) Cherchons alors une relation entre B_a et H_a :

Pour le fer et l'entrefer, on a les deux expressions suivantes :

$B_f = \mu_0 \mu_r H_f$ et $B_g = \mu_0 H_g$

D'après (1), on peut écrire :

$$H_g = -\frac{1}{g}\left(H_f L_f + H_a L_a\right)$$
$$= -\frac{L_f}{g} H_f - \frac{L_a}{g} H_a \qquad (2)$$

Or $\quad H_g = \frac{B_g}{\mu_0} = \frac{B_a}{\mu_0}$ (car $B_a = B_g$) et $H_f = \frac{B_f}{\mu_0 \mu_r}$

On substitue ces deux relations dans l'expression (2) pour obtenir :

$$B_a = -\frac{\mu_0 L_a}{g} H_a - \frac{1}{g\,\mu_r} B_a$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{g\,\mu_r}\right) B_a = -\frac{\mu_0 L_a}{g} H_a$$

→ Finalement on trouve l'expression reliant B_a et H_a :

$$B_a = -\frac{\mu_0 L_a}{g\left(1 + \frac{1}{g\,\mu_r}\right)} H_a = -\frac{\mu_0 L_a}{g + \frac{1}{\mu_r}} H_a$$

Remarque : Comme on a $\mu_r = 10^5$ >> on peut faire l'approximation : $\frac{1}{\mu_r} \approx 0$

Donc l'expression simplifié devient : $B_a = -\frac{\mu_0 L_a}{g} H_a$

Par une application numérique : : $B_a = -\frac{\mu_0 L_a}{g} H_a = -7.54 * 10^{-6}\, H_a$

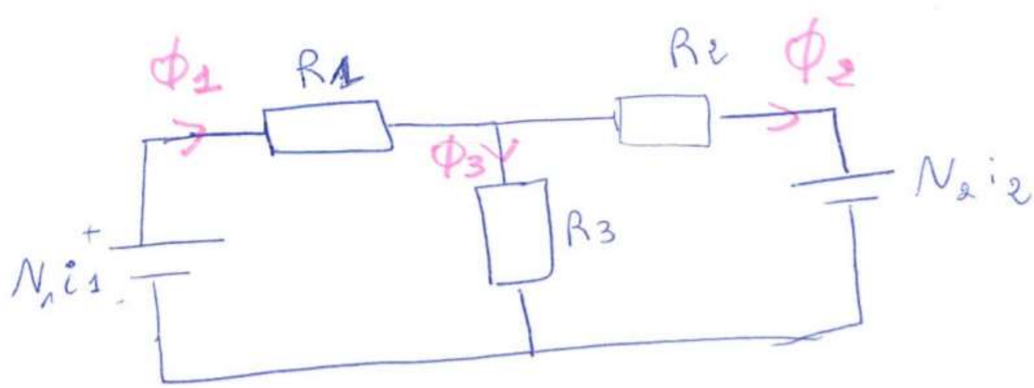
On trace cette courbe avec celle de l'aimantation et l'intersection donne la solution : On trouve

$$B_a \approx 0.33\, T$$

Ainsi la densité de flux B_g dans l'entrefer est : $B_g = B_a = 0.33\, T$

Problème 4 (sol) :

1) Voir schéma



2) Loi des nœuds : $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$.
3) On ouvre bobinage 2 → i2=0

Si on applique la formule du diviseur de tension (par analogie électrique magnétique)

$\mathrm{R}_2\Phi_2 = N_1 i_1 \frac{R_2//R_3}{R_1+R_2//R_3}$ (En général $R_x//R_y = \frac{R_x R_y}{R_x+R_y}$)

Donc on trouve après simplification :

$$\Phi_2 = N_1 i_1 \frac{R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}$$

De même on trouve que

$$\Phi_3 = N_1 i_1 \frac{R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}$$

4) L'inductance mutuelle L_{12} est par définition le rapport entre le flux vu par la bobine 2 et le courant de la bobine 1 :

$$L_{12} = \frac{N_2\Phi_2}{i_1}$$

D'après la question précédente on obtient alors :

$$L_{12} = N_1 N_2 \frac{R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}$$

5) Le rapport entre flux dans le tronçon 3 intercepté par la bobine 1 et le courant i_1 est

$$L_f = \frac{N_1\Phi_3}{i_1} = N_1^2 \frac{R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}$$

6) La loi de Lenz donne :

$$v_1(t) = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt}$$

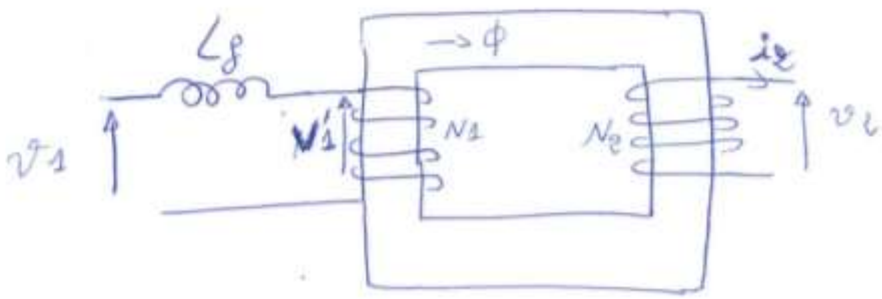
Donc d'après 2) $v_1(t) = N_1\left(\frac{d\Phi_2}{dt} + \frac{d\Phi_3}{dt}\right) = N_1\frac{d\Phi_2}{dt} + N_1\frac{d\Phi_3}{dt}$

Or d'après 5) on a $\Phi_3 = \frac{L_f\, i_1}{N_1}$

Donc

$$v_1(t) = N_1\frac{d\Phi_2}{dt} + L_f\frac{di_1}{dt}$$

En utilisant cette équation de maille, on obtient alors le circuit équivalent suivant :



Si on met $i_2 = 0$ dans le circuit obtenu on trouve que : $L = \frac{N_1^2}{R}$ où R est la reluctance équivalente du circuit et est égale à : $R = R_1 + R_2$ (par équivalence magnétique-électrique)

Donc $L = \frac{N_1^2}{R_1+R_2}$

- Expression de m

Le circuit simplifié qu'on a obtenu contient un seul flux Φ parcourant les deux bobines donc si on applique la loi de Lenz on obtient :

$V_1' = N_1\frac{d\Phi}{dt}$ et $V_2 = N_2\frac{d\Phi}{dt}$

Ainsi $m = \frac{V_2}{V_1'} = \frac{N_2}{N_1}$

Problème 5 (sol)
Partie A : Système à simple excitation

On considère le relai électromagnétique comme dans la figure ci-dessous, excité par une source de tension $v = \sqrt{2}\,V\sin(\omega t)$

a) Si le courant et le flux sont reliés par la relation $i = \lambda^2 + 2\lambda(1-x)^2$; $x < 1$, exprimer la force exercée sur l'armature F_f en fonction de λ

Remarque : On se base sur le (slide 31 ‘’session 3-4.pdf’’) des notes des cours pour répondre à cette question

D’après les notes de cours pour un système à simple excitation:

$W_f(\lambda, x) = \int_0^{\lambda} i d\lambda = \frac{1}{3}\lambda^3 + \lambda^2(1-x)^2$

Donc $F_f = -\frac{\partial W_f}{\partial x} = 2\lambda^2(\lambda - x)^2$

b) Si on fait L’hypothèse d’un système linéaire (courbe caractéristique $\lambda - i$), montrer que la force F_f agit dans une direction qui réduit la réluctance et augmente l’inductance.
Hint : Exprimer d’abord l’énergie de champ absorbée par le système W_f en fonction de la réluctance R et le flux ϕ .

Dans le cas d’un système linéaire : $i = L(x) \times \lambda$

Donc $W_f(\lambda, x) = \int_0^{\lambda} i d\lambda = \int_0^{\lambda} L(x) \times \lambda \, d\lambda = L(x) \times \int_0^{\lambda} \lambda d\lambda = L(x) \times \frac{\lambda^2}{2} = \frac{1}{2}\lambda i$

(On peut directement utiliser la relation $W_f(\lambda, x) = \frac{1}{2}\lambda i$ pour un système linéaire puisque la relation existe déjà dans les notes de cours)

Exprimons l’énergie de champ système W_f en fonction de la réluctance R et le flux ϕ :

$$W_f = \frac{1}{2}\lambda i \quad (1)$$

Or la relation simple qui lie le flux Φ et le flux de liaison (flux linkage) λ est : $\lambda = N\Phi$ (2)

Donc on substitue (2) dans (1) pour obtenir :

$$W_f = \frac{1}{2}N\Phi \, i = \frac{1}{2}\Phi \times (N \times i) \quad (3)$$

Or (d’après slide 27 de ‘’session 1-2.pdf’’) : $mmf = N \times i = R(x) \times \Phi$ (4)

on substitue (4) dans (3) pour obtenir :

$$W_f = \frac{1}{2}R(x)\Phi^2$$

Ainsi on peut en déduire que :

$$F_f = -\frac{\partial W_f}{\partial x} = -\frac{1}{2}\Phi^2\frac{\partial R}{\partial x} \quad (5)$$

*) Cherchons une expression de la réluctance en fonction des paramètres du circuit de la figure proposée :

Soit ‘a’ (quelconque) la reluctance du chemin de fer $R_f = a$ (quelconque)

La reluctance du chemin de l’air est : $R_a = \frac{x}{\mu_0 A} + \frac{x}{\mu_0 A} = \frac{2x}{\mu_0 A}$ (car on a deux ouvertures en haut et en bas). Donc $R_a = bx$ avec $b = \frac{2}{\mu_0 A}$

Ainsi la reluctance totale du chemin magnétique est : $R = R_a + R_f = a + bx$

Ainsi (5) devient :

$$F_f = -\frac{1}{2}\Phi^2\frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{1}{2}b\Phi^2$$

Or $b = \frac{2}{\mu_0 A}$ est positive donc F_f est négative donc elle agit dans la direction qui réduit x et par conséquent celle qui réduit la réluctance du circuit (car $R = a + bx$).

On a vérifié alors les

*) Montrons que la réluctance et l’inductance sont inversement proportionnel

On a $L(x) = \frac{i}{\lambda} = \frac{i}{N\Phi}$

En utilisant la relation (4) on obtient : $L(x) = \frac{N^2}{R}$

Donc la force agit dans la direction qui réduit la réluctance et augmente l’inductance

On a donc vérifié le résultat dans les notes de cours dans le slide 42 de ‘’session 3-4.pdf’’

c) Trouver l’expression de la force moyenne exercée sur l’armature quand l’armature est maintenue fixe à une distance x.

La force moyenne s’exprime par :

$\overline{F_f} = \frac{1}{T}\int_0^T F_f dt$ avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Cherchons une expression de F_f en fonction des donnés du circuit :

On trouve d’abord une expression du courant :

On a : $v = Ri + L\frac{di}{dt}$

En utilisant les phaseurs on obtient :

$$\bar{V} = (r + jL\omega)\bar{I}$$

Donc $\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\sqrt{r^2+\omega^2L^2}} \angle - tan^{-1}(\frac{\omega L}{r})$

Donc $i = \frac{\sqrt{2}V}{\sqrt{r^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t - tan^{-1}(\frac{\omega L}{r}))$

Or on a montré que $L = \frac{N^2}{R}$

Donc $\Phi = \frac{Ni}{R} = \frac{\sqrt{2}NV}{\sqrt{(Rr)^2+(N^2\omega)^2}} \sin(\omega t - tan^{-1}(\frac{\omega L}{r}))$

On substitue alors cette expression dans celle précédemment trouvée de F_f (i.e. $F_f = -\frac{1}{2}b\Phi^2$)

Et on obtient :

$F_f = -\frac{bN^2V^2}{(Rr)^2+(N^2\omega)^2} \sin^2(\omega t - tan^{-1}(\frac{\omega L}{r}))$

Finalement, la valeur moyenne de F_f est :

$$\bar{F_f} = \frac{1}{T}\int_0^T F_f dt = -\frac{1}{2}\frac{bN^2V^2}{(Rr)^2 + (N^2\omega)^2}$$

Partie B : Système à double excitation

On considère deux bobines couplées ayant les auto-inductances et inductances mutuelles suivantes (le système est linéaire):

$L_{11} = 2 + \frac{1}{x}$; $L_{22} = 1 + \frac{1}{2x}$; $L_{12} = L_{21} = \frac{1}{2x}$

Sur une certaine plage de déplacement linéaire x.

La première bobine est excitée par un courant constant de 20 A et la deuxième et excité par un courant constant de -10 A. Trouver :

a) Le travail de force mécanique effectuée si x change de 0.5 à 1 m. (i.e. l'énergie fournie par cette force lorsque le déplacement Δx est effectué)

On trouve d'abord l'expression de la coénergie pour le système doublement excité puis on en déduit celle de la force :

$$W_f' = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + L_{12}i_1i_2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2$$
$$= \left(2 + \frac{1}{2x}\right) \times 200 + \frac{1}{2x} \times -200 + \left(1 + \frac{1}{2x}\right) \times 50$$
$$= 450 + \frac{25}{x}$$

Donc la force est exprimé par : $F_f = \frac{\partial W_f'}{\partial x} = -\frac{25}{x^2}$

Le travail de force mécanique est alors : $\Delta W_m = \int_{0.5}^{1} F_f dx$ (slide 25 ''session-3-4.pdf'')

Donc $\Delta W_m = \int_{0.5}^{1} F_f dx = \int_{0.5}^{1} -\frac{25}{x^2} dx = -25\, J$

b) L'énergie fournie par chaque source électrique

L'énergie fournie par la première source est :

$$\Delta W_{e1} = \int_{\lambda_1(x=0.5)}^{\lambda_1(x=1)} i_1 d\lambda_1 = i1\, [\lambda_1(x=1) - \lambda_1(x=0.5)]$$

Or $\lambda_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2$ (puisque le système est linéaire)

$= \left(2 + \frac{1}{2x}\right) \times 20 + \frac{1}{2x} \times -10 = 40 + \frac{5}{x}$

Donc $\lambda_1(x = 1) = 45$ et $\lambda_1(x = 0.5) = 50$

On déduit donc que $\Delta W_{e1} = 20(45 - 50) = -100\, J$

De même on a pour l'énergie fournie par la deuxième source:

$$\Delta W_{e2} = \int_{\lambda_2(x=0.5)}^{\lambda_2(x=1)} i_2 d\lambda_2 = i2\, [\lambda_2(x=1) - \lambda_2(x=0.5)]$$

Or $\lambda_2 = L_{12}i_1 + L_{22}i_2$

$= -10 + \dfrac{5}{x}$

Donc $\lambda_2(x = 1) = -5$ et $\lambda_2(x = 0.5) = 0$

On déduit donc que $\Delta W_{e1} = -10(-5) = 50\, J$

a) Exprimer L'énergie de champ W_f en fonction du flux de liaison λ et en déduire la variation du champ de flux pour le cas de la question a).
Vérifier finalement que le bilan énergétique est bien établi.

D'après les notes de cours (slides 3 et 4 du pdf ''session-5-6'') pour un système doublement excité :

L'énergie de champ est $W_f = \int_0^{\lambda_1} i_1 d\lambda 1 + \int_0^{\lambda_2} i_2 d\lambda 2$ (1)

Or comme le système est linéaire

$$\lambda_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2$$

$$\lambda_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 \quad ; (L_{12} = L_{21})$$

Donc on peut exprimer i_1 et i_2 en fonction de λ_1 et λ_2 et on trouve (après développement mathématique) :

$$i_1 = \frac{L_{22}\lambda_1 - L_{12}\lambda_2}{L_{22}L_{11} - L_{12}^2}$$

$$i_2 = \frac{L_{12}\lambda_1 - L_{11}\lambda_2}{L_{12}^2 - L_{22}L_{11}}$$

On substitue alors ces deux expressions de i1 et i2 dans (1) et on trouve après une intégration simple que :

$$W_f = \frac{1}{2}\beta_{11}\lambda_1^2 + \beta_{12}\lambda_1\lambda_2 + \frac{1}{2}\beta_{22}\lambda_2^2$$

Avec

$$\beta_{11} = \frac{L_{22}}{L_{22}L_{11}-L_{12}^2} \;\; ; \;\; \beta_{22} = \frac{L_{11}}{L_{22}L_{11}-L_{12}^2} \;\; ; \;\; \beta_{12} = -\frac{L_{12}}{L_{22}L_{11}-L_{12}^2}$$

On trouve alors les expressions suivantes en fonction de x :

$$\beta_{11} = \frac{2x+1}{4x+3} \;\; ; \;\; \beta_{22} = \frac{4x+1}{4x+3} \;\; ; \;\; \beta_{12} = -\frac{1}{4x+3}$$

En particulier, pour le cas de la question a) on trouve :

- Pour x=0.5; $\beta_{11} = \frac{2}{5}$; $\beta_{22} = \frac{3}{5}$; $\beta_{12} = -\frac{1}{5}$
- Pour x=0.5; $\beta_{11} = \frac{3}{7}$; $\beta_{22} = \frac{5}{7}$; $\beta_{12} = -\frac{1}{7}$

Ainsi L'énergie de champ est pour x=0.5 et x=1 :

$$W_f(x=0.5) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times 50^2 = 500J$$
$$W_f(x=1) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{7}\times 45^2 - \frac{1}{7}\times 45\times -5 + \frac{1}{2}\times\frac{5}{7}\times(-5)^2 = 475\,J$$

Ainsi la variation se calcule comme suit :

$$\Delta W_f = W_f(x=1) - W_f(x=0.5) = 475 - 500 = -25\,J$$

Le bilan énergétique est bien établi puisqu'on a trouvé :

$\Delta W_f + \Delta W_m = -25 - 25 = -50 = \Delta W_e$ (le bilan est bien vérifié)